Session 5: Histogramas y Cuantizacion

Histogramas:

- Conceptos de estadistica
- Cambios de contraste
- Ecualizacion de histogramas

Cuantización:

- Medidas de distorsion
- Cuantificadores Optimos
- Consecuencias

Conceptos de Estadistica

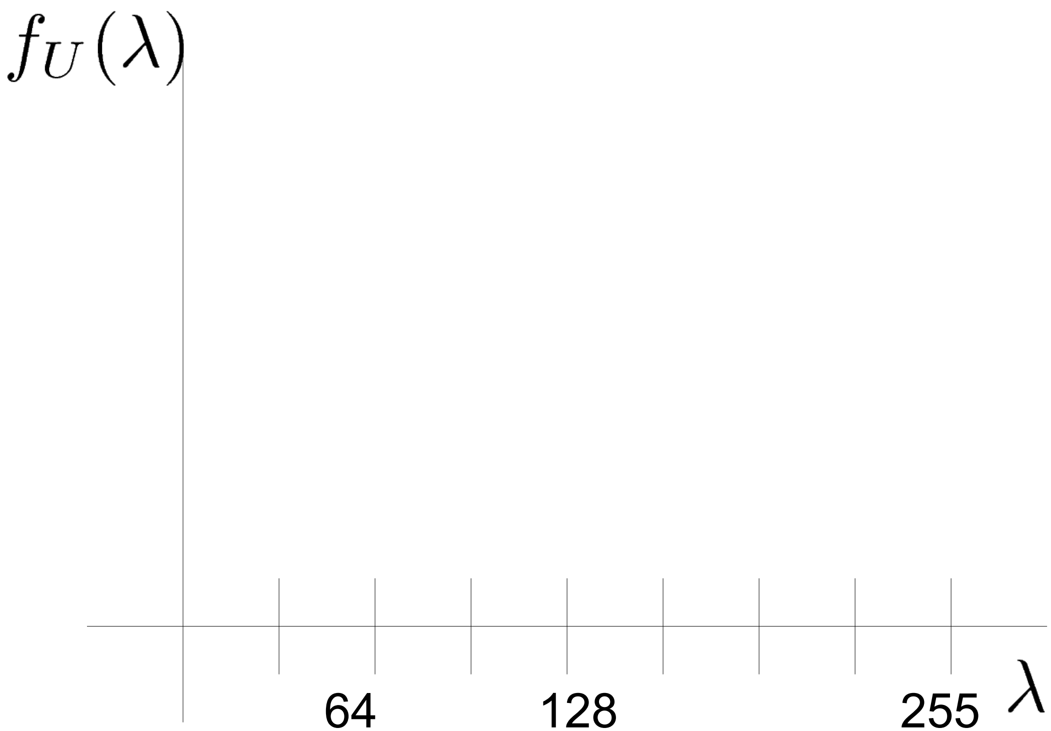
En la pizarra

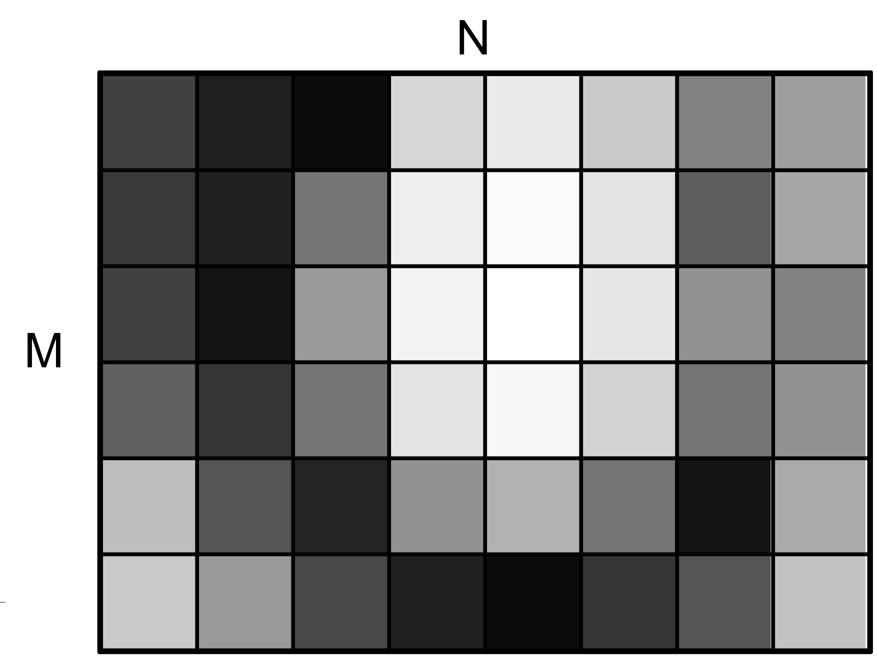
Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \rightarrow \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \rightarrow 0, \cdots, L-1$



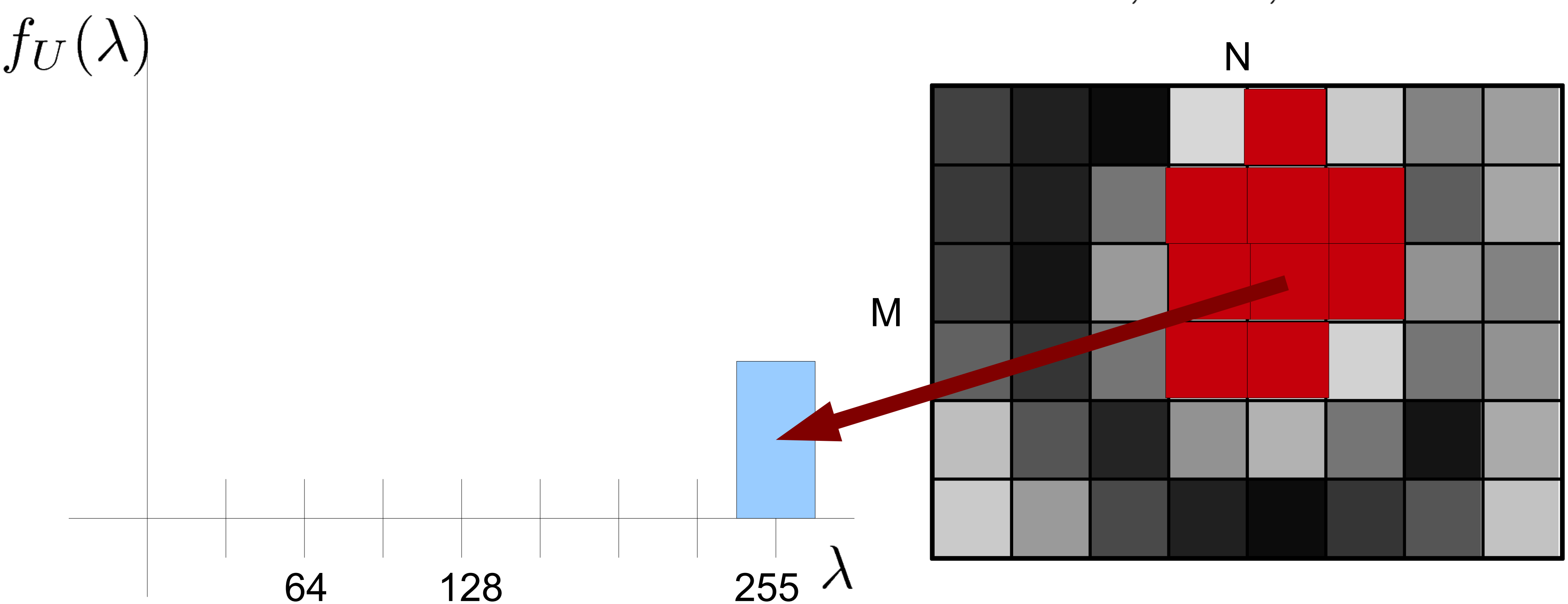


Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \to \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \to 0, \cdots, L-1$

