Hilbert and Fourier analysis
C4

M. Delbracio & G. Facciolo

Today's topics

- Fourier Series
  - Pointwise convergence of Fourier series
  - Fourier as a Hilbert base
  - Convergence in norm of Fourier series
  - Convolution of periodic functions
  - Other Fourier bases

Fourier Series

- Let us consider the hermitian Hilbert space $L^2(-\pi, \pi)$.
- We'll show that the orthonormal system $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}}$ is a Hilbert base of $L^2(-\pi,\pi)$, we call it **Fourier base.**
- Then, any $f \in L^2(-\pi, \pi)$ can written as a Fourier series

$$\boxed{f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}, \quad \text{with} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.}$$

- And we will show that this series converge to f in the L^2 sense.
- $c_n(f)$ are the **Fourier coefficients of** f, they are proportional to the coordinates of f over the Fourier base.

Fourier Series

Lemma 5.1: **(Riemann-Lebesgue)**

For $f \in L^1(\mathbb{R})$ we write: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

(i) If $f \in C_c(\mathbb{R})$ is k times differentiable with $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, then

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

(ii) If $f \in L^1(\mathbb{R})$ then $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iax} dx \xrightarrow{|a| \to \infty} 0$ with $a \in \mathbb{C}$.

This is also valid for the Fourier coefficients c_n,
if $f \in L^1(-\pi, \pi)$ then $\lim_{|n| \to \infty} c_n(f) = 0$.

Proof $\to$ blackboard

Remark: Note that if $f \in L^2(-\pi, \pi)$ then $c_n(f) \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$.

We can state this since c_n are interpreted as the coordinates over an orthonormal system. We don't know (yet) if the Fourier system is Hilbert base, but as orthonormal it satisfies Bessel's inequality (Thm 4.4) so the sum $\sum |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_{L^2} < \infty$ converges and $c_n(f) \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$.

Fourier Series

Lemma 5.1: (Riemann-Lebesgue)
For $f \in L^1(\mathbb{R})$ we write: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

1. If $f \in C_c(\mathbb{R})$ is k times differentiable with $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, then $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}$.
2. If $f \in L^1(\mathbb{R})$ then $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iax} dx \overset{|a|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ with $a \in \mathbb{C}$.

Démonstration i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant $\hat{f}$, on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\hat{f}(\xi)| = |\frac{1}{(i\xi)^k} \int f^{(k)}(x) e^{-ix\xi} dx| \leq \frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Soit f_n une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact qui tendent vers f dans L^1 (proposition 3.4). On a, pour n fixé assez grand : $||f_n - f||_1 \leq \varepsilon$, ce qui implique $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour tout ξ. En utilisant (i), on voit que $|\hat{f}_n(\xi)| \to 0$ quand n est fixé et $|\xi| \to \infty$. Donc $|\hat{f}_n(\xi)| \leq \varepsilon$ pour ξ assez grand. Finalement,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

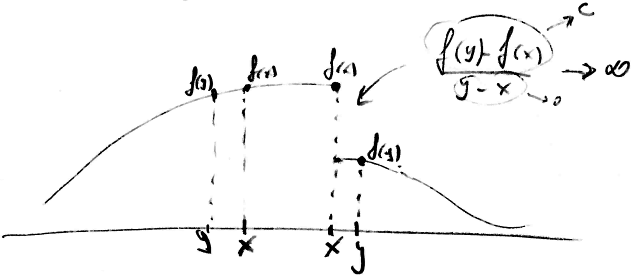
pour ξ assez grand. ○

Pointwise convergence of Fourier Series

Proposition 5.1: **(Localization principle)**

If $f \in L^1(-\pi,\pi)$ and $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ is integrable in a neighborhood of x.
Then: $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, with $S_N f(x) := \sum_{|n|\le N} c_n(f) e^{inx}$.

Proof → blackboard



Pointwise convergence of Fourier Series

Proposition 5.1: (Localization principle)

If $f \in L^1(-\pi,\pi)$ and $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ is integrable in a neighborhood of x.
Then: $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, with $S_N f(x) := \sum_{|n|\le N} c_n(f) e^{inx}$.

