Hilbert and Fourier analysis
C3

M. Delbracio & G. Facciolo

Today's topics

- Hilbert Spaces
  - Orthogonal projections and subspaces
  - Riesz Theorem
- Orthonormal bases (Bases Hilbertiennes).
  - Separable Hilbert spaces
  - Parseval identity
  - Weak convergence

Hilbert spaces

Def 4.1:

• **Real Hilbert space** is a vector space over $\mathbb{R}$, equipped with an inner product (u, v), and that is also complete with respect to the norm induced by the product :

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

• **Complex (Hermitian) Hilbert space** is a vector space over $\mathbb{C}$, equipped with an Hermitian inner product, and that is also complete with respect to the norm induced by the product.

An Hermitian product verifies:

- $(u, v) = \overline{(v, u)}$
- $(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \quad , \quad (u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$
- $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$

Examples of Hilbert spaces

- Finite dimensional Euclidean space $\mathbb{C}^N = \{(a_1, ..., a_N) : a_k \in \mathbb{C}\}$, equipped with the product: $(a, b) = \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{b_k}$.
- $L^2(E)$ equipped with the product :$(f, g) = \int_E f(x)\,\overline{g(x)} dx$.
- $\ell^2(\mathbb{N})$ the space of sequences $u = (u_1, u_2, ...u_n)$ in $\mathbb{C}$ s.t. $\sum |u_n|^2 < \infty$, equipped with the product: $(u, v) = \sum u_n \overline{v_n}$.

  Or we can associate $\ell^2(\mathbb{N})$ to piecewise constant functions in $L^2(\mathbb{R})$. ℓ^2 is a closed subspace of a complete space $L^2(\mathbb{R})$, so it is also complete.

Hilbert spaces

Proposition 4.1: **(Cauchy-Schwarz inequality)**

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$$

Proof. $\rightarrow$ blackboard

Démonstration la démonstration est évidemment la même qu'en dimension finie puisqu'elle se fait dans le plan de f et g. On pose $(f,g) = e^{i\theta}|(f,g)|$ et on développe $||f + te^{i\theta}g||^2 \geq 0$, ce qui donne

$$||f||^2 + t(f, e^{i\theta}g) + t(e^{i\theta}g, f) + t^2||g||^2 \geq 0, \text{ soit}$$

$$||f||^2 + 2t|(f,g)| + t^2||g||^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme est négatif. ◦

Orthogonality

Def: We say that $u, v \in H$ are **orthogonal** if $(u, v) = 0$.

For a couple of orthogonal vectors f and $g \in H$ we have the **Pythagoras theorem**: $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Which **extends to sequences of orthogonal vectors** $u_k \in H$

$$\|\sum_k u_k\|^2 = \sum_k \|u_k\|^2.$$

For **infinite sequences** the completeness of H implies that $(\sum_k u_k) \in H$, but for that $\sum_k \|u_k\|^2$ must be convergent. The following proposition shows that.

Proposition 4.2: Let u_n be a sequence of orthogonal vectors in H.
If $\sum_n \|u_n\|^2 < \infty$ then $\sum_n u_n$ converge in H, and
If $\sum_n \|u_n\| < \infty$ then $\sum_n u_n$ converge in H.

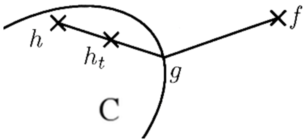
Proof. $\rightarrow$ see notes

Orthogonal projections

Theorem 4.1:
Let H be a Hilbert space, and C be a non-empty, **closed** and convex subset of H. Then for all $f \in H$,

- there **exist** a **unique** point of C, which we call **projection** of f, such that its distance to f is minimum.
- The projection point is characterized as the unique point $g \in C$ such that:

$$\forall h \in C, Re(f-g, h-g) \leq 0$$



If C is a **closed subspace** of H, then the projection of f is the **unique** point $g \in C$ such that $f - g$ is orthogonal to all the elements of C.

Proof. $\rightarrow$ blackboard

Proof theorem 4.1 - unicity of projection

Lemma 4.1: (Parallelogram identity)

$$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Démonstration du théorème 5.1 Montrons d'abord l'unicité. S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant la projection de f sur C, on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}||2f - (g_1 + g_2)||^2 = ||f - g_1||^2 + ||f - g_2||^2 - \frac{1}{2}||g_1 - g_2||^2.$$

Donc $||f - \frac{g_1+g_2}{2}||^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1+g_2}{2}$ est dans C, c'est impossible.