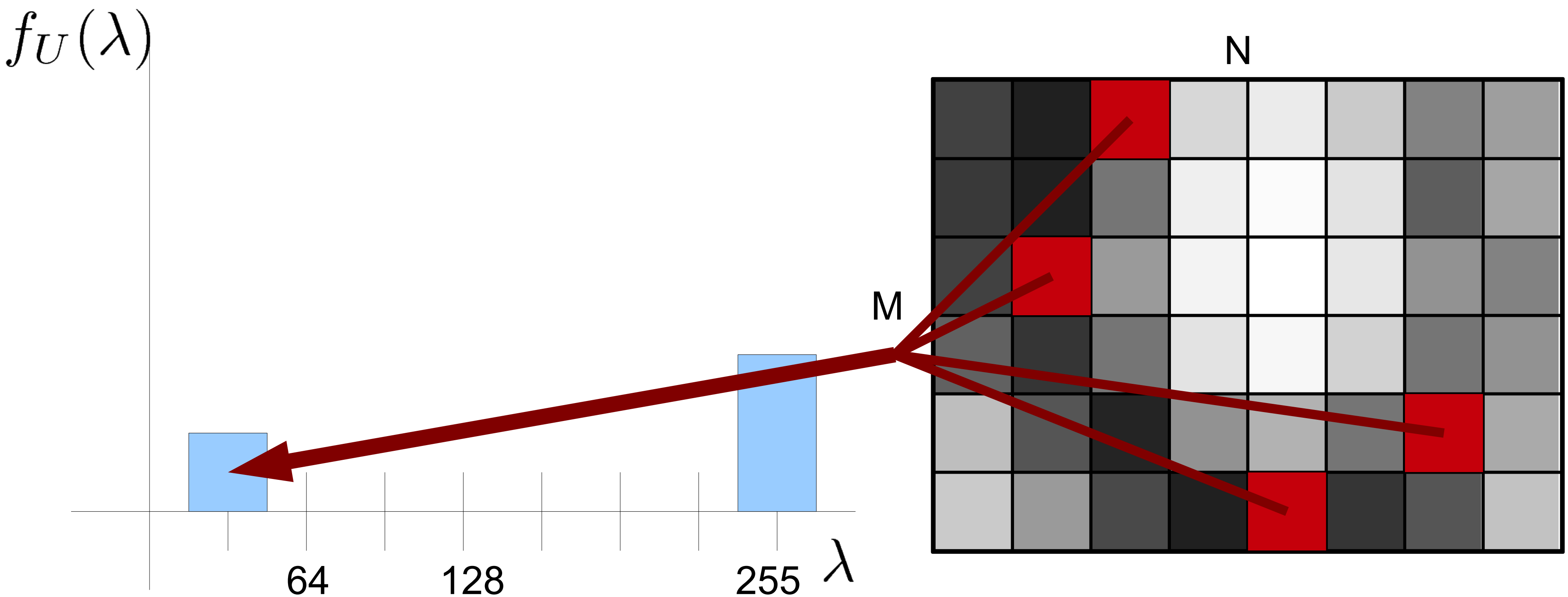


Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \rightarrow \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \rightarrow 0, \cdots, L-1$

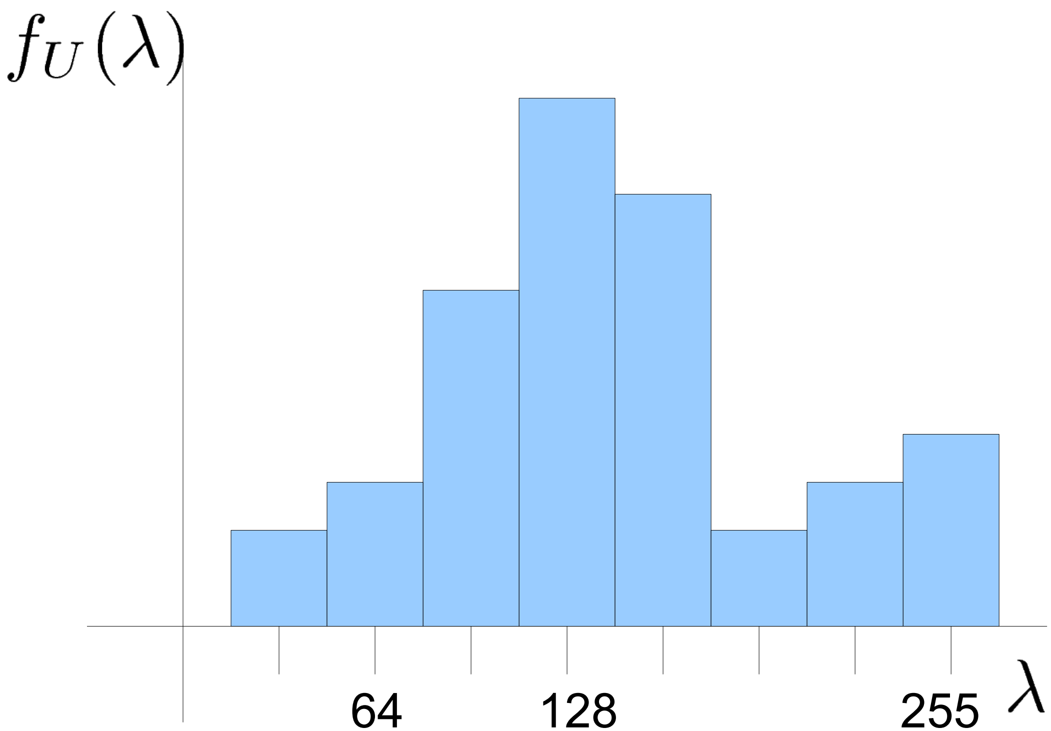


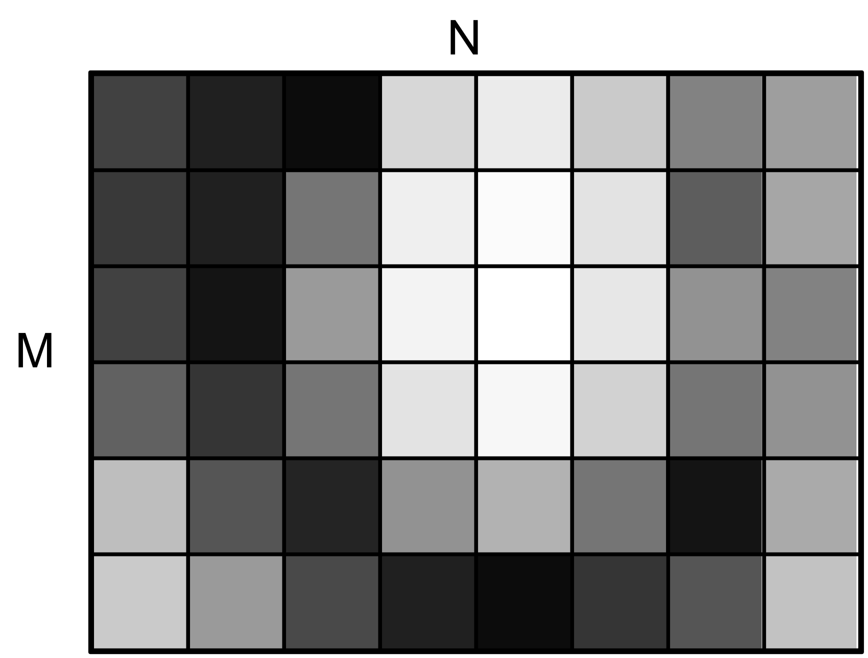
Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \rightarrow \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \rightarrow 0, \cdots, L-1$





Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \to \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \to 0, \cdots, L-1$

- Funcion de densidad (histograma) :

$$f_U(\lambda) = P(U = \lambda) = \frac{\#\text{ pixels (m,n), t.q. } u(m,n) = \lambda}{MN}$$

- Funcion de distribucion (histograma acumulado):

$$F_U(\lambda) = \sum_{\lambda' \leq \lambda} P(U = \lambda') = \frac{\#\text{ pixels (m,n), t.q. } u(m,n) \leq \lambda}{MN}$$

Histogramas (en imagenes)

$$u : \{0, \cdots, M-1\} \times \{0, \cdots, N-1\} \rightarrow \{0, \cdots, L-1\}$$

$u(m,n)$ Imagen MxN, con $L = 256$ niveles de gris

Interpretamos el nivel de gris de c/pixel como la realizacion de una VA : $U : \Omega \rightarrow 0, \cdots, L-1$

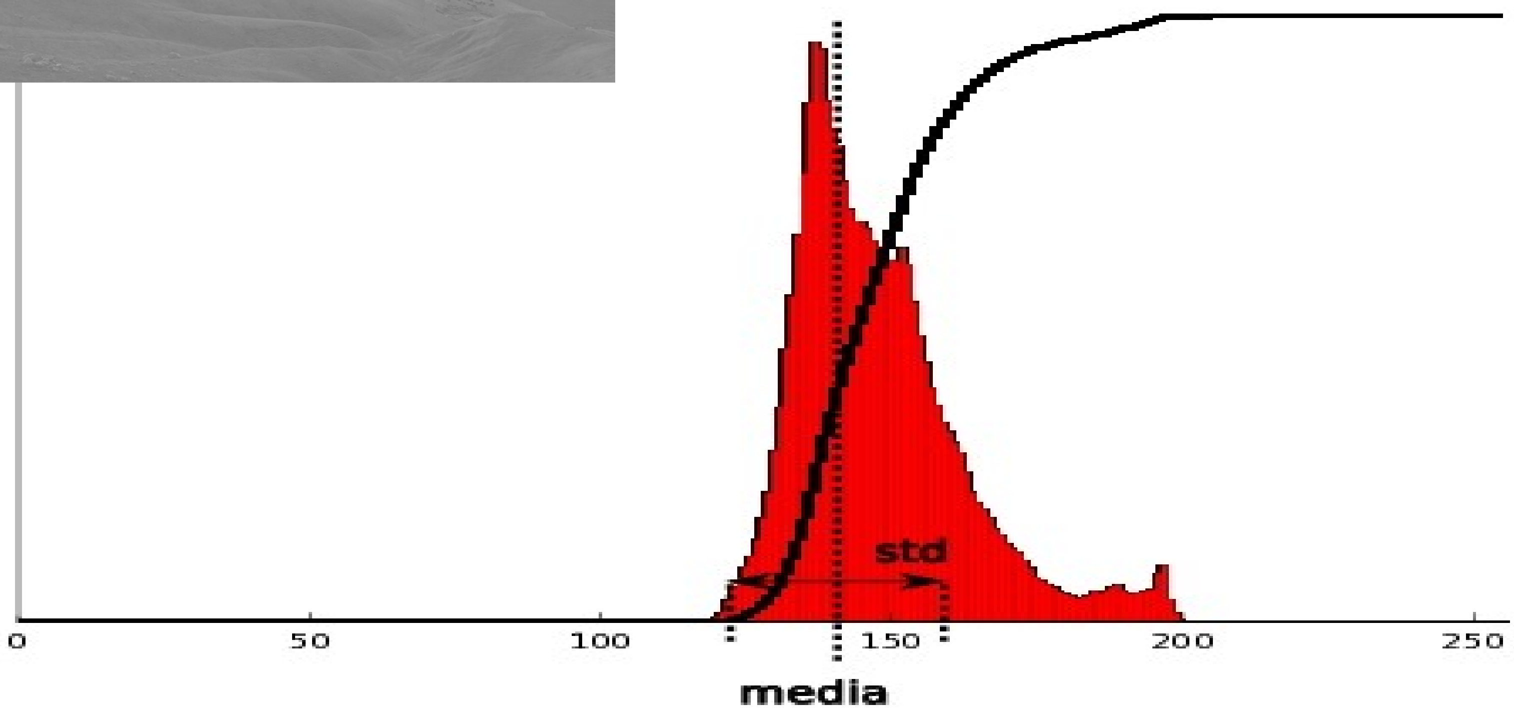
- Valor medio de U

$$\bar{u} = \frac{1}{MN} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} u(i,j) = \sum_{k=0}^{L-1} \lambda_k P(U = \lambda_k)$$

