textures de turbulence

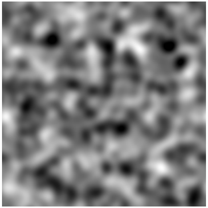
Résumé

1. Synthèse de textures lisses
2. Simulation de turbulence (en utilisant des textures lisses)

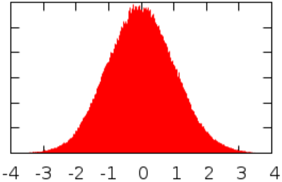
Synthèse de textures lisses

Deux descripteurs d'une texture T :

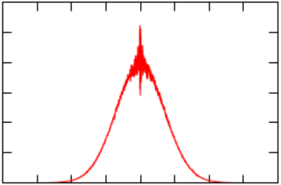
1. La *distribution ponctuelle*, approximé par l'histogramme de T
2. Le *grain*, approximé par le spectre $|\widehat{T}|$



T



histogramme

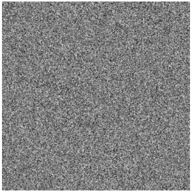


spectre

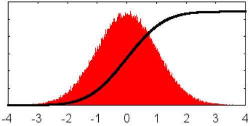
Contrôle des descripteurs de texture

Algorithme (σ, λ) **:**

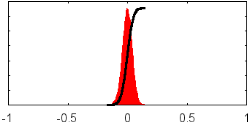
- $T :=$ bruit blanc gaussien $N(0,1)$
- $T := 2\sigma\sqrt{\pi}\; G_\sigma * T$
- $T := \lambda T$

