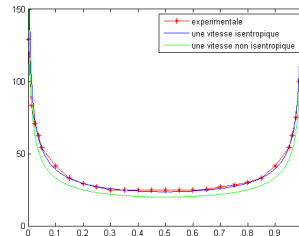


Stage de Licence 3

effectué au CMLA

sous la tutelle de M. Ghidaglia et de M. Benjelloun

jmg@cmla.ens-cachan.fr, Saad.Benjelloun@cmla.ens-cachan.fr



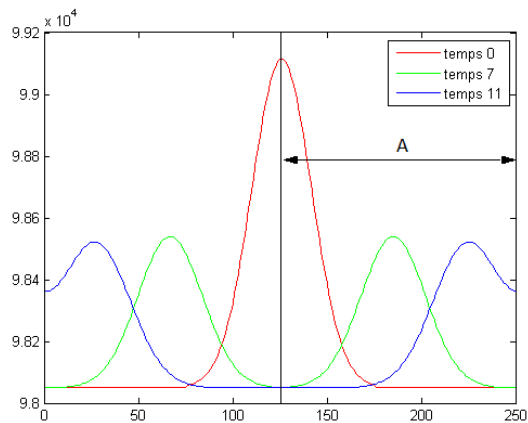
Vitesse du son en mécanique des multi-fluides

par

Benoist Clément, Courtès Clémentine, Inglard Mélanie

clement.benoist@ens-cachan.fr, clementine.courtes@ens-cachan.fr,

melanie.inglard@ens-cachan.fr



ENS Cachan le 30 juin 2011

61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan CEDEX, France

Nous tenons à remercier en tout premier lieu Monsieur Ghidaglia qui a su nous initier à la recherche, nous faire découvrir et aimer la mécanique des fluides. Tout au long de ce stage, il s'est montré disponible au travers de nombreuses réunions très instructives et en nous donnant toujours des conseils formateurs.

Un grand merci également à Monsieur Benjelloun pour sa disponibilité, son soutien permanent et ses nombreuses remarques avisées. Ses riches interventions nous ont beaucoup aidés dans l'aboutissement de nos travaux.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Différentes approches de la vitesse du son	5
1 Vision mathématique	5
1.1 Quelques définitions	5
1.2 Théorie de Sturm	7
2 Vision mécanique	10
3 Vision thermodynamique	11
2 Définitions appliquées à quelques systèmes bi-fluides	15
1 Systèmes admissibles : modèle à une vitesse	15
1.1 Cas non isentropique	15
1.2 Cas isentropique	21
2 Extension de la définition à certains systèmes non admissibles : modèle à deux vitesses	26
2.1 Cas non isentropique	26
2.2 Cas isentropique	32
3 Pour aller plus loin	36
3.1 Modèle à masse ajoutée	36
3.2 Modèle aéré	38
3 Similitudes et divergences entre les trois définitions via l'expérience	41
1 Vitesse mathématique et données expérimentales	41
1.1 Résultats concluants	41
1.2 Difficultés rencontrées	43
2 Confrontations mathématique-mécanique par simulation numérique	44
2.1 Modèle	44
2.2 Convergence et stabilité	45
2.3 Vitesse du son	46
3 Seconde utilisation de la simulation : vitesses thermodynamique et mathématique	48
Conclusion	51

A	Autour de l'équivalence des systèmes	A-1
B	Données expérimentales pour différents bi-fluides	B-1
C	Formulaire sur les différentes vitesses mathématiques du son	C-1
D	Identités thermodynamiques et relations algébriques	D-1
E	Simulation numérique : vitesse mécanique et thermodynamique	E-1
F	Système une vitesse non isentropique, équations linéarisées	F-1
G	Théorie de Sturm - Théorie des sous-résultants	G-1
H	Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne de $f(v)$	H-1
I	<i>Vitesse du son dans des mélanges liquide-gaz</i> de Susan Kieffer	I-1
	Glossaire	
	Bibliographie	