- Varianza de U

$$\sigma_U^2 = \frac{1}{MN} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (u(i,j) - \bar{u})^2 = \sum_{k=0}^{L-1} (\lambda_k - \bar{u})^2 P(U = \lambda_k)$$

Histogramas

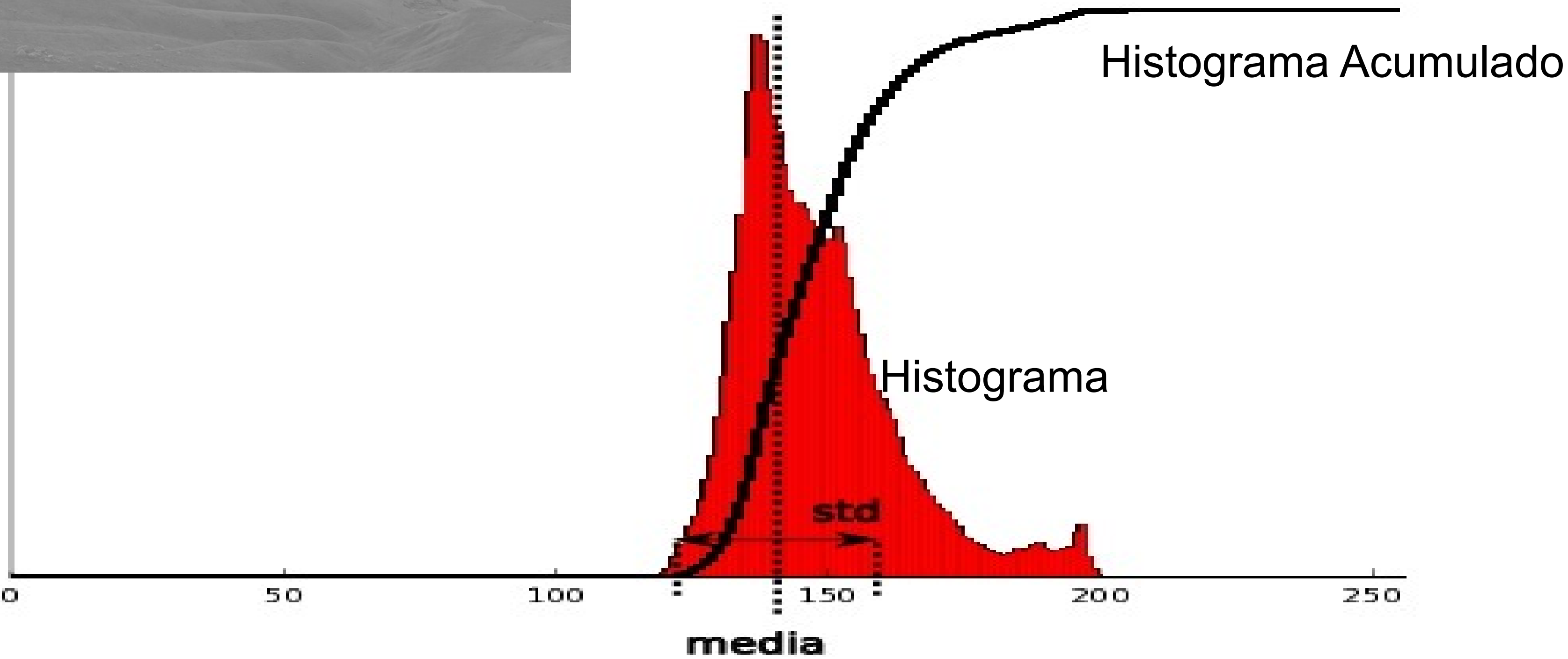


Histogramas

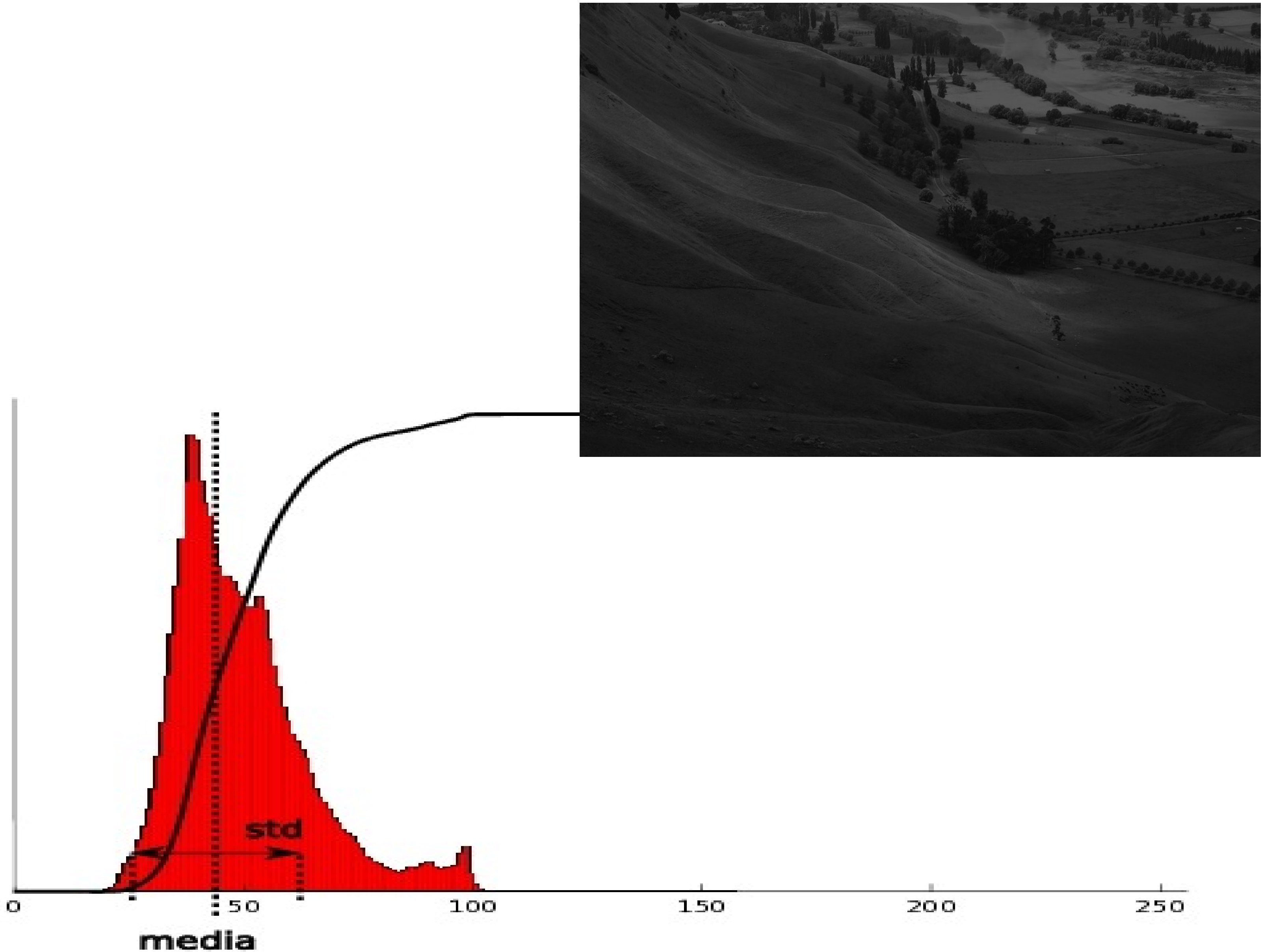
ATENCION!

Los 2 histogramas estan superpuestos solamente para facilitar su visualizacion, pero <u>ESTAN A ESCALAS DISTINTAS</u>.

El histograma para esta imagen en particular tiene como valor maximo 0.037.
Mientras que el acumulado SIEMPRE tiene su maximo en 1.