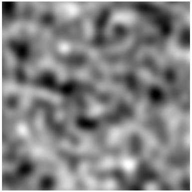


bruit blanc gaussien T

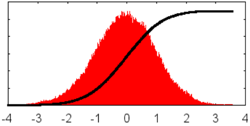


$G_{10} * T$

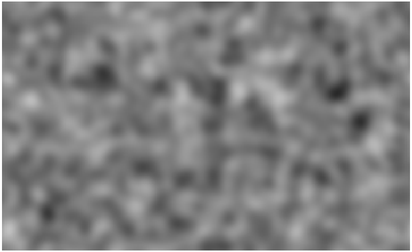




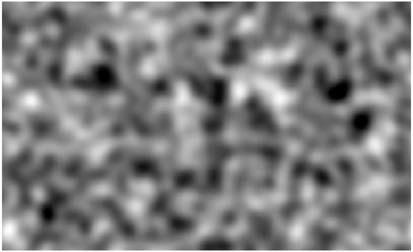
$25\; G_{10} * T$



Contrôle des descripteurs de texture

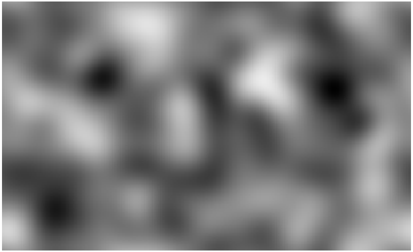


$\sigma = 4 \qquad \lambda = 20$



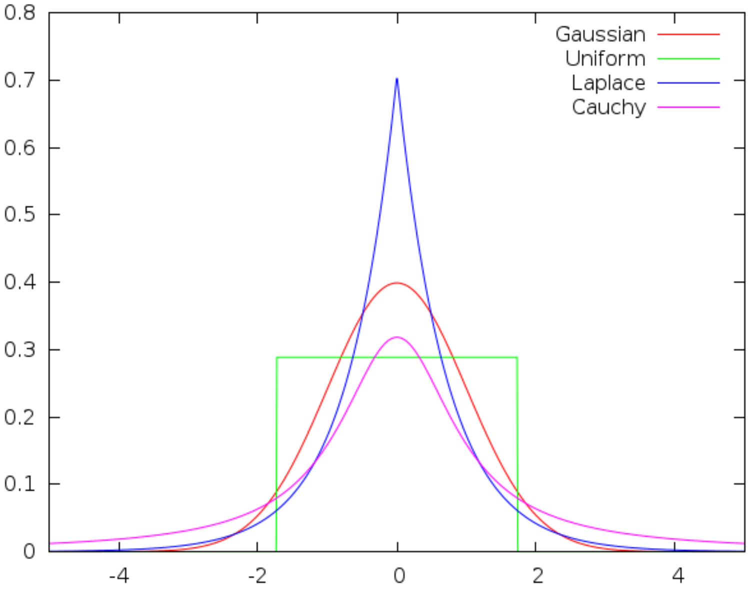
$\sigma = 4 \qquad \lambda = 40$

$\sigma = 10 \qquad \lambda = 20$

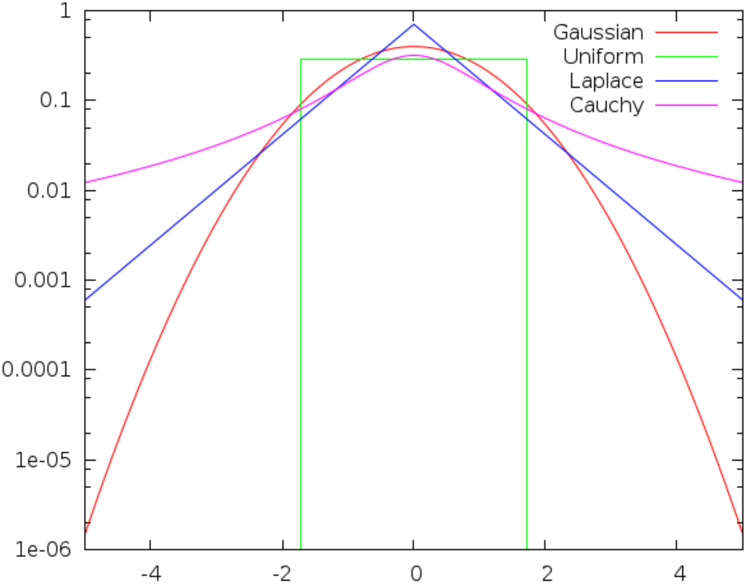


$\sigma = 10 \qquad \lambda = 40$

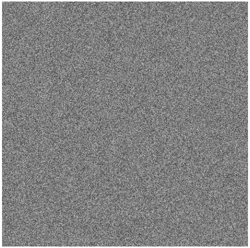
Autres distributions (non-gaussiennes)



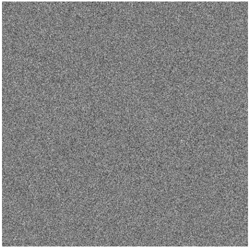
Autres distributions (non-gaussiennes)



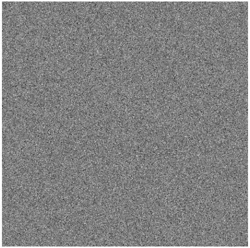
Bruit blanc : à chaque pixel, un échantillon indépendant



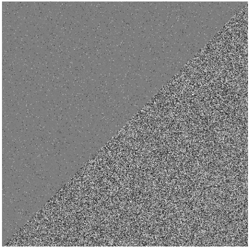
uniforme



gaussien

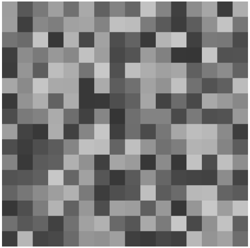


laplace

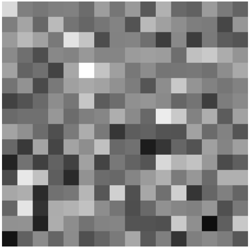


cauchy

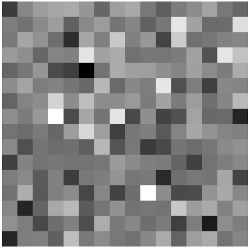
Bruit blanc : à chaque pixel, un échantillon indépendant