Introduction

Résumé

Intuitivement, tout comme pour les mono-fluides, la vitesse du son d'un bi-fluide est associée à l'idée de propagation d'une onde. Néanmoins, cette notion s'est peu à peu étendue à différents domaines qui ont adopté, selon leurs besoins, une définition de cette vitesse qui leur est propre. Dans ce stage, nous avons étudié trois définitions possibles de la vitesse du son d'un bi-fluide. Nous avons premièrement introduit une vitesse mécanique correspondant à la vision intuitive. Nous nous sommes ensuite intéressés à une approche plus mathématique où la vitesse du son est alors fondée sur un calcul matriciel. Enfin, nous nous sommes penchés sur un aspect thermodynamique. Afin de déterminer des expressions explicites de ces vitesses et de les comparer, nous avons envisagé plusieurs modèles d'écoulement bi-fluide. Une fois les trois vitesses déterminées dans chaque modèle, nous nous sommes alors orientés vers un volet comparaison. Nous avons commencé par chercher à classifier des données expérimentales sur les bi-fluides, trouvées dans la littérature, en fonction des modèles théoriques envisagés ici. Nous avons continué notre série de comparaisons en utilisant une simulation numérique. Basé sur une discrétisation du pas de temps et d'espace, ce programme nous a fourni des valeurs de vitesse du son mécanique, mais également thermodynamique. Ces résultats nous ont permis d'illustrer le fait que même si, au sein d'un même modèle, les expressions théoriques des trois vitesses du son diffèrent, les valeurs calculées restent sensiblement les mêmes. En effet, les différences relatives entre ces trois vitesses sont inférieures à 3% dans la plupart des exemples considérés.

La mécanique des fluides est un domaine chargé d'histoire, dont voici les découvertes-clés. Après l'étude de l'équilibre statique des fluides par Archimède et Pascal, après Newton avec ses lois de la mécanique, Euler détermine l'équation des fluides parfaits $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u = -\nabla p$. Navier et Stokes généralisent et complexifient l'équation d'Euler en introduisant la viscosité du fluide et énoncent donc l'équation de Navier-Stokes $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \mu \Delta u$. Cependant, ces équations ne sont valables que pour un seul fluide, ou mono-fluide, et excluent donc certains autres mélanges. Le modèle mono-fluide a, de ce fait, montré des limites dans certains

problèmes de mécanique des fluides. C'est pour cela que, dans la seconde moitié du vingtième siècle, un intérêt pour les bi-fluides se développe. Le problème de la pression acoustique (valeur maximale de l'impact des vagues sur les jetées) dans la construction de barrages ou de digues constitue un exemple frappant de la nécessité d'introduire les bi-fluides. Ne pas tenir compte de la présence d'air dans l'écume des vagues aboutirait à une valeur de cette pression bien trop importante ; la largeur des jetées requise serait alors irréalisable. En revanche, l'ajout d'une infime proportion d'air dans l'eau diminue considérablement la vitesse du son dans ce mélange. La considération de l'air dans l'eau conduit à réduire la pression acoustique, proportionnelle à cette vitesse, ce qui permet de construire des jetées moins larges qui répondent toujours aux normes de sécurité. L'hypothèse restrictive q_g (titre massique en gaz – air – dans la vague) constant constitue déjà un modèle indéniablement plus réaliste que celui des mono-fluides. À travers cet exemple, nous voyons que la vitesse du son peut jouer un rôle non négligeable bien qu'inattendu dans différents domaines. À ce titre, la vitesse du son pourrait également jouer un rôle dans la prédiction de certains phénomènes volcaniques. Une fois de plus, la composition du magma force à considérer un mélange bi-fluide. Néanmoins, aucune corrélation précise entre les événements éruptifs et la vitesse du son n'a pour l'heure été trouvée. Tout ceci constitue une réelle motivation pour élaborer différents modèles bi-fluides, pour déterminer des expressions explicites de la vitesse du son dans ces différents modèles et pour développer une théorie autour de celle-ci. Ainsi, depuis la fin de la Seconde Guerre Mondiale, commence l'étude de la vitesse du son dans ces modèles bi-fluides. Elle constitue d'ailleurs encore aujourd'hui un vaste problème ouvert ; différentes approches ont tout de même été envisagées. Certains chercheurs adoptent une vision thermodynamique, alors que d'autres étendent les équations d'Euler au cas bi-fluide. Mac William [Mc William et Duggins, 1969] fut un des premiers à étudier cette vitesse du son de manière thermodynamique. Plus récemment, une nouvelle approche mathématique de cette vitesse a été adoptée. M. Ghidaglia, M. Dias [Dias *et al.*, 2009] et M. Le Coq [Ghidaglia *et al.*, 2001] l'ont notamment appliquée aux cas particuliers gaz parfait, « stiffened gas » et fluide incompressible. Ce stage avait pour objectif d'étendre leurs résultats au cas général et de confronter les différentes approches possibles de cette vitesse du son.