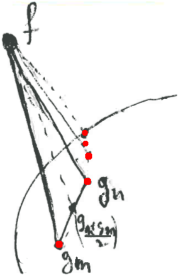
Proof theorem 4.1 - existence of projection

On montre maintenant l'existence de la projection. Soit g_n une suite de C telle que $||f-g_n|| \to d(f,C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}||g_n - g_m||^2 = ||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2 - 2||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. En effet, $||f-g_n||$ et $||f-g_m||$ tendent vers $d(f,C)$ et on a $-2||f-\frac{g_m+g_n}{2}|| \leq -2d(f,C)$, puisque $\frac{g_m+g_n}{2}$ appartient à C.

La suite g_n est donc de Cauchy et converge vers un élément g de C, car C est fermé. Donc $||f-g_n|| \to ||f-g||$ et donc $||f-g|| = d(f,C)$.



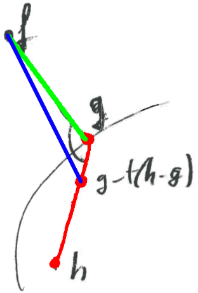
Proof theorem 4.1 - charact. inequality: $Re(f - g, h - g) \leq 0$

Pour tout $h \in C$, et $t \in [0,1]$, les points $g + t(h-g)$ du segment $[g,h]$ appartiennent à C. On a donc

$$\forall t \in [0,1],\ ||f-g||^2 \leq ||f-g-t(h-g)||^2 \text{ ce qui est équivalent à} \qquad (5.2)$$

$$\forall t \in [0,1],\ t^2||h-g||^2 - 2t\mathrm{Re}(f-g, h-g) \geq 0.$$

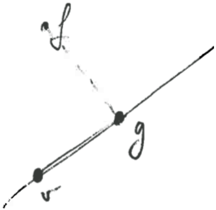
On divise par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0^+ pour obtenir (5.1). Réciproquement si (5.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (5.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $||f-g||$ réalise la distance minimale de f à un point de C.



Proof theorem 4.1 - when C is closed subspace

If C is a **closed** subspace of H, then the projection of f is the **unique** point $g \in C$ such that $(v, g - f) = 0$ for all $v \in C$.

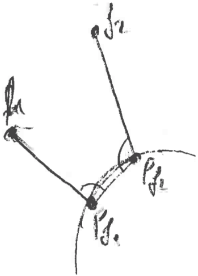
Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit g la projection de f. Pour tout v dans C, $g + e^{i\theta}v$ appartient à C. On a donc $\mathrm{Re}(e^{i\theta}(v, g - f)) \leq 0$ pour tout θ et donc $(v, g - f) = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $(v, g - f) = 0$ pour tout $v \in C$, on a $(v - g, g - f) = 0$ pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème 2.1, g est bien la projection de f sur C. ○



Orthogonal projections

Exercise 1

Show that the projection P over a closed convex set is a contraction, i.e. $\|Pf_1 - Pf_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$.



Hint: Use $Re(f_1 - Pf_1, h - Pf_1) \leq 0$ with $h = Pf_2$.

Orthogonal subspaces

Def 4.1: Let A be a subset of H , its **orthogonal** $A^\perp$ is defined as

$$A^\perp = \{v : \forall f \in A, (v, f) = 0\}.$$

$A^\perp$ is a **closed subspace** of H.

Corollary 4.1: If F is a **closed** subspace of a Hilbert space H, then all $f \in H$ can be **decomposed uniquely** as:

$$f = g + h \quad , g \in F, \, h \in F^\perp,$$

where g and h are respectively the orthogonal projections of f onto F and $F^\perp$. So we have :

1. $H = F + F^\perp$,
2. $(F^\perp)^\perp = F$,
3. $H^\perp = \{0\}$, and
4. if $A \subset H$ then $(A^\perp)^\perp = \overline{Vect(A)}$.