Histogramas



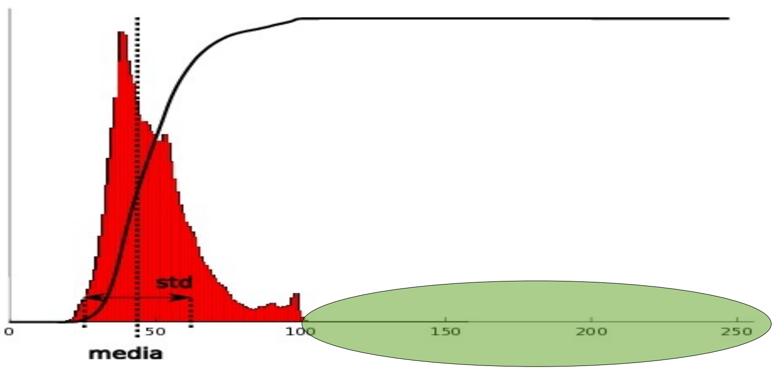
Cambio de contraste

- Sea una image u(i,j). Y la funcion g (monotona) de cambio de contraste
- g convierte los valores de gris u(i,j) en v(i,j)

  $v(i,j) = g(u(i,j))$
- g, se puede graficar poniendo los niveles de la imagen original en el eje horizontal, y los nuevos niveles en el eje vertical.

Cambio de contraste Lineal

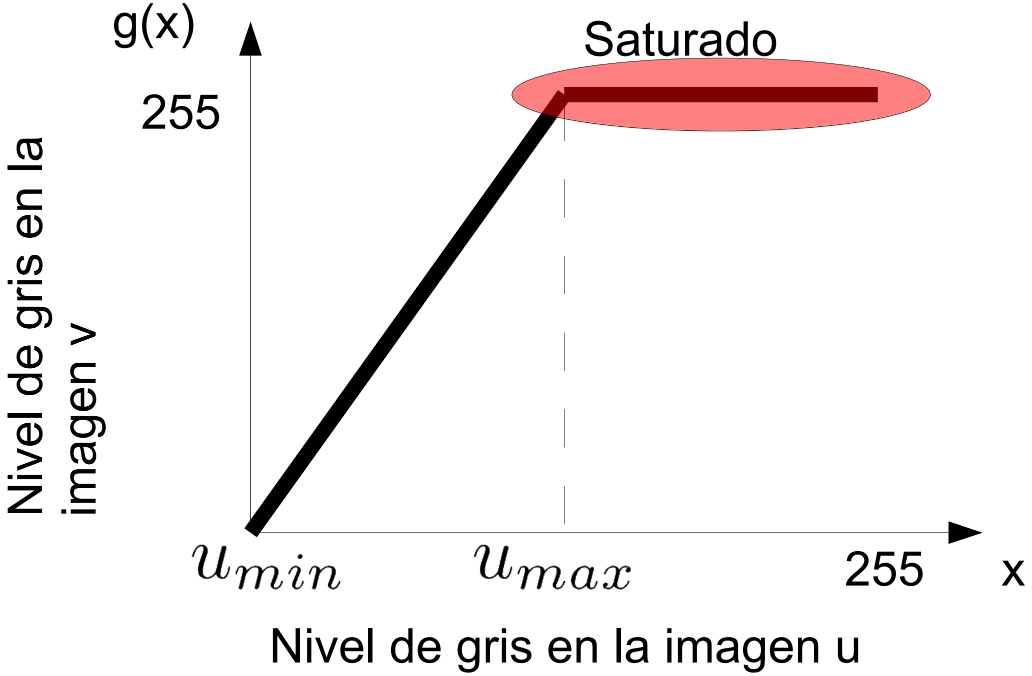
Objetivo: Aprovechar los niveles de gris que no se usan en la imagen u.

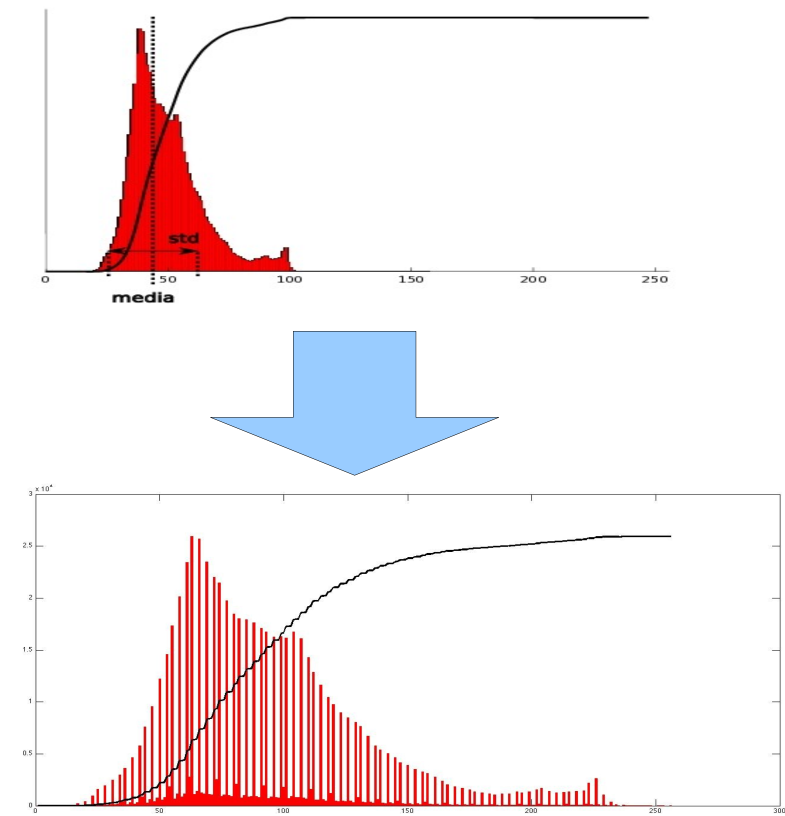


- g: funcion monotona de cambio de contraste
- v(i,j) = g(u(i,j))