Dans ce stage, nous avons proposé trois définitions de la vitesse du son : mécanique, mathématique et thermodynamique. Deux d'entre elles, celles mécanique et mathématique, se fondent sur les lois de conservation physique, apparentées à l'équation d'Euler, dans lesquelles nous négligeons l'accélération de la pesanteur. La dernière adopte une approche thermostatique, qui peut paraître, à première vue, paradoxale, puisque le son consiste en une perturbation locale de la pression, phénomène dynamique. Il inclut ainsi à la fois les ondes de petites perturbations mais aussi les ondes de choc. Dans notre étude, nous nous limiterons à celles de faible amplitude, ce qui nous permettra de linéariser nos systèmes. La famille des bi-fluides comprend de nombreux types de mélanges homogènes ou non comme les diphasiques (même élément présent sous deux phases différentes), les bi-fluides à deux phases (deux éléments présents chacun sous une phase différente)... Nous n'étudierons, ici, que certains mélanges bi-fluides. Même si les deux fluides ne sont pas miscibles, nous considérerons tout de même que chaque volume, aussi petit soit-il, contient un échantillon représentatif des deux fluides. En revanche, nous n'étudierons pas les diphasiques, qu'il faut distinguer des bi-fluides à deux phases.

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à déterminer des expressions théoriques des vitesses du son mathématique, mécanique, thermodynamique, dans deux grands types de modèles : un premier où les deux fluides ont la même vitesse physique, un second où ces vitesses sont différentes. Dans ces deux modèles, nous nous sommes intéressés au cas général comme au cas isentropique. La détermination des expressions des vitesses du son est réalisée selon différentes méthodes. La première, celle mathématique, repose sur l'admissibilité. Afin d'en satisfaire les conditions nécessaires, il nous a fallu vérifier l'admissibilité des systèmes étudiés. Pour ce faire, nous avons étudié la théorie de Sturm dans le livre de Mme Roy [Roy, 1996]. La vitesse mécanique nécessite, quant à elle, la linéarisation des équations associées à chaque modèle et l'obtention de l'équation d'onde, du moins celle linéarisée, satisfaite par la pression. Enfin, la dernière se base sur la différentiation d'identités thermodynamiques. Notre problème majeur de cette partie du stage a été la simplification des expressions des vitesses du son. Celles mathématiques finalement obtenues sont reportées dans le formulaire C ; les autres se trouvent au sein même du rapport. Nous remarquons ainsi que les expressions déterminées des vitesses du son dans les bi-fluides dépendent des vitesses du son dans chaque composant considéré individuellement. Une fois ces expressions calculées, nous avons cherché à les confronter entre elles et avec des données expérimentales, qui furent néanmoins difficiles à trouver. De plus, le caractère atypique des données issues de la littérature fut également un obstacle, bien que secondaire, dans l'aboutissement d'une confrontation sur des mélanges communs. Face à ces difficultés, nous avons cherché à obtenir nos propres valeurs expérimentales de la vitesse du son par un procédé numérique. À cette fin, nous avons utilisé une méthode de discrétisation à volume fini VFFC. Notre programme ne sera applicable qu'aux systèmes hyperboliques, l'hyperbolicité assurant la stabilité des petites perturbations. Après avoir vérifié la convergence et la stabilité de la simulation, nous avons appliqué une variation gaussienne à notre milieu et étudié la vitesse de propagation de celle-ci. Nous avons alors un accès direct à des valeurs expérimentales de vitesses du son mécaniques dans les bi-fluides. Via un programme Matlab™, nous avons ensuite calculé des vitesses du son thermodynamiques expérimentales à partir de données extraites de la simulation numérique. Toutes ces données réunies, il nous était alors possible de réaliser nos comparaisons sur un large échantillon de bi-fluides et ainsi d'obtenir des résultats plus représentatifs. Ces résultats nous ont permis de conclure au rapprochement ou non de certaines définitions de la vitesse du son. Probants, ils penchent en majorité pour la concordance des vitesses, certains allant même jusqu'à une différence relative de l'ordre de 1%.