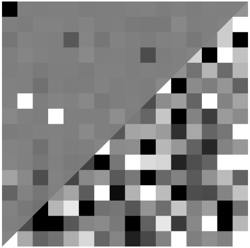
uniforme



gaussien

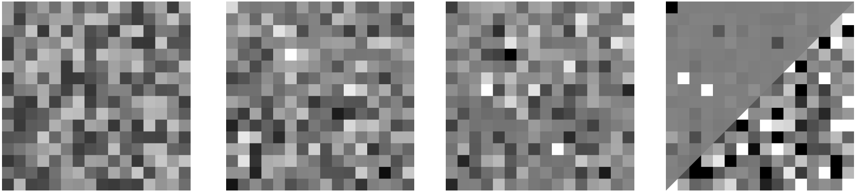


laplace

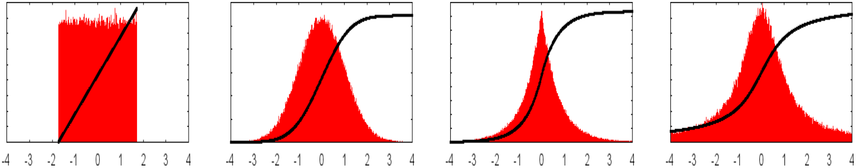


cauchy

Bruit blanc : à chaque pixel, un échantillon indépendant



uniforme | gaussien | laplace | cauchy



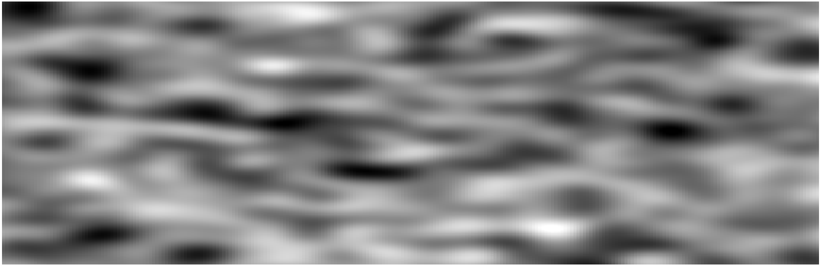
$\frac{\sqrt{3}}{6}\chi_{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|x|}$ | $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Simulation : distribution ponctuelle du bruit lissé

Algorithme :

1. Générer une image u de bruit blanc Gaussien
2. Convoluer u avec un noyau Gaussien

On obtient du bruit Gaussien lisse.

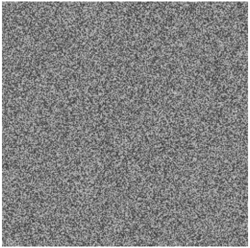


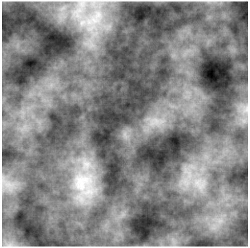
Comment obtenir des bruits lisses avec d'autres distributions ?

Simulation : distribution ponctuelle du bruit lissé

Algorithme :

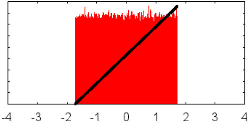
1. Générer une image u de bruit blanc Uniforme
2. Convoluer u avec un noyau Uniforme

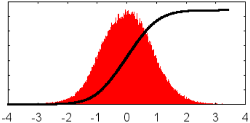




bruit blanc uniforme u

$25\ D_{17} * u$



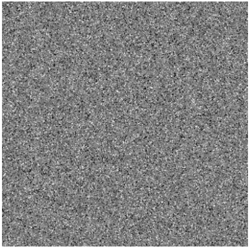


On obtient du bruit Gaussien lisse.

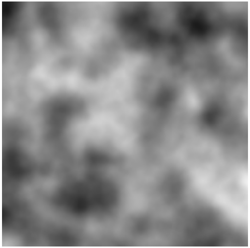
Simulation : distribution ponctuelle du bruit lissé

Algorithme :

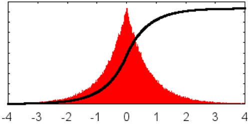
1. Générer une image u de bruit blanc Laplace
2. Convoluer u avec un noyau Laplace

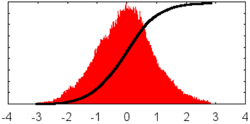


bruit blanc uniforme u



$25\ L_{14} * u$





On obtient du bruit Gaussien lisse.

La distribution ponctuelle est-elle toujours Gaussienne ?

Théorème central limite.
Si X_i sont des variables aléatoires indépendantes idéntiquement distribuées, avec moyenne et variance finies, alors la suite de variables

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge vers une variable Normale.

La distribution ponctuelle est-elle toujours Gaussienne ?

