Calcul des variations

0. Prérequis

0.1. Calcul différentiel et intégral d'une et plusieurs variables

0.2. Intégration par parties : $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$

0.3. Règle de la chaîne, par exemple : $\frac{\partial}{\partial x} f(a(x,y), b(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}$

0.4. Dérivées directionnelles : $\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{h} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$

0.5. Condition nécessaire pour un extremum $\mathbf{x}$: $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$

0.6. Optimisation avec contrainte "$g(\mathbf{x}) = 0$" : $\exists \lambda \in \mathbf{R} : \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$

1. Introduction

Le calcul des variations est calcul avec infinies variables. Ces variables sont souvent codifiés par les valeurs d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ainsi, les "fonctions" dans ce calcul, dites **fonctionnels** prennent des fonctions comme arguments et produisent des nombres. L'évaluation d'un fonctionnel E sur une fonction f est notée $E[f]$. Comme dans le cas de dimension finie, une condition nécessaire pour que $E[f]$ soit minimal est que $E'[f] = 0$. L'objectif de ces notes est de fournir une signification à la notation E'.

Par exemple, pour le fonctionnel qui mesure la longueur d'un graphe $y = y(x)$:

$$E[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

la condition $E'[y] = 0$ est

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}^3} = 0$$

ce qui implique que la courbe la plus courte entre deux points est une droite ($y'' = 0$).

Typiquement la condition $E'[f] = 0$ revient à une EDO ou une EDP sur f. Par exemple, nous obtenons le résultat que pour un fonctionnel $E[f]$ de la forme

$$E[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), x)\mathrm{d}x$$

où L est une fonction de trois variables, la condition $E'[f] = 0$ est

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0$$

ce qui est une EDO de premier ordre sur f, dite équation d'Euler-Lagrange de E.

2. Exemples de fonctionnels

2.0. La longueur du graphe d'une fonction $E[y] = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$

2.1. La longueur d'une courbe paramétrée $E[\mathbf{q}] = \int_a^b \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|\,\mathrm{d}t$

2.2. L'action d'une trajectoire $E[\mathbf{q}] = \int_a^b \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2\,\mathrm{d}t$

2.3. L'action dans un moyen non-homogène $E[\mathbf{q}] = \int_a^b g(\mathbf{q}(t))\,\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2\,\mathrm{d}t$

2.4. L'énergie potentielle d'une chaîne suspendue $E[y] = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$

2.5. La tension d'une membrane par petites déformations verticales : $E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

2.6. La tension d'une plaque par petites déformations verticales : $E[u] = \int_\Omega |\Delta u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

2.7. L'aire d'une surface définie par un graphe : $E[u] = \int_\Omega \sqrt{1+\|\nabla u(\mathbf{x})\|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

2.8. La pente maximale d'une fonction : $E[u] = \sup\limits_{x\in\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|$

2.9. La variation totale d'une fonction : $E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

2.10. L'énergie du p-laplacien : $E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

2.11. L'aire d'une surface paramétrée : $E[\mathbf{x}] = \int_\Omega \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

2.12. Le débruitage par variation totale d'une image $I(\mathbf{x})$:

$$E[u] = \int_\Omega \Big(|u(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x})| \; + \; \lambda\,\|\nabla u(\mathbf{x})\|\Big)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

2.12. L'erreur de flot optique entre deux frames vidéo :

$$E[\mathbf{u}] = \int_\Omega \Big[|B(\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x})) - A(\mathbf{x})|^2 + \alpha^2\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\right)\Big]\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

3. Constructions mathématiques

3.1. **Proposition (Lemme fondamental du calcul de variations)** Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b v(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$$

pour toute fonction v de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $v(a) = v(b) = 0$. Alors la fonction f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

3.2. **Définition (Dérivée de Gâteaux)** Soit V un espace vectoriel réel et $f : V \to \mathbf{R}$ une fonction. La dérivée directionnelle de f au point $x \in V$ en la direction $y \in V$ est la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon}$$

Dans le cas particulier où $V = \mathbf{R}^n$ et f est différentiable, cette limite est $\nabla f(x)\cdot y$

3. Fonctions $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

3.1. Cas général

Soit L une fonction différentiable $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ appelée le *lagrangien*. Nôtre but est de minimiser le fonctionnel

$$E[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x), x)\ \mathrm{d}x$$

dans l'espace des fonctions différentiables en l'intervalle $[a,b]$ telles que $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$ pour deux constantes α et β.