Proof. → see notes

Representation theorem

Theorem 4.2: (Rietz)
Let H be a Hilbert space. For all $f \in H$, the application $H \to (\cdot, f)$ is a continuous linear operator over H.
Conversely, if $\tilde{f}$ is a continuous linear operator over H, then there exists a unique element $f \in H$ such that $\tilde{f}(v) = (v, f)$.

Proof. $\to$ blackboard

Continuous linear operators.
A linear transformation L between two normed vector spaces X and Y is continuous if and only if there exists some $M > 0$ such that for all $v \in X$

$$\|L(v)\|_Y \leq M\|v\|_X$$

Representation theorem

Démonstration La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons la réciproque. Soit $\tilde{f}$ une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace propre de H (c'est-à-dire strictement inclus dans H). Comme L est fermé, par la relation (5.4) $L^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^\perp$, non nul. On a donc $\tilde{f}(g) \neq 0$ et on pose pour tout $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g + (v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L. Comme $g \in L^\perp$, on a donc

et v2∈L -> (v2,g) = 0

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} ||g||^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = (v, \frac{\overline{\tilde{f}(g)}}{||g||^2} g).$$

Orthonormal (Hilbert) bases

Definition 4.2 We say that $A \subseteq H$ is **total** if $Vect(A)$ (the vector space generated by A) is dense in H.

Corollary 4.2 A is **total** if and only if $A^{\perp} = \{0\}$

Def. A metric space is **separable** if it contains a set which is countable and dense.

Def 4.3: Let H be a separable Hilbert space.
We call **Hilbert basis** of H an orthonormal system of vectors (finite or infinite) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which is total.

So $(e_n)_n$ is a Hilbert base if $(e_n, e_m) = \delta_{m,n}$ and $\overline{Vect\left((e_n)_n\right)} = H$.

Orthonormal (Hilbert) bases

Theorem 4.3:
Every separable Hilbert space admits an orthonormal basis.
Proof. $\to$ blackboard

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H. On en extrait par récurrence sur n un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est-à-dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à la suite f_n. Celà veut dire qu'on pose par récurrence

$$g_1 = f_1, \quad g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (f_{n+1}, g_k) \frac{g_k}{||g_k||^2},$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{||g_n||}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total, puisque les e_n engendrent les f_n.

Orthonormal (Hilbert) bases - Parseval

Theorem 4.4: Let H be a separable Hilbert space, and $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal base of H. Then:

1. All the elements $f \in H$ can be expressed as:

$$f = \sum_n (f, e_n)e_n = \sum_n c_n(f)e_n.$$

2. The coordinates c_n over the base verify the Parseval identity:

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n(f)|^2.$$

3. And reciprocally, if c_n is a sequence such that $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ then the serie $\sum_n c_n e_n$ converge to an element $f \in H$ which verifies $c_n = (f, e_n)$.

Proof. $\rightarrow$ blackboard

Orthonormal (Hilbert) bases - Parseval

Démonstration On pose $f_m = \sum_1^m c_n(f)e_n$. On vérifie que $(f - f_m, e_n) = 0$ pour $n \leq m$. Par le théorème 5.1 des projections, cela veut dire que f_m est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Par la relation (5.3) et le théorème de Pythagore, on déduit que $||f_m||^2 \leq ||f||^2$. Toujours par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\boxed{||f_m||^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2,} \tag{5.7}$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f)e_n$ est convergente dans H (proposition 5.2). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n \leq m$, on voit que $(f_m - g, e_n) = 0$ et en passant à la limite quand $m \to \infty$, on obtient $(f - g, e_n) = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul.

Separable Hilbert spaces and ℓ^2

Corollary 4.3: **Every separable Hilbert space H is isomorphic and isometric to $\ell^2(\mathbb{N})$.**

Proof: *Associating the coordinates $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ of a vector $f \in H$ to a sequence $c \in \ell^2(\mathbb{N})$. Because of Parseval identity, the two representations are isometric. Moreover, computing the the inner product reduces to:*

$$(f,g) = (\sum_n c_n(f), \overline{\sum_n c_n(g)}) = \sum_m \sum_n c_m(f)\overline{c_n(g)}\delta_{m=n} = \sum_n c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

Weak convergence

Def 4.4: A sequence u_n in a Hilbert space H is said to **converge weakly** to $u \in H$ if $(v, u_n) \to (v, u)$ for all v in H.
We denote $u_n \rightharpoonup u$.