Théorème central limite. (variation)
Si X_i sont des variables aléatoires ~~indépendantes~~ ~~idéntiquement distribuées~~, avec moyenne et variance finies, alors la suite de variables

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

converge vers une variable Normale.

La distribution ponctuelle est-elle toujours Gaussienne ?

Stabilité des variables Normales.
Si X_i sont des variables avec la loi $N(\mu, \sigma)$, et α_i sont des nombres réels, alors la variable

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

a la loi Normale

$$N\left(\mu \sum \alpha_i \quad , \quad \sigma \sqrt{\sum \alpha_i^2}\right)$$

En continu : Si ω est un noyau de flou centré alors :

$$\int \omega(p) X_p dp \quad \sim \quad N\left(0, \sigma \sqrt{\int \omega^2}\right)$$

Simulation : images ponctuellement Gaussienes

En utilisant les résultats antérieurs, on peut construire des images lissées par un noyau ω arbitraire avec une distribution poncutellement Normale d'écart type 1.

Algorithme :

1. Générer une image u de bruit blanc $N(0,1)$
2. Convoluer u avec ω
3. Diviser le résultat par $\sqrt{\int \omega^2}$

Le résultat est une fonction aléatoire lisse dont la distribution ponctuelle est $N(0,1)$.

Simulation : images non-Gaussienes

Comment briser la malédiction du théorème central limite ?

Si X_i sont des variables aléatoires indépendantes idéntiquement distribuées, avec moyenne et variance finies, alors la suite de variables...

Simulation : images non-Gaussienes

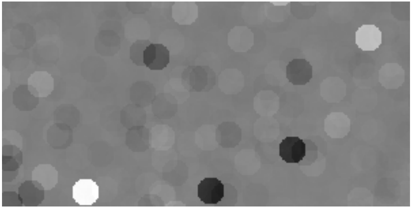
Comment briser la malédiction du théorème central limite ?

Si X_i sont des variables aléatoires indépendantes idéntiquement distribuées, avec moyenne et variance finies, alors la suite de variables...

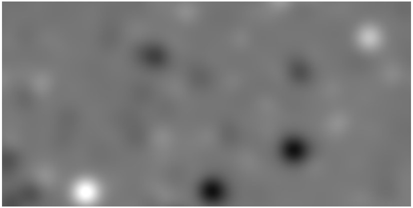
Il faut utiliser des variables sans moyenne ou sans variance !
(comme Cauchy, par exemple)

Simulation : images Cauchy lisses

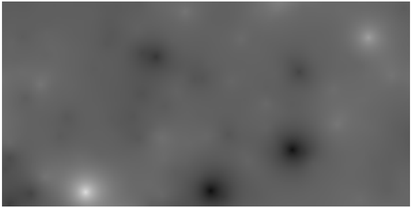
Bruit blanc Cauchy lissée par des noyaux différents