Supposons que y est une fonction où le minimum de E est atteint. On va retrouver une condition nécessaire qui doit satisfaire la fonction y.

On prend une fonction différentiable $v : [a,b] :\to \mathbf{R}$ tel que $v(a) = v(b) = 0$. Une telle fonction s'appelle *variation* à extrémités fixes. Considérons la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(\varepsilon) := E[y + \varepsilon v] = \int_a^b L(y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x), x)\ \mathrm{d}x$$

Observons que $f'(0)$ est la dérivée directionnelle de E en y dans la direction v. Comme y est un minimum de E alors la fonction f a un minimum en $\varepsilon = 0$, ce qui implique $f'(0) = 0$. Écrivons cette condition en utilisant la règle de la chaîne :

$$\int_a^b \left(v \frac{\partial L}{\partial y} + v' \frac{\partial L}{\partial y'} \right)\ \mathrm{d}x = 0$$

en intégrant par parties le second terme de la somme,

$$\int_a^b \left(v \frac{\partial L}{\partial y} - v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} \right)\ \mathrm{d}x = 0$$

et appliquant le lemme fondamental du calcul de variations

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

ce qui est une EDO de second ordre sur la fonction $y(x)$. Cette EDO caractérise les points stationnaires du fonctionnel $E[y]$. Elle s'appelle l'*équation d'Euler-Lagrange* de E. On l'écrit symboliquement $E'[y] = 0$.

3.2. L'astuce de Beltrami

Dans le cas, courant, où le lagrangien L ne dépend explicitement de x, l'équation d'Euler-Lagrange est équivalente à

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = K$$

où K est une constante qu'il faut déterminer pour satisfaire les conditions de bord. Cette EDO est de premier ordre, donc plus simple que l'équation d'Euler-Lagrange.

3.3. Minimisation avec contraintes d'égalité

Plusieurs problèmes d'optimisation ont naturellement de contraintes. Par exemple, une chaîne pendue a une longueur fixe, et une bulle de savon fermée contient un volume d'air constante. Comme dans le cas de dimension finie, les problèmes avec des contraintes se traitent avec multiplicateurs de Lagrange.

Les minima de $E[y]$ sous la contrainte $G[y] = c$, satisfont l'équation d'Euler-Lagrange $(E + \lambda G)'[y] = 0$. Le paramètre λ est un nombre réel que l'on détermine à posteriori en imposant la condition $G[y] = c$.

4. Fonctions $\mathbf{q} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$

Soit $\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée en $\mathbf{R}^n$. Les problèmes variationnels sur la courbe $\mathbf{q}$ se traitent en considérant chaque composante q^i indépendamment. Ainsi, les extrema du fonctionnel

$$E[\mathbf{q}] = \int_a^b L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\ \mathrm{d}t$$

où L est une fonction de $n + n + 1$ variables, satisfont les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$$

qui sont un système de n EDO de second ordre.

5. Fonctions $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domaine borné et $u : \Omega \to \mathbf{R}$. Les problèmes variationnels sur fonctions à plusieurs variables comme u se traitent en prenant variations de u qui sont identiquement zéro sur $\partial\Omega$. Ainsi, les extrema d'un fonctionnel

$$E[u] = \int_\Omega L(u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

où L est une fonction de $1 + n + n$ variables, satisfont l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial L}{\partial u_{x^i}} = 0$$

ce qui est une EDP de second ordre sur la fonction u. Cette équation peut encore s'écrire, avec beaucoup d'abus de notation, comme $0 = \frac{\partial L}{\partial u} - \mathrm{div}\left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u}\right)$. Ici, $\frac{\partial L}{\partial \nabla u}$ dénote le gradient de L par rapport aux n variables ∇u.