Proposition 4.3: If $u_n \in H$ is a bounded sequence ($\|u_n\| \leq C$) in a separable Hilbert space H, then there exists a **sub-sequence** $(u_{n_k})_k$ which **converges weakly**

$$\forall v \in H, \quad (u_{n_k}, v) \to (u, v)$$

and

$$\|u\| \leq \liminf_n \|u_n\|.$$

Proof. $\to$ blackboard

Weak convergence

Démonstration On utilise l'isomorphisme avec $l^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par commodité on notera encore u_n une sous-suite de u_n extraite par un procédé d'extraction diagonale de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $(u_n, e_k) \to x_k$. Ceci est possible car par le théorème de Cauchy-Schwartz, $|(u_n, e_k)| \leq ||u_n|| \leq C$ est borné. Pour plus de détails sur le procédé d'extraction diagonale, voir le théorème 1.6. En appliquant le lemme de Fatou à la suite de suites (u_n, e_k), $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_k x_k^2 \leq \liminf_n \sum_k |(u_n, e_k)|^2 = \liminf_n ||u_n||^2 \leq C^2.$$

Posons $u = \sum_k x_k e_k$. Alors $u \in H$ et

$$||u||^2 = \sum_k |x_k|^2 \leq \liminf_n ||u_n||^2.$$

Finalement montrons que $(u_n, v) \to (u, v)$ pour tout $v \in H$. C'est immédiat quand v est une combinaison linéaire finie des e_n et donc pour v dans un sous-ensemble dense D de H. Prenons maintenant v quelconque dans H. On fixe ε, puis $w \in D$ tel que $||v - w|| \leq \varepsilon$. On a $|(u_n - u, v)| \leq |(u_n - u, w)| + |(u_n - u, w - v)|$. Le premier terme est petit pour n grand. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire, le second est plus petit que $2C\varepsilon$. ◦

Weak convergence

Remark: **Weak convergence of orthonormal bases.**
Let e_n be a Hilbert base of H. Then $e_n \rightharpoonup 0$.

$\forall x \in H$ we have by Parseval: $\sum_n |(e_n, x)|^2 = \|x\|^2 < \infty$ then $|(e_n, x)|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercise 4 Let $H = L^2(0, 2\pi)$, and $u_n(x) := \sin(nx)$.
Show that u_n weakly converges to 0 in H,
but does not converge in norm $L^2([0, 2\pi])$ to 0.

Exercise 4 solution:

Converge in the L^2 sense. The best candidate for a limit is the null function because $\sin nx$ is oscillating, we'll see that this limit is not attained in the L^2 sense:

$$\|\sin nx\|^2 = \int_0^{2\pi} |\sin nx - 0|^2 dx = \frac{1}{n}\int_0^{n2\pi} |\sin y|^2 dy = \pi.$$

Weak convergence.

• If $f \in C^1(0, 2\pi)$, then there exists K such that $|f(x)| \leq K$ and $|f'(x)| \leq K$ in $[0, 2\pi]$ (due to the compact support) and then:

$$(f, \sin nx) = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \left(\frac{-f(x)\cos nx}{n} \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x) \underbrace{\cos nx}_{\leq 1} dx$$

$$\leq \frac{1}{n}\underbrace{(-f(2\pi) + f(0))}_{\leq 2K} + \frac{1}{n}\underbrace{\|f'\|\|\cos nx\|}_{\leq 2\pi\sqrt{K}} = \frac{2}{n}(K + \pi\sqrt{K}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• Since C^1 is dense in $L^2(0, 2\pi)$ then for any $g \in L^2(0, 2\pi)$ there exists $f \in C^1(0, 2\pi)$ s.t. $\|g - f\| \leq \varepsilon$. Then we have the weak convergence of the sequence $u_n := \sin nx$:

$$|(g, u_n)| \leq |(g-f, u_n)| + |(f, u_n)| \leq \underbrace{\|g - f\|}_{\leq\varepsilon}\underbrace{\|u_n\|}_{\sqrt{\pi}} + \underbrace{|(f, u_n)|}_{\to 0} \to 0 \quad \forall g\,, \forall u_n.$$

