**ENS CACHAN** **LICENCE de MATHEMATIQUES**
**2012-2013**

**Cours Intégration-Probabilités**
**Limites sup, limite inf, Riemann intégrabilité**
**Feuille 1**

*Ce premier td démarre avec des petits excercices qui n'ont d'autres buts que vous mettre à l'aise avec les notions de limites sup et limites inf qui ne sont pas officiellement aux programmes des prépas et seront utilisées assez systématiquement dans le cours d'intégration-proba. Ils sont extraits d'une liste d'exercices proposés par Charles Suquet, et disponibles en ligne à l'adresse :*
`http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IFP/indexIFP.html`
*On termine par la preuve du théorème de caractérisation des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle compact.*

**Exercice 1** Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}}$ une suite double de réels positifs. Montrer l'inégalité

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}u_{n,k}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}u_{n,k}\quad\text{dans } \overline{\mathbb{R}}^+,$$

et donner un exemple où elle est stricte.

**Exercice 2**

1. On rapelle que pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{k\geq n}u_k$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est appelée limite supérieure de $(u_n)$, notée $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$ ou souvent plus simplement $\overline{\lim}\, u_n$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf\limits_{k\geq n}u_k$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est appelée limite inférieure de $(u_n)$, notée $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.
   Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$, $\underline{\lim}\, u_n\leq\overline{\lim}\, u_n$ et qu'il y a égalité si et seulement si la suite $u_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Soit $l\in\mathbb{R}$. Montrer les équivalences

$$\lim u_n = l \Leftrightarrow \overline{\lim}\,|u_n-l| = 0$$
$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \underline{\lim}\, u_n = +\infty\,;$$

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On pose $a=\underline{\lim}\, u_n$ et $b=\overline{\lim}\, u_n$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers $a$ et une sous-suite qui converge vers $b$.

**Exercice 3** Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\overline{\lim}(-a_n)=-\underline{\lim}\, a_n$.
2. Montrer que $\overline{\lim}(a_n+b_n)\leq\overline{\lim}\, a_n+\overline{\lim}\, b_n$, à condition qu'aucune des sommes concernées ne soit de la forme "$\infty-\infty$". Donner un exemple montrant que l'inégalité peut être stricte.
3. Lorsque $a_n\leq b_n$ pour tout $n$, montrer que $\underline{\lim}\, a_n\leq\underline{\lim}\, b_n$. Donner un exemple où les limites inférieures sont égales, bien que $a_n<b_n$ pour tout n.

**Exercice 4 (Convergence dominée pour les séries)** On considère une suite double de réels $(u_{n,k};\ (n,k)\in\mathbb{N}^2)$ et une suite de réels $(a_k;\ k\in\mathbb{N})$ vérifiant les hypothèses suivantes.
a) $\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $|u_{n,k}|\leq a_k$.
b) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}u_{n,k}=u_k\in\mathbb{R}$.
c) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<+\infty$.

1. Montrer que les séries $\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ convergent absolument dans $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que pour tout entier $N$,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{N-1} (u_k - u_{n,k})\right| + 2\sum_{k=N}^{+\infty} a_k\,.$$

3. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_{n,k}.$$

4. Donner un exemple de suite double $(u_{n,k};\ (n,k) \in \mathbb{N})$ vérifiant b) et telle que pour tout $n$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ converge absolument dans $\mathbb{R}$, mais pour laquelle la conclusion de la question précédente est en défaut.

Dans le dernier exercice, on cherche à démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1** *Une fonction $f$ est Riemann intégrable sur $I$ ssi l'ensemble de ses points de discontinuité est un ensemble négligeable.*

**Exercice 5** Pour tout $\tau > 0$, on introduit une mesure de l'*oscillation à l'échelle* $\tau$ de $f$ au travers de la fonction $\omega_\tau : I \to [0,\infty[$ définie pour tout $x \in I$ par

$$\omega_\tau(x) \doteq \sup_{y,z\in I,\ |y-x|\leq\tau,\ |z-x|\leq\tau} |f(z) - f(y)|\,.$$

Comme à $x \in I$ fixé, $\tau \to \omega_\tau(x)$ est croissante, on définit *l'oscillation de $f$* par

$$\omega = \lim_{\tau\to 0,\tau>0} \omega_\tau\,.$$

1. Vérifiez que $f$ est discontinue en $x$ ssi $\omega(x) > 0$.
2. Pour tout $\eta > 0$, on note $D_\eta = \omega^{-1}([\eta,+\infty[)$ l'ensemble des points d'oscillation plus grande que $\eta$. Vérifier que si $g \leq f \leq h$ sont deux fonctions en escalier encadrant $f$ et $\sigma = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une subdivision subordonnée à $g$ et $h$, alors en notant $I_i \doteq ]x_i, x_{i+1}[$, on a :
   (a) pour tout $0 \leq i < n$ tel que $I_i \cap D_\eta \neq \emptyset$, on a $h_i - g_i \geq \eta$
   (b) $I(h) - I(g) \geq \eta \sum_{i\in A} \ell(I_i)$ où $A = \{0 \leq i < n \mid I_i \cap D_\eta \neq \emptyset\}$.
3. En déduire que si $f$ est Riemann intégrable, alors $D_\eta$ est négligeable puis la première implication du résultat.
4. (Délicat) On suppose maintenant que les points de discontinuité de $f$ forment un ensemble négligeable. Soit $\eta > 0$ et $U_\eta = \omega^{-1}([0,\eta[)$.
   (a) Vérifier que $U_\eta$ est ouvert et puis que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille finie $(J_j)_{1\leq j\leq q}$ d'intervalles fermés disjoints (2 à 2) tels que $K \doteq \cup_{j=1}^{q} J_j \subset U_\eta$ et $\sum_{j=1}^{q} \ell(J_j) \geq (b-a) - \epsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in K$, $|f(z) - f(y)| \leq \eta$ dès que $|z - y| \leq \delta$.
   (c) En déduire l'existence de deux fonctions en escalier $g$ et $h$ encadrant $f$ telles que

   $$I(h) - I(g) \leq \eta(b-a) + 2M\epsilon$$

   où $M$ est un majorant de $|f|$ sur $I$.
   (d) Déduire la réciproque.