Pour $n = 2$, par exemple, pour un lagrangien $L = L(u, u_x, u_y, x, y)$ l'équation d'Euler-Lagrange est

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial L}{\partial u_y} = 0$$

6. Dérivées d'ordre supérieur

Parfois les lagrangiens contiennent des dérivés secondes ou d'ordre plus élevé. En dimension 1, le cas général est

$$E[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x), x)\, \mathrm{d}x$$

Pour minimiser ce fonctionnel on prend des variations v telles que ses n dérivées aux extrémités s'annulent. On obtient alors l'EDO d'ordre $n+1$ suivante :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial L}{\partial y''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\partial L}{\partial y^{(n)}}$$

Des cas encore plus généraux sont aussi possibles : lagrangiens d'ordre supérieur à plusieurs variables..., mais la notation devient trop compliquée et peu pratique. Par exemple, pour le lagrangien de second ordre $L = (\Delta u)^2$, discuté ci dessus, il vaut mieux calculer la variation directement au lieu d'utiliser une formule générale.

7. Conditions d'Euler-Lagrange pour les exemples antérieurs

7.0. La longueur du graphe d'une fonction

$$E[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x \qquad\qquad E'[y] = \frac{y''(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}^3}$$

La condition $E'[y] = 0$ est équivalente à $y''(x) = 0$, c'est à dire, que y est une droite.

7.1. La longueur d'une courbe paramétrée

$$E[\mathbf{q}] = \int_a^b \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|\, \mathrm{d}t \qquad\qquad E'[\mathbf{q}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\mathbf{q}}(t)}{\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|}\right)$$

La condition $E'[\mathbf{q}] = 0$ dit que la direction du vecteur tangent à la courbe $\left(\frac{\dot{\mathbf{q}}(t)}{\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|}\right)$ est constante, c'est à dire, la courbe est une droite avec une paramétrisation arbitraire.

7.2. L'action d'une trajectoire

$$E[\mathbf{q}] = \int_a^b \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2\, \mathrm{d}t \qquad\qquad E'[\mathbf{q}] = -\ddot{\mathbf{q}}(t)$$

La condition $E'[\mathbf{q}] = 0$ dit que le vecteur tangent à la courbe est constante (et de longueur constante). C'est à dire, la courbe est une droite paramétrée par un multiple constant du paramètre arc (une droite parcourue à vitesse constante).

7.3. L'action dans un moyen non-homogène

$$E[\mathbf{q}] = \int_a^b g(\mathbf{q}(t))\, \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2\, \mathrm{d}t \qquad\qquad E'[\mathbf{q}] = g_{q^i}\, \|\mathbf{q}\|^2 - 2(\nabla g \cdot \dot{\mathbf{q}})\dot{q}^i - 2g\ddot{q}^i$$

La condition $E'(\mathbf{q}) = 0$ est un système semi-linéaire d'EDO de second ordre, (les EDO des géodésiques).

7.4. L'énergie potentielle d'une chaîne suspendue Voici un problème variationnel avec contraintes. Il faut minimiser l'énergie potentielle $E[y]$ d'une courbe de longueur $G[y] = l$. L'énergie potentielle est

$$E[y] = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Pour trouver le minimum sous la contrainte $G[y] = l$ il faut minimiser le fonctionnel $F[y] = E[y] - \lambda G[y]$, où la valeur du multiplicateur de lagrange λ sera déterminée à posteriori pour satisfaire la contrainte.

Le Lagrangien est donc $L = (y-\lambda)\sqrt{1+\dot{y}^2}$. Vu q'uil ne dépend pas explicitement de x on peut calculer l'équation d'Euler-Lagrange comme $L - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = c$, pour une constante c :

$$\frac{(y(x)-\lambda)}{\sqrt{1+\mathbf{y}'(x)^2}} = c$$

La solution de cette équation est une chaînette de la forme $y(x) = \lambda + \cosh\left(\frac{x}{c} + c_2\right)$. Les trois constantes λ, c et c_2 sont enfin ajustées pour satisfaire les deux conditions de bord et la contrainte.