Cambio de contraste Lineal

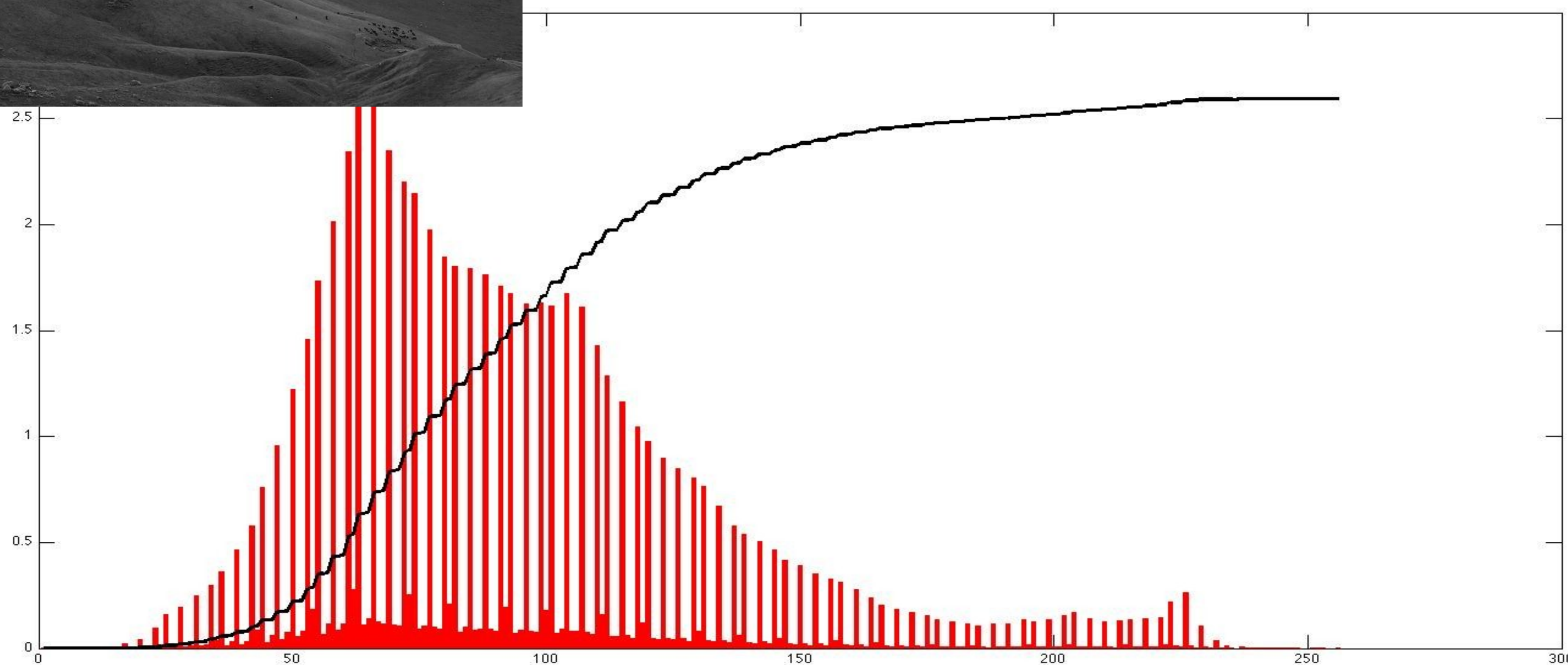
g: lineal



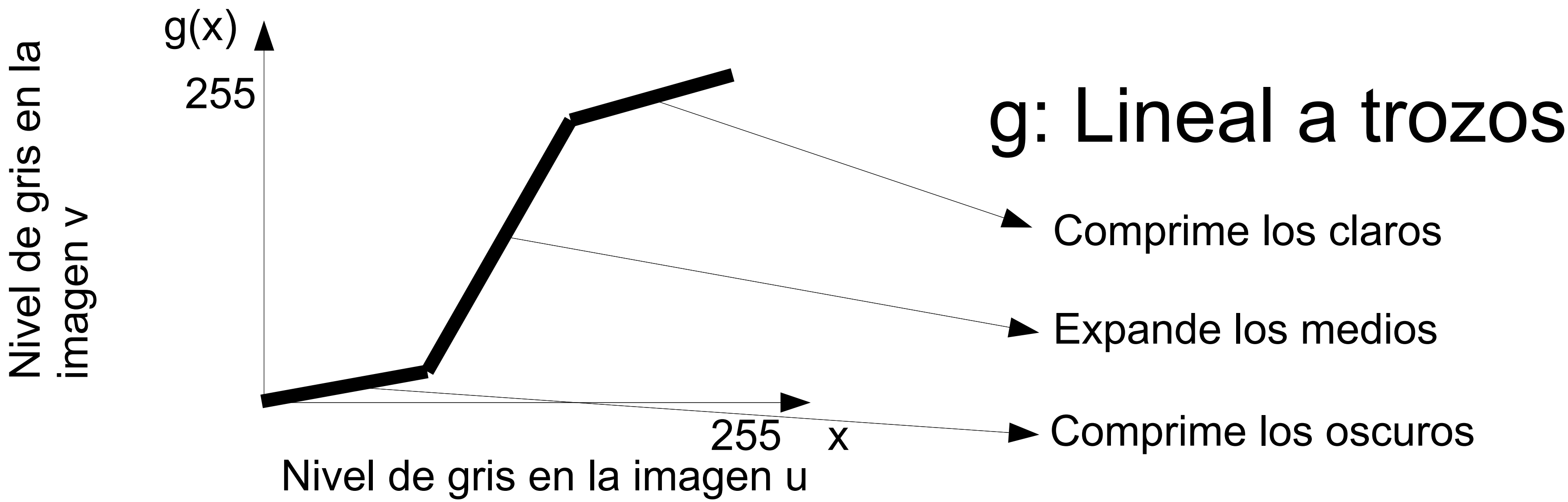


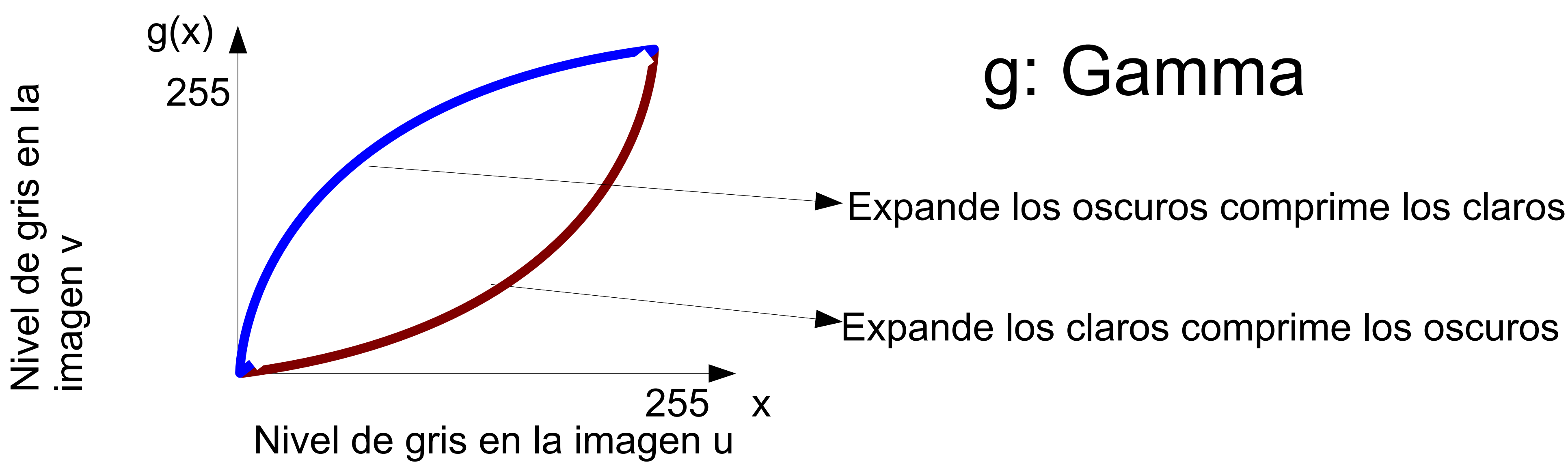
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < u_{min} \\ \frac{x - u_{min}}{u_{max} - u_{min}} L, & \text{si } u_{min} \leq x < u_{max} \\ L, & \text{si } x >= u_{max} \end{cases}$$

Cambio de contraste Lineal



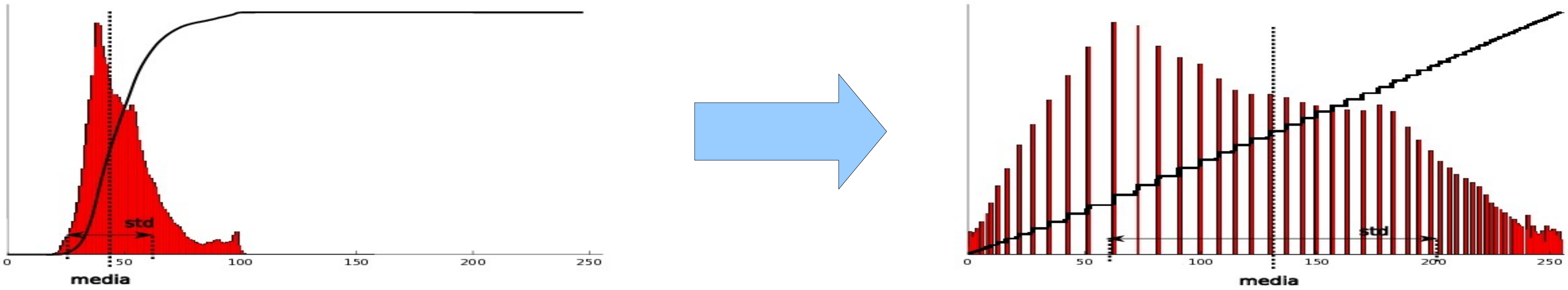
Otros Cambios de contraste





Ecualizacion de Histograma

- Se trata de <u>un cambio de contraste</u>
- El Objetivo: obtener un histograma lo más parecido posible al uniforme
- Uniforme: aprovecha todos los niveles de gris



Ecualizacion de Histograma

Proposicion:

$\text{Consideramos VA } X : \Omega \to \mathcal{R}$

$\text{con } F_X : \text{estrict. creciente. (Por tanto } \exists F_X^{-1})$

$\to Y := F_X(X) \text{ tiene distrib. uniforme en } [0,1]$

Dem: $$F_Y(\lambda) \overbrace{=}^{def} P(Y \leq \lambda) \underset{def}{=} P(F_X(X) \leq \lambda)$$

$$= P(X \leq F_X^{-1}(\lambda)) \overbrace{=}^{def} F_X(F_X^{-1}(\lambda)) = \lambda$$

Ecualizacion de Histograma (aplicado a imagenes)