Proof → blackboard

Démonstration **Etape 1** On se ramène au cas $f(x)=0, x=0$.
Supposons la proposition démontrée pour $x=0$, $f(x)=0$. Soit maintenant $g \in L^1(-\pi,\pi)$ telle que $\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ soit intégrable au voisinage de x. Alors on pose $f(y) = g(x+y)-g(x)$. On a bien $f(0)=0$ et $\frac{f(y)}{y} = \frac{g(x+y)-g(x)}{y}$ est intégrable au voisinage de 0. Donc, par hypothèse, $s_N f(0) \to f(0) = 0$. Mais

$$s_N f(0) = \sum_{|n|\le N} c_n(g(x+y)-g(x)) = \sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x+y)-g(x))e^{-iny}dy$$

$$= (\sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-in(z-x)}dz) - g(x) = (\sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}dz) - g(x)$$

$$= s_N g(x) - g(x).$$

Donc $s_N g(x) \to g(x)$. En fait, l'argument précédent montre que s_N commute avec les translations :

$$s_N[g(.+x)] = (s_N g)(.+x).$$

Pointwise convergence of Fourier Series

Proposition 5.1: **(Localization principle)**

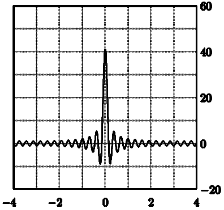
If $f \in L^1(-\pi, \pi)$ and $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ is integrable in a neighborhood of x.
Then: $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, with $S_N f(x) := \sum_{|n|\le N} c_n(f) e^{inx}$.

Proof $\rightarrow$ blackboard

Etape 2 On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin\frac{y}{2}}dy. \tag{5.1}$$

En effet, $\sum_{-N}^{N} e^{iky} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin\frac{y}{2}}$, ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique (noyau de Dirichlet).



Dirichlet Kernel D_{20}

Pointwise convergence of Fourier Series

Proposition 5.1: (Localization principle)

If $f \in L^1(-\pi, \pi)$ and $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ is integrable in a neighborhood of x.
Then: $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, with $S_N f(x) := \sum_{|n|\leq N} c_n(f) e^{inx}$.

Proof → blackboard

Etape 3 Par l'étape 1 il suffit de montrer que si $f \in L^1(-\pi,\pi)$ et si $\frac{f(y)}{y}$ est intégrable autour de 0, alors $s_N f(0) \to 0$. Comme sur $[-\pi,\pi]$, $|\sin\frac{y}{2}| \geq \frac{|y|}{\pi}$, on a

$$\left|\frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}}\right| \leq \frac{\pi|f(y)|}{|y|} \in L^1(-\pi,\pi).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $\frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}}$. On conclut que l'intégrale de (5.1) définissant $s_N f(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. ◦

Pointwise convergence of Fourier Series

Corollary 5.1:

(i) If $f \in L^1(-\pi,\pi)$ is **Hölderian at x with exponent** $0<\alpha\leq 1$ (that is $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$), then $S_N f(x) \to f(x)$.

(ii) Otherwise if f is primitive over $[-\pi,\pi]$ of a function $g \in L^2(-\pi,\pi)$, then also $S_N f(x) \to f(x)$.

Proof $\to$ blackboard

Démonstration L'application du principe de localisation est immédiate : $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leq |x-y|^{\alpha-1}$ qui est bien intégrable au voisinage de x. Soit maintenant f une fonction qui est la primitive sur $[-\pi,\pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi,\pi)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)-f(y)| = |\int_y^x f'(t)dt| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}}(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est donc Hölderienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et le principe de localisation s'applique. ∘

Convergence in Norm of Fourier Series

Corollary 5.2:

The system $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a **Hilbert base** of $L^2(-\pi,\pi)$.

And for all $f \in L^2(-\pi,\pi)$ the series $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ **converges in the L^2 sense**, with $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx$.

Proof → blackboard

Goal: show that the trigonometric polynomials $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$ form a subspace which is dense in $L^2(-\pi,\pi)$.