Chapitre 1

Différentes approches de la vitesse du son

Nous donnons trois définitions de la vitesse du son, une définition mathématique reposant sur le calcul de valeurs propres d'une matrice jacobienne, une définition mécanique liée à la propagation de l'onde sonore, et une définition thermodynamique : la dérivée de la pression par rapport à la densité à entropie constante. Nous donnerons dans cette partie la théorie utile à l'élaboration de ces trois définitions.

1 Vision mathématique

1.1 Quelques définitions

Les équations utilisées pour la détermination de la vitesse du son, qu'elle soit mathématique, mécanique ou thermodynamique, sont issues des lois de conservation de la physique. En effet, les équations physiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie nous fournissent un système du type : $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$, où v correspond à un vecteur physique faisant intervenir la pression p , la vitesse u_i du fluide i , la masse volumique ρ_i du fluide i , etc. De ce système conservatif, nous déduisons la forme quasi-linéaire : $\frac{\partial v}{\partial t} + df(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$ encore écrit $\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v)$ avec A la matrice jacobienne de f et S le vecteur nul (nous négligeons ici l'accélération de la pesanteur).

Cette dernière équation est à l'origine de tous nos calculs sur la détermination de la vitesse du son mathématique. En effet, cette vitesse (c_m) est définie à partir de l'étude du spectre de la matrice jacobienne df .

Nous allons tout d'abord introduire quelques définitions qui nous permettront d'aboutir à la

vitesse mathématique du son. Pour commencer, nous aurons besoin de la définition de l'hyperbolicité (cf. définition Hyperbolicité du glossaire).

Définition 1 (Projecteur π_0). *On désigne par π_0 , le projecteur qui à v associe $\pi_0(v) = v_0$, consistant à annuler les vitesses physiques dans v .*

Définition 2 (Admissibilité). *On dit que le système*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v) \quad (1.1)$$

est admissible sur G , ouvert connexe, si :

1. *il est régulièrement hyperbolique sur G ,*
2. *$\exists c_m > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c_m, 0, c_m\}$ où $A_0 = A(\pi_0(v))$.*

Remarque c_m est en général une fonction de v_0 .

Nous pouvons maintenant définir la vitesse mathématique du son pour un tel système.

Définition 3 (Vitesse du son mathématique (c_m)). *Si le système (1.1) est admissible sur G alors la seule valeur propre strictement positive de A_0 , $c_m > 0$, sera appelée vitesse du son au sens mathématique.*

Nous allons appliquer ces définitions à un exemple de système mono-fluide courant : le système Euler non isentropique. Dans ce système, un seul fluide est présent et nous négligeons l'accélération de la pesanteur. Le système correspond aux équations de conservation suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Les variables E et H sont définies en annexe D.

En introduisant le vecteur v comme précédemment expliqué, nous ramenons ce système physique à l'équation mathématique suivante : $\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u E + pu \end{bmatrix} = 0$. La matrice jacobienne de f est ici :

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_2^2}{v_1^2} + \frac{\partial p}{\partial v_1} & \frac{2v_2}{v_1} + \frac{\partial p}{\partial v_2} & \frac{\partial p}{\partial v_3} \\ -\frac{v_3 v_2}{v_1^2} + \frac{v_2}{v_1} \frac{\partial p}{\partial v_1} - \frac{v_2 p}{v_1^2} & \frac{v_3}{v_1} + \frac{p}{v_1} + \frac{v_2}{v_1} \frac{\partial p}{\partial v_2} & \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_2}{v_1} \frac{\partial p}{\partial v_3} \end{bmatrix}.$$

Les dérivées partielles de p par rapport à v_i peuvent s'exprimer en fonction des dérivées de p par rapport à ρ et s , inconnues plus usuelles que les $\frac{\partial p}{\partial v_i}$. En effet, nous disposons d'identités thermodynamiques reliant la pression aux autres inconnues comme la température T , la masse volumique ρ , l'énergie volumique e etc. Nous les avons rassemblées dans l'annexe D. Nous utilisons ici l'identité : $Tds = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho$ et la relation $e = \frac{v_3}{v_1} - \frac{v_2^2}{2v_1^2}$, qui nous permettent d'exprimer les $\frac{\partial p}{\partial v_i}$.