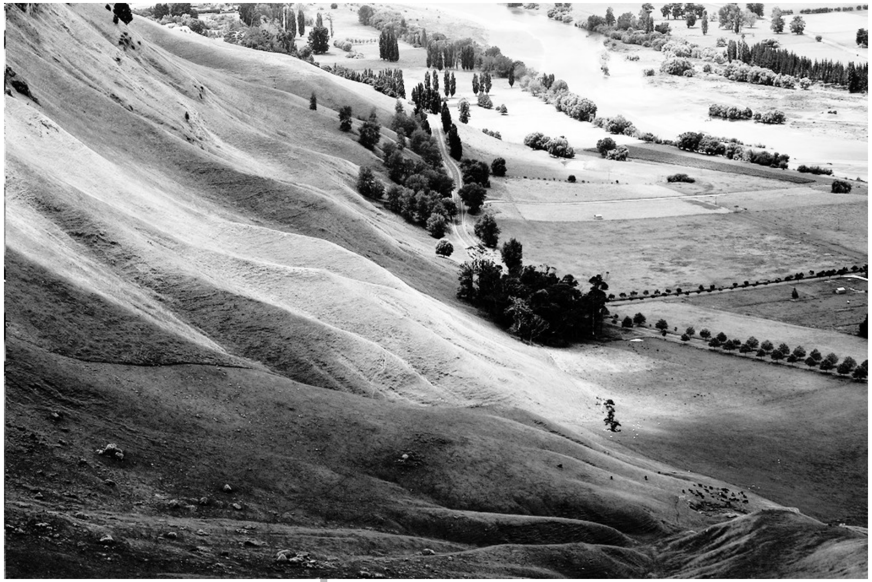
F_u : histograma acumulado de imagen u

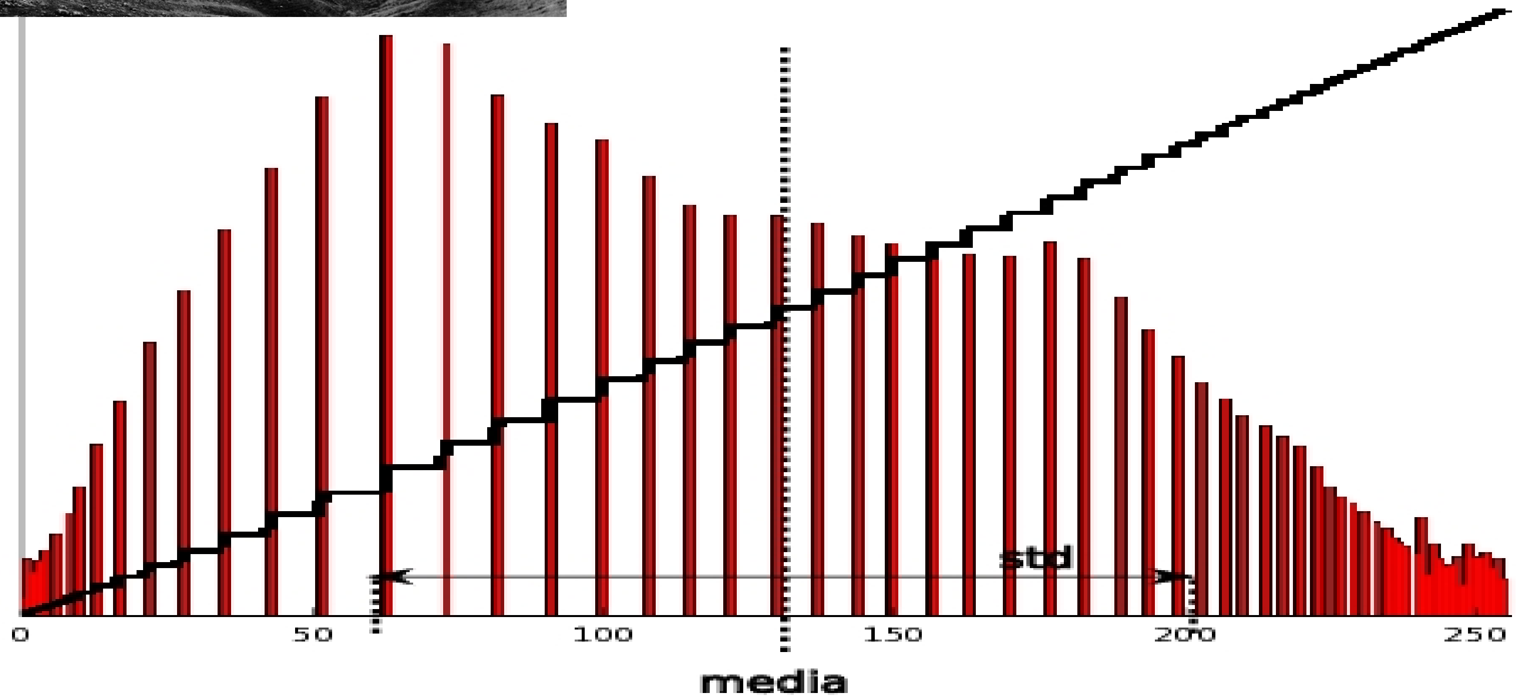
v : imagen ecualizada t.q. $v(i,j) \simeq F_u(u(i,j))$

$\rightarrow v$: tendra distrib "casi" uniforme

$$v(i,j) = \left(\frac{F_u(u(i,j)) - F_u(min(u))}{1 - F_u(min(u))} \right) (L-1) + 0.5$$

Ecualizacion de Histograma

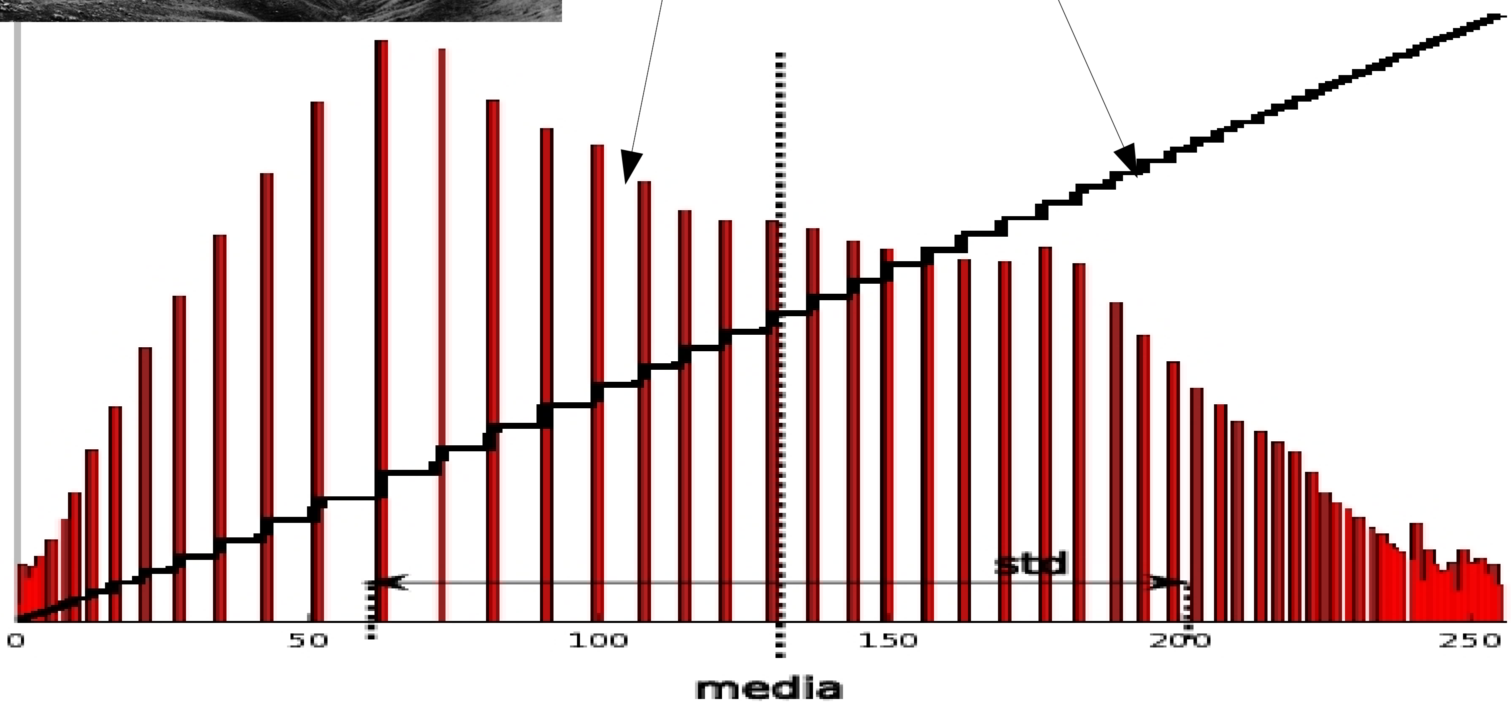




Ecualizacion de Histograma

Histograma acumulado
correspondiente a la distrib uniforme

GAP



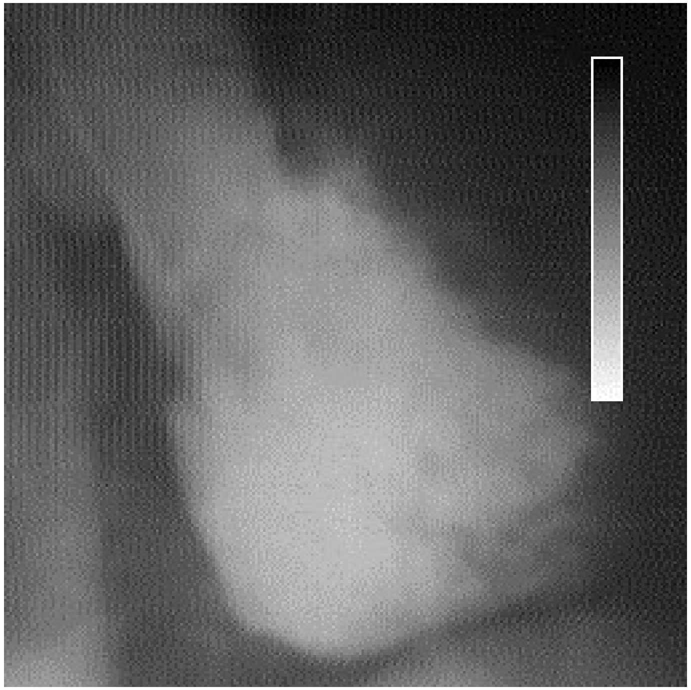
Efectos de los cambios de contraste

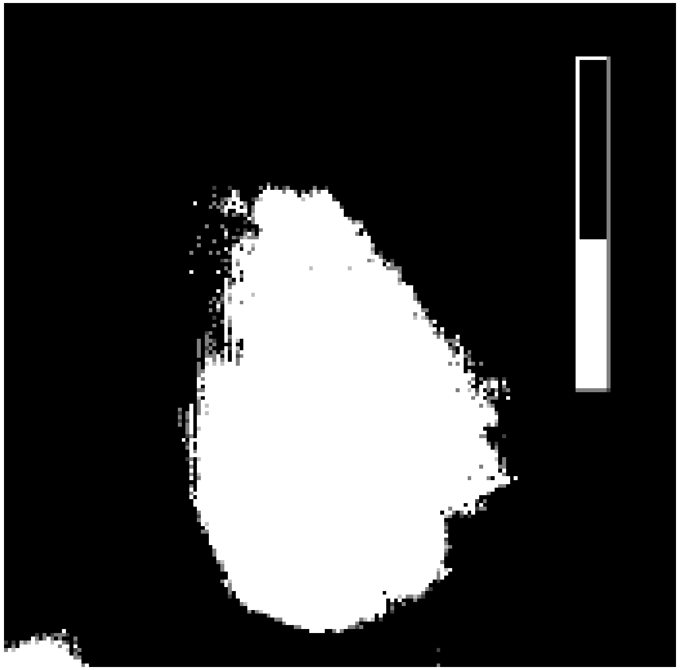
- Los histogramas de **imagenes naturales** no suelen tener muchos *gaps*. (Debido a la presencia de ruido. Ej: blanco : 250 ± 2)

- Por eso la mayoria de las imagenes naturales que sufrieron modificaciones de histograma son faciles de identificar. Si alguna parte del histograma se dilata, alli se producen gaps.