7.5. La tension d'une membrane par petites déformations verticales

$$E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad E'[u] = -\Delta u$$

La solution est la fonction harmoniques ($0 = \Delta u$) qui satisfait condition de bord. L'EDP résultante est l'équation de Laplace.

7.6. La tension d'une plaque par petites déformations verticales

$$E[u] = \int_\Omega |\Delta u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad E'[u] = \Delta\Delta u$$

Voici un fonctionnel de second ordre, qui résulte en une EDP de quatrième ordre appellé l'équation biharmonique. Pour avoir solution unique on doit fixer la valeur de u et sa dérivé première sur $\partial\Omega$.

Dans cet exemple, pour calculer E' il vaut mieux de calculer la variation directement au lieu d'utiliser une formule générale.

7.7. L'aire d'une surface définie par un graphe
Le graphe d'une fonction $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définit une surface $(x, y, u(x, y))$ en $\mathbf{R}^3$. Les surfaces minimales sont celles qui minimisent $E[u]$ avec une condition de bord fixée (par exemple, un film de savon s'appuyant sur un contour rigide).

$$E[u] = \int_\Omega \sqrt{1+\|\nabla u(\mathbf{x})\|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad E'[u] = -\frac{u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2)}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}^{\,3}}$$

7.8. La variation totale d'une fonction

$$E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad E'[u] = -\frac{1}{\|\nabla u\|^3}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right)$$

7.9. Le p-laplacien

$$E[u] = \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad\qquad E'[u] = 0 \iff \operatorname{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\,\nabla u\right) = 0$$

7.10. La pente maximale d'une fonction
La pente maximale d'une fonction $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est

$$E[u] = \sup_{x\in\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|$$

Ce fonctionnel n'est pas dérivable avec les méthodes décrits aujourd'hui. Par contre, on peut l'intérpreter comme le limite quand $p \to \infty$ de l'énérgie du p-laplacien. Ainsi, on obtient l'équation non-linéaire du Laplacien infini :

$$D^2u(\nabla u, \nabla u) = 0$$

7.11. Le débruitage par lissage d'une image $I(\mathbf{x})$

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x})|^2 \; + \; \alpha^2\,\|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\right) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad\qquad E'[u] = u - I - \alpha^2 \Delta u$$

La condition $E'[u] = 0$ est une EDP linéaire de second ordre. Sa solution est une fonction qui est à la fois lisse et approxime bien la fonction I. Le compromis entre ces deux requis contradictoires est géré par la valeur du paramètre α.

8. Continuation

D'autres sujets que nous n'avons pas traité :

8.1. Conditions suffisantes d'extrema locaux (second variation)

8.2. Identification d'extrema globaux

8.3. Problèmes à extrémités variables ou mixtes

8.4. **Existence** (!), unicité, régularité des solutions

8.5. Caractérisation variationnelle des valeurs propres (théorie de Sturm-Liouville)

8.6. Principe d'action stationnaire en physique

8.7. Symétries et lois de conservation (théorème de Noether)

8.8. Formalisme Hamiltonien et équation d'Hamilton-Jacobi

8.9. Théorie de la commande optimale (Pontriaguine-Bellman)

8.10. Interprétation variationnelle des méthodes Bayésiens (Mumford)

9. Bibliographie

9.1. L. Landau : *Mécanique* (page 2)

9.2. L. C. Evans : *Partial Differential Equations* (chapitre 8, page 431)

9.3. R. Courant, D. Hilbert : *Methods of Mathematical Physics*

9.4. C. Lanczos : *The Variational Principles of Mechanics*

9.5. G. Aubert, P. Kornprobst : *Mathematical Methods in Image Processing*