La matrice $A(v)$ étant diagonalisable sur \mathbb{R} , de matrice de passage bornée et infiniment dérivable sur chaque compact de l'ouvert connexe $G = \{v_1 > 0, v_2 \in \mathbb{R}, v_3 - \frac{v_2^2}{2v_1} > 0\}$, le système est bien régulièrement hyperbolique. Les valeurs propres de cette matrice sont $\left\{ -\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, 0, \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \right\}$, ce qui nous permet de conclure sur l'admissibilité du système. La vitesse du son mathématique est alors : $c_m = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$.

Nous avons également étendu la définition de la vitesse du son à certains systèmes non admissibles, ceux faiblement admissibles.

Définition 4 (Admissibilité faible). *On dit que le système*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v) \tag{1.3}$$

est faiblement admissible sur G , ouvert connexe, si $\exists c_m > 0$ tel que $\text{Sp}(A_0(v)) \subset \{-c_m, 0, c_m\}$ où $A_0(v) = A(\pi_0(v))$.

La définition de la vitesse du son se généralise alors à ces systèmes :

Définition 5 (Vitesse mathématique du son). *Si le système (1.3) est faiblement admissible alors la seule valeur propre strictement positive de A_0 , $c_m > 0$, sera appelée vitesse du son au sens mathématique.*

1.2 Théorie de Sturm

La définition mathématique de la vitesse du son s'appuie sur les valeurs propres d'une matrice jacobienne et fait ainsi intervenir le calcul et la détermination des racines d'un polynôme caractéristique. Or, cette définition n'est valable que lorsque notre système est admissible ou faiblement admissible. Avant de rechercher la vitesse du son mathématique, il nous fallait donc étudier une théorie nous permettant de savoir si un polynôme avait toutes ses racines réelles distinctes, condition suffisante pour satisfaire l'hyperbolicité. Pour cela, nous nous sommes penchés sur l'algorithme de Sturm.

L'objectif de cet algorithme est de savoir si toutes les racines d'un polynôme sont distinctes et réelles, y compris pour un polynôme de degré élevé. Nous allons tout d'abord étudier un premier algorithme vu selon deux approches. Toutes deux utilisent une suite de polynômes définie par divisions euclidiennes successives.

Définition 6. Nous appelons la séquence de Sturm de P la suite de polynômes suivante : $P_0 = P, P_1 = P', P_{m+1} = -\text{reste}(P_{m-1}, P_m)$, où *reste* est le reste dans la division euclidienne.

La première approche se base sur le nombre de changements de signe dans les séquences $(P_0(-\infty), P_1(-\infty), \dots, P_n(-\infty))$ et $(P_0(+\infty), P_1(+\infty), \dots, P_n(+\infty))$.

Définition 7. On note $V([a_0, \dots, a_n])$ le nombre de changements de signe, au sens strict, de la séquence $[a_0, \dots, a_n]$ avec $V([a_0]) = 0$. Si la suite contient des zéros, on applique cette définition à la suite où on a éliminé les 0.

On note $V(P; a)$ le nombre de changements de signe de la séquence de Sturm de P en a . Nous définissons, de plus :

$$V(P) = V(P; -\infty) - V(P; +\infty).$$

Le théorème suivant est le résultat fondateur de la première approche. Il permet de conclure que le nombre de changements de signe $V(P)$ correspond exactement au nombre de racines réelles distinctes de $P_0 = P$.

Théorème 1 (de Sturm). *Considérons P un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} alors*

$$V(P) = I(P', P),$$

où $I(P', P)$ est défini comme suit.

Définition 8. Pour a et b inclus dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$, on appelle indice de Cauchy $I(Q/P,]a, b[)$ le nombre de sauts de Q/P de $-\infty$ à $+\infty$ auquel on soustrait le nombre de sauts de $+\infty$ à $-\infty$ sur l'intervalle $]a, b[$.

$I(Q/P)$ correspond à l'indice de Cauchy $I(Q/P,]-\infty, +\infty[)$.

Notons $c(P)$ le nombre de racines du polynôme P .

Corollaire 1 (Corollaire fondateur). $I(P', P) = c(P)$.

La deuxième approche consiste, quant à elle, à déterminer les signes des coefficients dominants des polynômes de la séquence (P_0, P_1, \dots, P_n) , toujours obtenus par divisions euclidiennes successives. Le théorème suivant permet de savoir si le polynôme initial $P (= P_0)$ a exactement n racines réelles distinctes.