Pregunta

Que cambio de contraste harian para obtener este resultado?





Cuantizacion

Veremos:

- Medidas de distorsion
- Cuantizadores Optimos (Max-Floyd e Uniforme)
- Cuantizador practico

Medidas de distorsión*

* Poco que ver con la calidad subjetiva

$$\text{Image: } u \ \ , \tilde{u} = \text{approx. de } u \text{ (ej: comprimida)}$$

MSE

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{MN} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{(u(i,j) - \tilde{u}(i,j))^2}_{e(i,j)} = E[(U - \tilde{U})^2]$$

- SNR (Relación Señal Ruido)

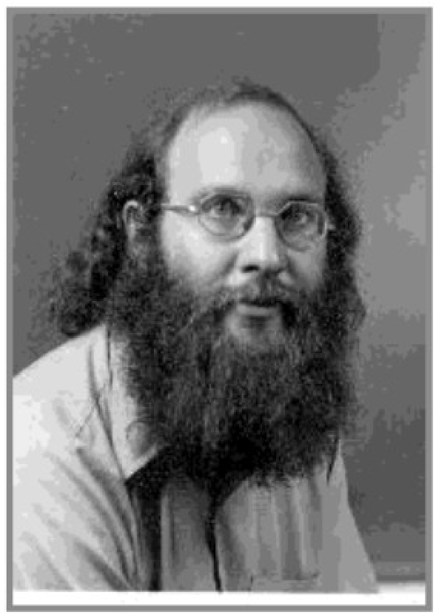
$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_U^2}{\sigma_e^2} dB$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(u_{max} - u_{min})^2}{\sigma_e^2}$$

Cuantizacion

Reducir el numero de bits por pixel permite reducir el tamaño del fichero.


8 bits

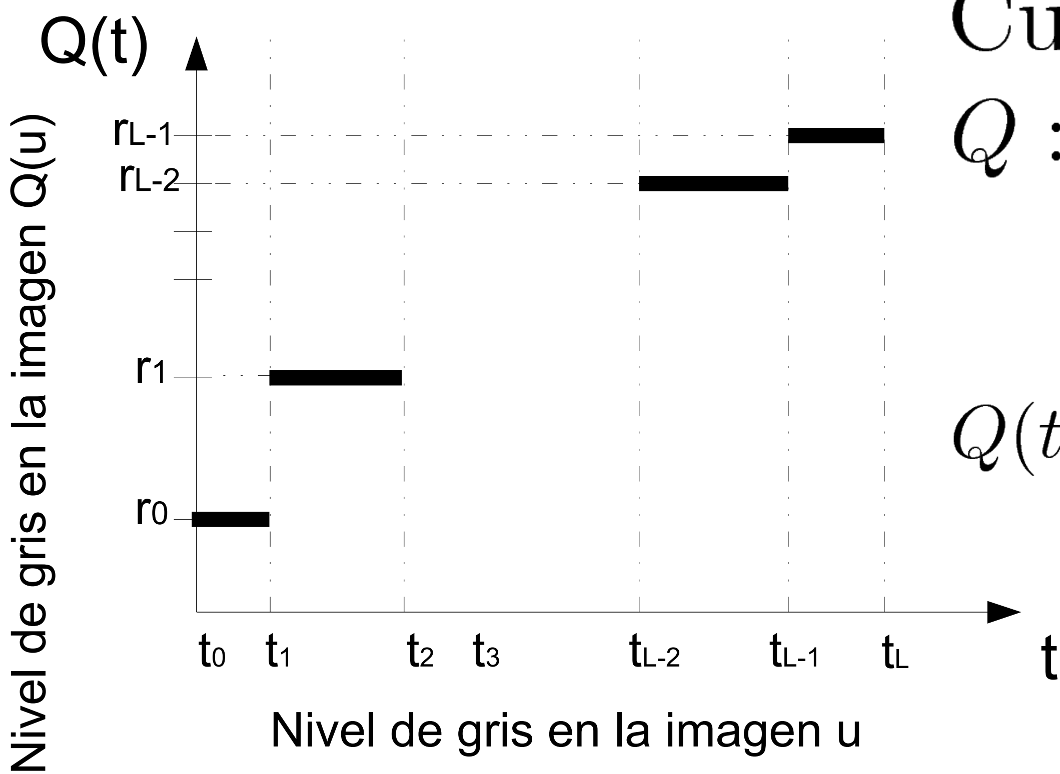

4 bits


2 bits


1 bit

Cuantizacion

- X: VA que toma valores en $[t_0, t_L]$
- Subdividimos $[t_0, t_L]$ con: $t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_L$
- $r_1 < r_2 < \ldots\ldots < r_{L-1}$ L-1 valores



$$\text{Cuantizador}:$$

$$Q : [t_0, t_L] \rightarrow r_0, \cdots, r_L$$

$$Q(t) = \begin{cases} r_0 \text{ si} & t \in [t_0, t_1) \\ r_1 \text{ si} & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ r_{L-1} \text{ si} & t \in [t_{L-1}, t_L] \end{cases}$$

Cuantizador optimo

Cuantizador Q(X) es una approx. a X

Como escojer Q para minima distorsion? $\min_{t,r} D(X, Q(X))$

$$D(X,Q(X)) = E[(X - Q(X))^2] = \int_{t_0}^{t_L} (x - Q(x))^2 f_X(x)dx$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (x - r_0)^2 f_X(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} (x - r_1)^2 f_X(x)dx + \cdots \int_{t_{L-1}}^{t_L} (x - r_{L-1})^2 f_X(x)dx$$

Problema donde: t_i, r_j son incognitas (L+1 y L-2 resp.)

Solucion: Cuant. Optimo de Max-Floyd.

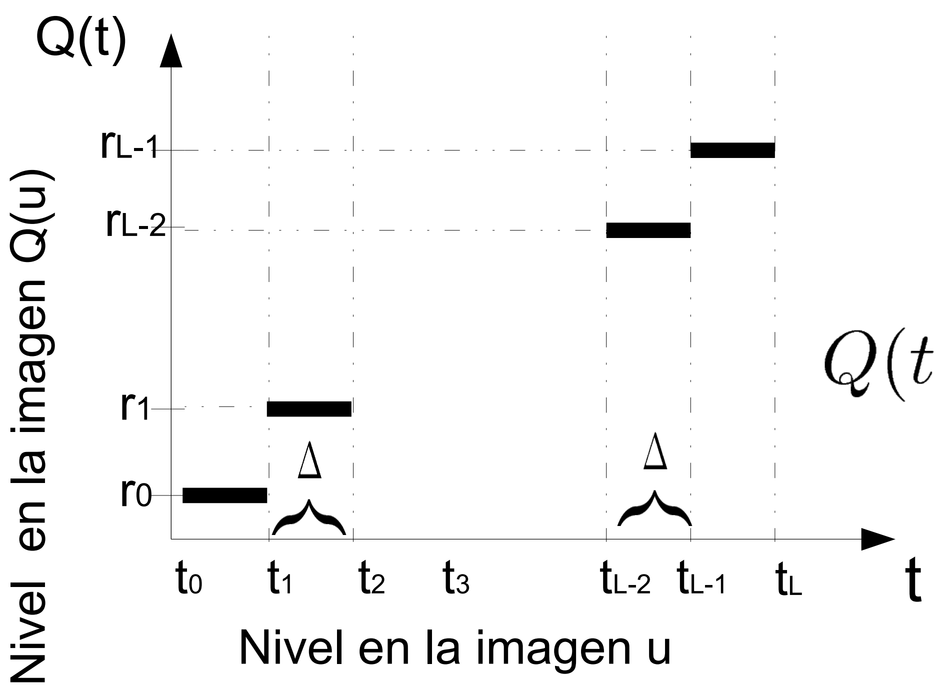
$$\text{Iterar:} \begin{cases} 1) \quad t_k = \frac{r_k - r_k + 1}{2} \\ 2) \quad r_k = \frac{\int_{t_k}^{t_k+1} x f_X(x)dx}{\int_{t_k}^{t_k+1} f_X(x)dx} \end{cases}$$

Cuantizador uniforme

- Sea X: VA <u>uniforme</u> en [t_0, t_L] (como es el histograma?)