Haar Wavelets

Décomposition d'images sur la base de Haar Nous nous plaçons dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nous considérons tout d'abord la fonction de $L^2(\mathbb{R})$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.8}$$

Nous définissons ensuite $I(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}$, puis les trois fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H_1(x,y) = H(x)I(y)\ ,\ H_2(x,y) = I(x)H(y) \text{ et } H_3(x,y) = H(x)H(y).$$

Enfin nous définissons

$$H^k_{i,j_1,j_2}(x,y) = 2^k H_i(2^k x - j_1, 2^k y - j_2), \quad k, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3.$$

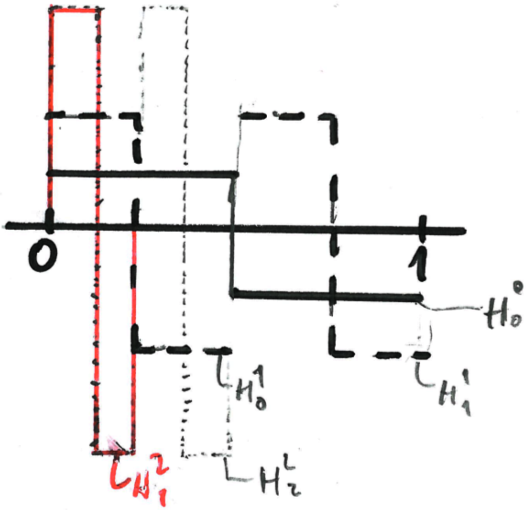
On peut montrer (voir l'exercice 7) que ces fonctions forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Donc si pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nous définissons les coefficients

$$c^k_{i,j_1,j_2}(f) = \langle f, H^k_{i,j_1,j_2} \rangle,$$

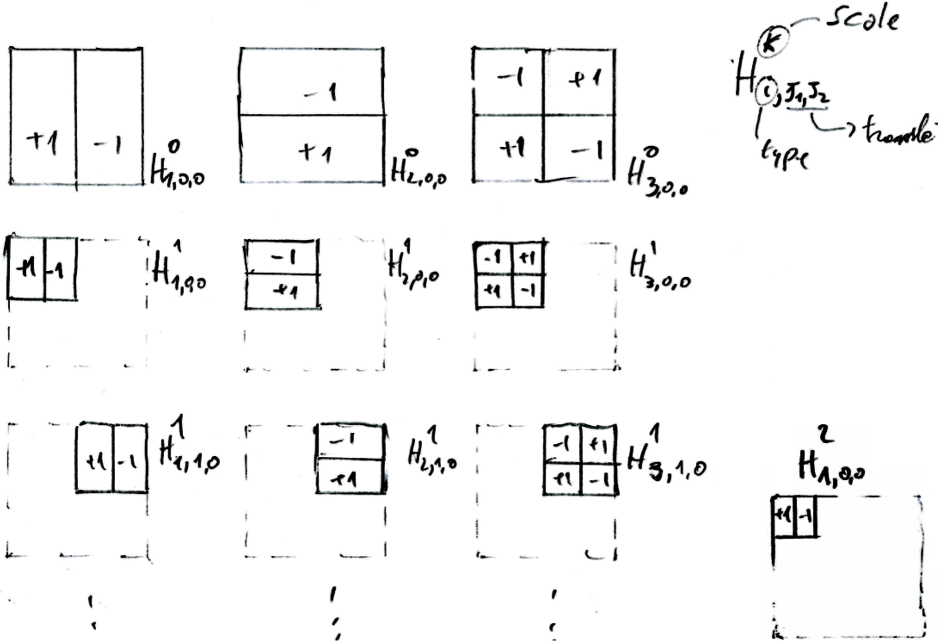
alors

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}} c^k_{i,j_1,j_2}(f) H^k_{i,j_1,j_2}$$

Haar Base - 1D



Haar Base - 2D



Haar Wavelets - Application to image compression

k=8

k=7

Haar Wavelets - Application to image compression

Figure 5.2: Exemple de compression d'images dans une base hilbertienne. A gauche, l'image originale (même image que figure 5.1), à droite l'image obtenue en ne gardant que 10% des coefficients dans la base de Haar (voir la formule (5.10)).

Haar Wavelets - Application to image compression