Analyse de Fourier (formulaire)

0. Prérequis

0.1. Calcul différentiel et intégral d'une et plusieurs variables

0.2. Nombres complexes : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, etc

0.3. Séries de Taylor : $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 + x^2 + \cdots \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

0.4. Algèbre linéaire, bases orthonormées : $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \quad \Longrightarrow \quad a_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle$

0.5. Étant donnée le dessin du graphe d'une fonction, savoir dessiner le graphe de sa dérivée et de son intégrale.

1. Transformée de Fourier de fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$

1.1 Définitions La transformée de Fourier d'une fonction sommable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est la fonction $\hat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\xi) := \int f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

La transformée inverse d'une fonction sommable $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est la fonction

$$\check{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int g(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

Le théorème d'inversion de Fourier dit que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre. On a donc une représentation de f comme combinaison linéaire (infinie) de fonctions sinusoïdales, où les coefficients de la combinaison linéaire sont données par $\widehat{f}(\xi)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

1.2. Conservation d'énergie (théorème de Plancherel)

$$\int |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi$$

1.3. Théorème de convolution

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

1.4. Propriétés générales

f	$\widehat{f}$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe hermitienne $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$
$f(x/a)$	$\|a\| \widehat{f}(a\xi)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$
$f'(x)$	$-i\xi \widehat{f}(\xi)$

1.5. Exemples de transformées

$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
$\chi_{\left[-\frac{1}{2a},\frac{1}{2a}\right]}(x)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2\pi a}\right)$
$e^{-ax}H(x)$	$\frac{1}{a+i\xi}$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{xi^2}{4\alpha}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
1	$2\pi\delta(\xi)$
$\delta(x)$	1
e^{iax}	$2\pi\delta(\xi-a)$
$\cos(ax)$	$\pi\delta(\xi-a)+\pi\delta(\xi+a)$
$\sin(ax)$	$-i\pi\delta(\xi-a)+i\pi\delta(\xi+a)$
x^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\xi)$
$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta(x-na)$	$\frac{2\pi}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\delta\left(\xi-\frac{2\pi k}{a}\right)$

2. Série de Fourier de fonctions $f:\mathbf{T}\to\mathbf{C}$

Soit $\mathbf{T}=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ la périodisation de l'intervalle $[0,2\pi]$. Les fonctions $f:\mathbf{T}\to\mathbf{C}$ sont les fonctions 2π-périodiques. Elles peuvent s'exprimer comme série de Fourier, ce qui est une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquences entières :

$$f(\theta)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(n)\exp^{in\theta}$$

les coefficients $\widehat{f}(n)$ sont

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\exp^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

(cette relation s'obtient en intégrant l'expression de $f(\theta)$ multiplié par $e^{in\theta}$, et utilisant le fait que les fonctions $e^{in\theta}$ sont une base orthogonale des fonctions 2π-périodiques).

Les séries de Fourier ont des propriétés analogues aux intégrales de Fourier. Seulement la propriété sur $f(x/a)$ n'est pas valable parce que elle ne conserve pas la périodicité de la fonction..

3. Transformée de Fourier discrète de fonctions $f : \mathbf{Z}_N \to \mathbf{C}$

Les "fonctions" $f : \mathbf{Z}_N \to \mathbf{C}$ sont les vecteurs de $\mathbf{C}^N$. Une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^N$ est l'ensemble de vecteurs

$$\mathbf{e}_n = \left(e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right)_{k=0,\dots,N-1}$$

pour $n = 0, \dots, N-1$. On a

$$\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = N\delta_{pq}$$

La transformée de Fourier discrète est l'expression de vecteurs de $\mathbf{C}^N$ dans cette base. Ainsi, si $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})$, il peut s'exprimer comme

$$v_k = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{v}_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

et les coefficients $\widehat{v}_n$ se retrouvent en multipliant le vecteur $\mathbf{v}$ par $\mathbf{e_n}$:

$$\widehat{v}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

La transformée de Fourier discrète a des propriétés analogues aux autres transformées, et toutes les relations son triviales à montrer avec algèbre linéaire (il y a pas de problèmes de convergence comme dans les autres cas).

3. Transformée de Fourier en plusieurs dimensions

Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, sa transformée de Fourier se définit de façon séparable, à partir des transformées de Fourier par rapport à chaque variable

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

et la transformée inverse

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\mathbf{x}\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

Les propriétés se récupèrent directement de la transformée de Fourier en dimension 1 par séparabilité.

6. Application : résolution d'EDP linéaires

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction donnée. On veut trouver une fonction u satisfaisant l'EDP

$$u - \alpha^2 \Delta u = f$$

ceci est une EDP linéaire à coefficients constants. Pour la résoudre, on applique la transformée de Fourier à chaque coté pour obtenir une rélation équivalente

$$\hat{u} + \alpha^2(\xi^2 + \eta^2)\hat{u} = \hat{f}$$

D'où on peut isoler $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{1}{1+\alpha^2(\xi^2+\eta^2)} \cdot \hat{f}$$

qui est la transformée de Fourier de la solution. La solution est donc la convolution de f avec un noyau positif de type Laplace.

Plus en général, une EDP linéaire est de la forme

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = f$$

où n est un polynôme de n variables. En appliquant la transformée de Fourier

$$P(i\xi_1, \dots, i\xi_n)\, \hat{u} = \hat{f}$$

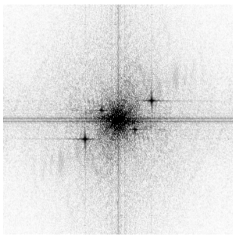
qui rend immédiatement la solution.

4. Application : traitement d'images

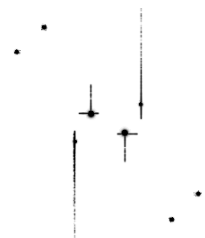
La transformée de Fourier en dimension 2 est un outil important en traitement d'image.

Une application simple est le nettoyage de bruit périodique. Les fréquences du bruit périodique dans une image I sont des maxima locaux dans $|\widehat{I}|$ et on peut les enlever à la main.

I



$\log\left(1+|\widehat{I}|\right)$



masque pour $\widehat{I}$

reconstruction

5. Bibliographie

5.0. T. W. Körner : *Fourier analysis*
(pour apprendre toute l'histoire en leçons très courtes)

5.1. R. Bracewell : *The Fourier Transform and its Applications*
(pour apprendre à faire les dessins)

5.2. C. Gasquet, P. Witomski : *Analyse de Fourier et applications*
(la théorie complete en dimension 1)

5.3. R. C. Gonzalez, R. E. Woods : *Digital Image Processing*
(application au traitement d'images)