La deuxième méthode consiste donc à déterminer le signe des coefficients dominants des polynômes de la séquence :

Théorème 2. Soit P un polynôme de degré n . On définit la suite (P_m) par la définition 6. Soit a_k le coefficient du monôme X^{n-k} dans P_k . Alors, P a n racines réelles distinctes si et seulement si tous les a_k sont strictement positifs.

Bien que ces deux approches soient au premier abord différentes, nous allons maintenant étudier, de manière heuristique, les relations entre celles-ci. Nous allons supposer les hypothèses du théorème 2 et chercher à retrouver les résultats du théorème 1. Si tous les coefficients dominants a_k (définis au théorème 2) des polynômes P_k sont positifs, comme $P_i \sim a_i X^{n-i}$ en $+\infty$ et en

$-\infty$, alors la séquence $(P_0(+\infty), P_1(+\infty), \dots, P_n(+\infty))$ est égale à $(+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$, il n’y a donc aucun changement de signe. En revanche, la séquence $(P_0(-\infty), P_1(-\infty), \dots, P_n(-\infty))$ devient $(+\infty, -\infty, +\infty, -\infty, \dots)$ ou $(-\infty, +\infty, -\infty, +\infty, \dots)$ selon la parité du degré du polynôme ; il y aura donc n changements de signe dans cette séquence. Ainsi, $V(P) = n - 0 = n$. Or, d’après le corollaire fondateur 1, nous savons que $V(P)$ est égal au nombre de racines réelles distinctes du polynôme P . Ainsi, supposer les hypothèses du théorème 2 revient à compter les changements de signe du théorème 1. Il est à noter cependant que le polynôme P_k est au plus de degré $n - k$ et non forcément égal à $n - k$. Le coefficient a_k n’est donc pas toujours le coefficient dominant de ce polynôme (comme supposé ci-dessus).

Nous avons implémenté cet algorithme de Sturm (cf. *annexe G*) en utilisant la deuxième approche, afin que le programme nous fournisse les conditions nécessaires (coefficients dominants positifs) pour avoir des racines réelles distinctes lorsque les coefficients des polynômes sont non explicites. Nous avons affiché ici quelques exemples simples : le programme s’arrête dès qu’un coefficient dominant est négatif, dans le cas contraire, il exécute le processus jusqu’à la fin.

Polynômes	Résultat de l’algorithme
$X^2 + 1$	un coefficient dominant est négatif
X^3	tous les coefficients sont réels et positifs
$12X^9 + \sqrt{3}X^5 - 123$	un coefficient dominant est négatif

Nous avons aussi appliqué cet algorithme aux polynômes caractéristiques des systèmes étudiés au chapitre 2 afin de vérifier leur hyperbolicité. L’algorithme nous fournit par exemple, pour le système deux vitesses isentropique (cf. section 2.2 du chapitre 2) dont le polynôme caractéristique est $P = 3X^4 + 3qX^2 + 3rX + 3s$:

$$\left[-\frac{1}{2}q, -\frac{2q^3 - 8qs + 9r^2}{q^2}, -\frac{1}{4}q^2 \frac{-16q^4s + 128q^2s^2 - 144qsr^2 - 256s^3 + 4q^3r^2 + 27r^4}{(2q^3 - 8qs + 9r^2)^2} \right].$$

Ces coefficients doivent être strictement positifs pour vérifier l’hyperbolicité.

Le problème de l’algorithme de Sturm est que la mémoire et la puissance de calcul nécessaire à sa réalisation croissent exponentiellement en la taille des données, du fait des divisions euclidiennes successives. C’est pour cela que nous avons étudié un algorithme amélioré : celui de Roy. L’objectif de cet algorithme est similaire au précédent. Ce programme amélioré permet non seulement de savoir si un polynôme a des racines réelles distinctes mais aussi de compter le nombre de ses racines réelles distinctes y compris pour un polynôme de degré élevé tout en contrôlant la complexité.