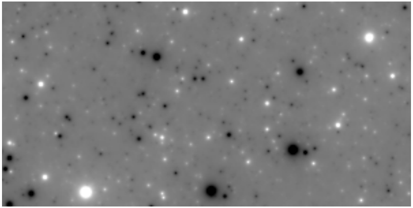
uniforme



gaussien



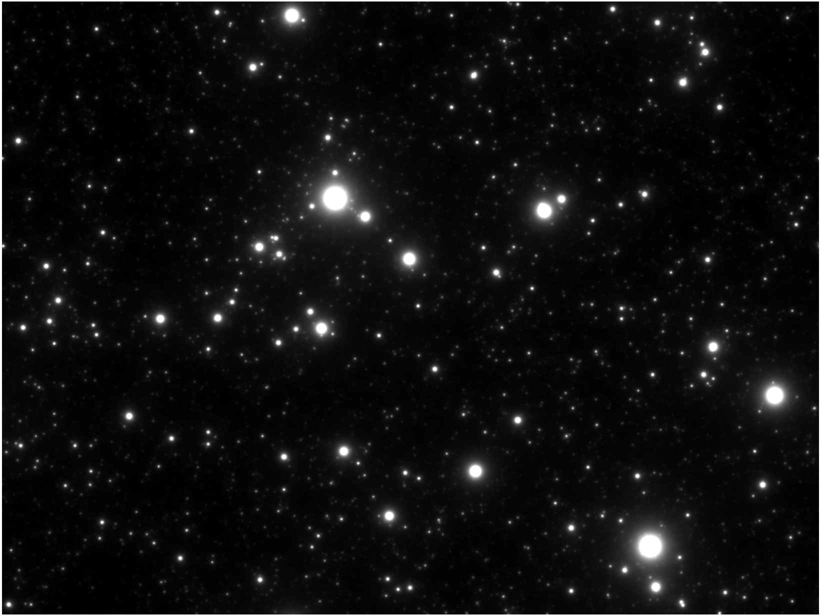
laplace



cauchy

Toutes ces images ont la distribution ponctuelle Cauchy

Simulation : champ aléatoire $\frac{1}{2}$-Lévy



Simulation : noyaux stables

L'algorithme de lissage permet de produir champs aléatoires dont la distribution ponctuelle est une *distribution stable* ; d'une famille fermée par combinaisons linéaires (Normale, Cauchy, Lévy).

Comment obtenir d'autres distributions ponctuelles ? La méthode de lissage n'est pas suffisant.

Simulation : transformation de variables aléatoires

Si X est une variable aléatoire, quelle est la loi de $f(X)$?

- Si $F(t)$ est la CDF de X, alors $F(X)$ est uniforme.
- Si X est uniforme alors la CDF de $G^{-1}(X)$ est $G(t)$.
- $X \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \sim Cauchy(0,1)$
- $X, Y \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y) \sim N(0,1)$
- $X, Y \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad \log\frac{X}{Y} \sim Laplace(0,1)$
- $X, Y \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{X}{Y} \sim Cauchy(0,1)$
- $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad X_1X_2 - X_3X_4 \sim Laplace(0,1)$

Simulation : choix de la distribution ponctuelle

Soient $k(x)$ et $\omega(x, y)$ des densités.

Soit $K(X)$ la transformation qui transforme variables $N(0, 1)$ vers variables avec la densité $k(x)$.

Algorithme :

1. Générer une image u de bruit blanc $N(0, 1)$
2. Convoluer u avec ω
3. Diviser le résultat par $\sqrt{\int \omega^2}$
4. Appliquer la fonction K sur tous les pixels

Le résultat est une fonction aléatoire lisse dont la distribution ponctuelle est $k(x)$ et la forme du "grain" dépend de ω.

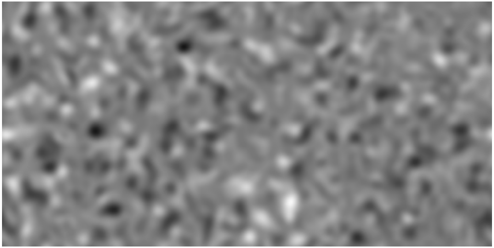
Simulation : image aléatoire lisse ponctuellement Laplace

Paramètres :

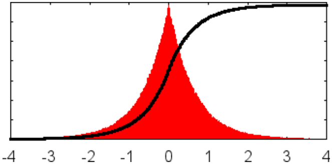
- σ taille du grain (en pixels)
- λ écart type ponctuel (en niveaux de gris)

Algorithme (σ, λ) **"laplacien" :**

1. Générer 4 images u_1, u_2, u_3, u_4 de bruit blanc $N(0,1)$
2. Lisser chaque u_i avec une gaussienne de taille σ
3. Calculer l'image $\frac{25\sqrt{2}\lambda\sigma^2}{8}(u_1 u_2 - u_3 u_4)$



$\sigma = 10, \lambda = 1$



Quelques modèles de turbulence

Bruit additif :

$$I_i(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + n_i(\mathbf{x})$$

Déformations :

$$I_i(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x} + \mathbf{u}_i(\mathbf{x}))$$

Flous locaux :

$$I_i(\mathbf{x}) = \int I(\mathbf{x} + \mathbf{y}) G_{\sigma_i}(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

Modèle combiné :

$$I_i(\mathbf{x}) = \int \Big(I(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + n_i(\mathbf{x}) \Big) \, G_{\sigma_i}(\mathbf{y} + \mathbf{u}_i(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$