Convergence in Norm of Fourier Series

Corollary 5.2:

The system $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a **Hilbert base** of $L^2(-\pi,\pi)$.

And for all $f \in L^2(-\pi,\pi)$ the series $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ **converges in the L^2 sense**, with $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx$.

Proof:

- For a continuous function $f \in C_c^2(-\pi,\pi)$:
  - by the localization principle we have that $S_N f(x) \to f(x)$,$\forall x$;
  - moreover since its Fourier coefficients verify $|c_n(f)| \leq \frac{C}{n^2}$ (by Riemann-Lebesgue lemma), we can derive a uniform bound for

$$|f(x) - S_N f(x)| = |\sum_{|n|>N} c_n(f)e^{inx}| \leq C \sum_{|n|>N} \frac{1}{n^2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall x;$$

  - then $S_N f$ **converges uniformly** to f, and **also converges in** L^2.

- The functions $C_c^\infty(-\pi,\pi)$ are dense in $L^2(-\pi,\pi)$ (Prop. 3.4), therefore the trigonometric polynomials are dense in $L^2(-\pi,\pi)$, and we conclude that the Fourier system is total, and therefore a Hilbert base.

Convolution of periodic functions

The representation of a function in $L^2(-\pi,\pi)$ as a **Fourier series implies its periodization**.

We denote $L^2_{per}(\mathbb{R})$ the set of functions in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ which are 2π-periodic. Therefore every function in $L^2(-\pi,\pi)$ has a unique representant in $L^2_{per}(\mathbb{R})$.

Def 5.1 and Proposition:

The **convolution** of $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ is defined as:

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)f(y)dy$$

where f and g are prolonged by 2π-periodization.
The function $f * g$ is in $L^1(-\pi,\pi)$ and is 2π-periodic.

Fundamental theorem of signal processing

Exercise 2. **Thm 3.9 (Universality of the convolution)**

Let $L^2_{per}(-\pi,\pi)$ equipped with the L^2-norm and $C^0_{per}(-\pi,\pi)$ equipped with the L^∞-norm.

Let $T : L^2_{per}(-\pi,\pi) \to C^0_{per}(-\pi,\pi)$ be a continuous linear operator, which is translation invariant (that is: $T(\tau_x f) = \tau_x T(f)$), where τ_x denotes the translation by x : $(\tau_x f)(y) = f(y-x)$).

Then there exist a unique $g \in L^2(-\pi,\pi)$ such that $T(f) = g * f$.

Proof $\to$ blackboard

Convolution of periodic functions

Theorem 5.2:

(i) If $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, then $f * g$ **is continue** and $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f) c_n(g)$.

(ii) And the Fourier series for $f * g$ **converges uniformly** to $f * g$.

Proof $\rightarrow$ blackboard

Démonstration i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f*g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}.$$

Donc $f*g$ est majorée et appartient aussi à $L^2(-\pi,\pi)$. On a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur $[-\pi,\pi]$ ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) :

$$c_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int\int f(x-y)g(y)e^{-inx}dydx = \frac{1}{2\pi}\int\int f(x-y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny}dydx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\int g(y)e^{-iny}dy\Big)\Big(\int f(u)e^{-inu}du\Big) = 2\pi c_n(f)c_n(g).$$

Le terme général de la série de Fourier de $f*g$ vérifie

$$|c_n(f*g)e^{inx}| = |c_n(f)||c_n(g)| \leq |c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2.$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de $f*g$, $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(f*g)e^{inx}$, est donc uniformément convergente. Sa F limite est donc continue. Donc d'une part F_N tend vers $f*g$ dans L^2 et donc par la réciproque du théorème de Lebesgue une sous-suite tend vers cette fonction presque partout. De l'autre F_N tend uniformément vers F. On en déduit que $f*g = F$ presque partout et on en déduit aussi que $f*g$ est égale presque partout à une fonction continue (et donc peut être appelée continue). ∘

Convergence summary

The Fourier series $S_N f$ of a function f:

- Converges Pointwise
  - when $f \in L^1(-\pi, \pi)$, at points where it is "regular" (by the localization principle). Recall that $L^1(-\pi, \pi) \supseteq L^2(-\pi, \pi)$.
  - when $f \in L^1(-\pi, \pi)$, at points where it is Hölderian $0 < \alpha \leq 1$.
  - $\forall x$ when f is a primitive of $g \in L^2(-\pi, \pi)$.
  - **almost everywhere**, when $f \in L^2(-\pi, \pi)$.
- Converges in Norm (L^2)
  - when $f \in L^2(-\pi, \pi)$.
- Converges Uniformly
  - when f is C^2 in $(-\pi, \pi)$.
  - if $f = g * h$ for $g, h \in L^2(-\pi, \pi)$.

Riemann-Lebesgue, if $f \in L^1$ then $c_n(f) \to 0$ with $n \to \infty$.

Exercise 3

Exercice 3 Transformée de Fourier discrète et transformée inverse.
La transformée de Fourier discrète est l'application de $L^2([-\pi,\ \pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$ qui associe à une fonction u la suite de ses coefficients de Fourier $c(f) = (c_k(u))_{k\in\mathbb{Z}}$. la transformée inverse est la série de Fourier associée à $c \in l^2(\mathbb{Z})$, notée

$$S(c)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

On a donc $S(c(f)) = f$, ce qui constitue une *formule d'inversion de Fourier*. Si $a,\ b \in l^2(\mathbb{Z})$, on note ab le produit terme à terme, défini par $(ab)_k = a_k b_k$.

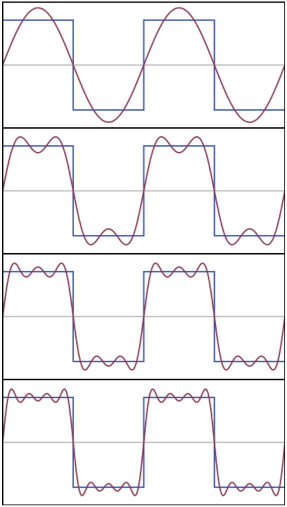
1) Avec le formalisme précédent, vérifier que $S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b)$.

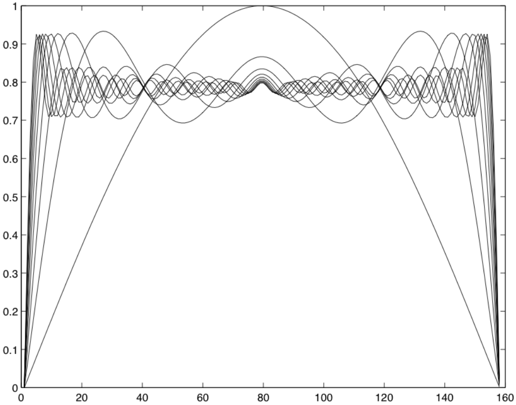
2) Cette formule nous permet de mieux comprendre. La démonstration que nous avons donnée pour le principe de localisation. Considérons le "filtre passe-bas" $b^N \in l^2(\mathbb{Z})$ défini par $b_k^N = 1$ si $|k| \leq N$, $b_k^N = 0$ sinon. Calculer $S(b^N)$.

3) En déduire que la série de Fourier tronquée de f, $s_N f$, est obtenue par convolution 2π-périodique de f avec ce qu'on appelle le noyau de Dirichlet, $s_N f = h_N * f$, où

$$h_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin\frac{y}{2}}.$$

Exercise 3





Other Fourier bases

Corollary 5.3: (Sine and Cosine bases)

(i) Let us consider the interval $T > 0$, and let $\omega = \frac{2\pi}{T}$ be the base frequency associated to it. Then the functions

$$\frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

are a Hilbert base of $L^2(0, T)$; and as well:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\frac{2k\pi t}{T}), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\frac{2k\pi t}{T}) \quad k = 1, 2, \ldots$$

(ii) Are also bases of $L^2(0, T)$:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\frac{2k\pi t}{T}) \quad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{(Cosine base)}$$

and: $$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\frac{2k\pi t}{T}) \quad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{(Sine base)}$$

Proof → blackboard