  con densidad: $$f_X(x) = \frac{1}{t_L - t_0} \; ; \; x \in [t_0, t_L]$$

- Fijamos L = niveles de gris = 2^R, R=# bits
- Se puede probar que <u>cuant. opt. para X es uniforme.</u>



$$\Delta = \frac{t_L - t_0}{L} \text{ con } t_j = t_0 + j\Delta$$

$$Q(t) = \begin{cases} r_0 = \frac{t_1 + t_0}{2}, t \in [t_0, t_1) \\ r_1 = \frac{t_2 + t_1}{2}, t \in [t_1, t_2) \\ \vdots \\ r_{L-1} = \frac{t_L + t_{L-1}}{2}, t \in [t_{L-1}, t_L] \end{cases}$$

Distorsion del Cuantizador uniforme

$$D(X,Q(X)) = \int_{t_0}^{t_1} (x - \underbrace{\frac{t_0+t_1}{2}}_{r_0})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (x - \underbrace{\frac{t_1+t_2}{2}}_{r_1})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx + \cdots = \frac{(t_L - t_0)^2}{12} \boxed{= \frac{\Delta^2}{12}}$$

Distorsion del Cuantizador uniforme

$$D(X,Q(X)) = \int_{t_0}^{t_1} (x - \underbrace{\frac{t_0+t_1}{2}}_{r_0})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (x - \underbrace{\frac{t_1+t_2}{2}}_{r_1})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx + \cdots = \frac{(t_L - t_0)^2}{12} \boxed{= \frac{\Delta^2}{12}}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (x - \frac{t_0+t_1}{2})^2 dx = \frac{1}{3}((t_1 - \frac{t_0+t_1}{2})^3 - (t_0 - \frac{t_0+t_1}{2})^3)$$

$$= \frac{1}{24}((\underbrace{t_1 - t_0}_{\Delta})^3 - (t_0 - t_1)^3) = \boxed{\frac{\Delta^3}{12}}$$

Distorsion del Cuantizador uniforme

$$D(X,Q(X)) = \int_{t_0}^{t_1} (x - \underbrace{\frac{t_0+t_1}{2}}_{r_0})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (x - \underbrace{\frac{t_1+t_2}{2}}_{r_1})^2 \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{f_X(x)} dx + \cdots = \frac{(t_L - t_0)^2}{12} \boxed{= \frac{\Delta^2}{12}}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (x - \frac{t_0+t_1}{2})^2 dx = \frac{1}{3}((t_1 - \frac{t_0+t_1}{2})^3 - (t_0 - \frac{t_0+t_1}{2})^3)$$

$$= \frac{1}{24}((\underbrace{t_1 - t_0}_{\Delta})^3 - (t_0 - t_1)^3) = \boxed{\frac{\Delta^3}{12}}$$

$$D(X,Q(X)) = L \underbrace{\frac{1}{t_L - t_0}}_{L\Delta} \boxed{\frac{\Delta^3}{12}} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(t_L - t_0)^2}{12L^2} \boxed{= \frac{\sigma_X^2}{L^2}}$$

X: unif. $\rightarrow \sigma_X^2$

CUANTIZ. UNIFORME

Probar:

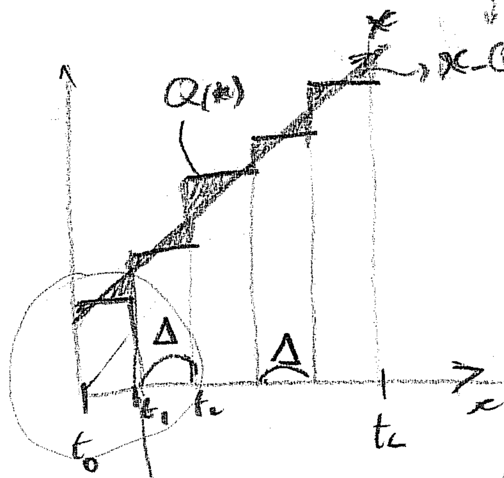
$$D(X,Q(X)) = \int_{t_0}^{t_L} (x - Q(x))^2 f_X(x)\,dx = \boxed{\frac{\Delta^2}{12}}$$

unif

$$= \int_{t_0}^{t_L} (x - Q(x))^2 \frac{1}{t_L - t_0}\,dx$$

Def:

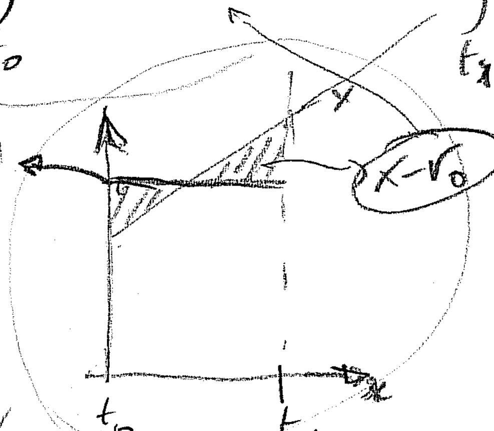
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= t_1 - t_0 \\ &= t_2 - t_1 \\ &= t_L - t_{L-1} \\ \hline t_L - t_0 &= L \cdot \Delta \end{aligned}}$$



podemos calcularlo en trozos

$$= \frac{1}{t_L - t_0}\left(\int_{t_0}^{t_1} (x - Q(x))^2\,dx + \int_{t_1}^{t_2} (x - Q(x))^2\,dx + \dots \int_{t_{L-1}}^{t_L} (x - Q(x))^2\,dx \right)$$

$Q(x) = r_0$ $\quad x - r_0 \quad x - r_1 \quad x - r_{L-1}$



$$= \frac{1}{t_L - t_0}\left(\int_{t_0}^{t_1} (x - r_0)^2\,dx + \int_{t_1}^{t_2} (x - r_1)^2\,dx \dots + \int_{t_{L-1}}^{t_L} (x - r_{L-1})^2\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{t_L - t_0}\left(\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left(x - \frac{t_1 - t_0}{2}\right)^2 dx}_{A_0} + \underbrace{\dots}_{A_1} \dots \underbrace{\int_{t_{L-1}}^{t_L} \left(x - \frac{t_L - t_{L-1}}{2}\right)^2 dx}_{A_{L-1}} \right)$$

$$A_0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(x - \frac{t_1 - t_0}{2}\right)^2 dx = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{2x - t_1 - t_0}{2}\right)^2 dx$$

primitiva

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2x - t_1 - t_0}{2}\right)^3\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{24}(2t_1 - t_1 - t_0)^3 - \frac{1}{24}(2t_0 - t_1 - t_0)^3$$

$$= \frac{1}{24}\underbrace{(t_1 - t_0)}_{=\Delta}{}^3 - \frac{1}{24}\underbrace{(t_0 - t_1)}_{=-\Delta}{}^3 = \frac{2\Delta^3}{24} = \frac{\Delta^3}{12}$$

$$A_2 = \frac{\Delta^3}{12}, \ldots, A_{L-1} = \frac{\Delta^3}{12}$$

$$\Rightarrow D(x, Q(x)) = \frac{1}{\underbrace{t_L - t_0}_{=L\Delta}}\left(A_0 + A_1 + \cdots A_{L-1}\right)$$

$$= \frac{1}{L\cdot\Delta}\left(\frac{\Delta^3}{12} + \frac{\Delta^3}{12} + \cdots \frac{\Delta^3}{12}\right) = \frac{L\Delta^3}{12 L\cdot\Delta} = \boxed{\frac{\Delta^2}{12}}$$

def di σ_x^2 per x unif.

def

$$\frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{t_L - t_0}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \underbrace{\frac{(t_L - t_0)^2}{12}}_{=\sigma_x^2} \cdot \frac{1}{L^2} = \boxed{\frac{\sigma_x^2}{L^2}}$$

Consecuencias de la Cuantiz. Unif.

$$\text{Si } X \text{ es uniforme } L = 2^R \text{ (R bits)}$$

La distorsion producida por quantificar de R bits es

$$D(R) = D(X, Q(X)) = \frac{\sigma_X^2}{L^2} = \frac{\sigma_X^2}{e^{2R}} = \sigma_X^2 e^{-2R}$$

Si agregamos 1 bit. -> La distorsion se reduce un factor 4!

$$D(R+1) = \sigma_X^2 2^{-2(R+1)} == \sigma_X^2 2^{-2R} 2^{-2} = D(R)/4$$

y el SNR aumenta 6dB

$$SNR(R) = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{D(R)} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 / 2^{2R}} = R 10 \log_{10} 4$$

$$SNR(R+1) - SNR(R) = \underbrace{10 \log_{10}(4)}_{\simeq 6}(R + 1 - R) = 6dB$$

Cuantizador rapido y practico

- Si la imagen tiene histo. uniforme entonces el cuantizador optimo es el uniforme (ver antes).
- Para conseguir una imagen con histograma uniforme alcanza con Ecualizarla.

$$u(i,j) \text{ imagen}$$

Ecualizo la imagen

$$v(i,j) = F_U(u(i,j))$$

Aqui *v* es uniforme -> aplico cuant uniforme *Q(v)*

$$Q(v) = Q(F_U(u))$$

F es invertible entonces deshago la ecualizacion

$$w = F_U^{-1}(Q(v)) = F_U^{-1}(Q(F_U(u)))$$

w esta quantizada de forma casi optima

- Añadir diapositiva comparando el cuantizador uniforme con el cuantizador practico

- Comparar sus histogramas