Cet algorithme se base, tout comme l’algorithme de Sturm, sur la détermination d’une séquence de polynômes et le calcul du nombre de changements de signe. Mais cette fois, afin de réduire le temps de calcul de l’algorithme, la séquence de polynômes n’est pas définie à partir de divisions euclidiennes mais de sous-résultants (cf. *annexe G*). Les changements de

signe sont comptés différemment. Nous noterons maintenant W cette nouvelle façon de compter. Les méthodes de comptage V et W ne diffèrent que sur les suites de deux zéros successifs. La modification au niveau de W est donc la suivante :

- on compte +1 pour $[+, 0, 0, -]$ et $[-, 0, 0, +]$.
- on compte +2 pour $[+, 0, 0, +]$ et $[-, 0, 0, -]$.

Là encore, nous avons appliqué cet algorithme à différents polynômes. Les temps d'exécution de cet algorithme correspondent à des échelles de temps tout à fait acceptables.

Polynômes	Nombre de racines réelles distinctes	Temps
$X^{15} - 1$	1	32.199 s
$X^{12} + 3X + 4$	0	11.310 s
$(X - 1)^2$	1	0.140 s

2 Vision mécanique

Définition 9. *La vitesse mécanique du son, dans un milieu homogène, correspond à la vitesse de propagation d'une perturbation de pression.*

La pression vérifie alors une équation d'onde ; si toute fonction de la forme $p : (x, t) \mapsto p(x - c_p t)$ est solution de cette équation, c_p est une vitesse du son. C'est la définition la plus intuitive de la vitesse du son et celle qui est en général physiquement mesurée.

Nous allons dans un premier temps donner un exemple d'une telle vitesse mécanique dans le cas Euler mono-fluide non isentropique. Nous considérons toujours le système (1.2) que nous linéarisons autour d'un état d'équilibre à vitesse u nulle, afin de pouvoir déterminer une équation d'onde (linéarisée) en p . La généralité est préservée grâce à l'invariance galiléenne. Premièrement, nous avons montré en annexe A que le système (1.2) était équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{Dp}{Dt} = -\rho \operatorname{div}(u), \\ \frac{Du}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \\ \frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div}(u). \end{cases} \quad (1.4)$$

où nous avons posé $\frac{DA}{Dt}$ la dérivée particulière $\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A$. Pour cela, nous avons utilisé le lemme suivant (démontré aussi en annexe A) :

Lemme 1. : *Soit K une fonction, si ε vérifie l'équation de conservation $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon u) = 0$, alors il y a équivalence entre $\frac{DA}{Dt} = \frac{K}{\varepsilon}$ et $\frac{\partial(\varepsilon A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon A u) = K$.*

Ensuite, nous déterminons une équation linéaire en p . À partir des deux premières équations du système (1.2), évaluées en $p = p_0 + \delta p$, $\rho = \rho_0 + \delta \rho$ et $u = \delta u$ et en ne gardant que les termes d'ordre 1, nous obtenons : $\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\delta u) = 0$ et $\rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \nabla p = 0$.

Une fois les équations précédentes dérivées, nous utilisons l'identité thermodynamique $\delta p = c_p^2 \delta \rho$, puis par soustraction, nous obtenons finalement l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - c_p^2 \Delta \delta p = 0. \quad (1.5)$$

La vitesse du son mécanique est ici $c_p = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$.

Nous remarquons premièrement que cette vitesse du son mécanique (c_p) est la même que la vitesse du son mathématique précédemment déterminée. Il en sera de même pour certains systèmes étudiés par la suite.

Nous pouvons également remarquer que les calculs ont été faits en dimension 3 ; cependant nous aurions pu sans perte d'informations nous restreindre à la dimension 1. En effet, nos perturbations étant linéaires, le théorème de décomposition des signaux s'applique : nous pouvons décomposer un signal linéaire en somme de signaux à une dimension. Ce principe de superposition (applicable uniquement aux cas linéaires, donc ici puisque nous nous limitons aux ondes de faible amplitude) s'ajoute au principe d'isotropie physique : les lois physiques sont identiques selon toutes les directions. Nous savons donc que nous pouvons décomposer notre onde en ondes uni-dimensionnelles. Toutes les ondes se propagent identiquement selon toutes les directions, nous pouvons, là encore sans perte de généralité, supposer que la direction est celle des abscisses. C'est, d'après ces deux principes, superposition et isotropie, que nous nous limiterons, dans la suite de notre étude, au cas de la dimension 1.

3 Vision thermodynamique

Définition 10. *La vitesse du son thermodynamique d'un mono-fluide est :*

$$c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Or, l'objet d'étude de notre stage portait sur les bi-fluides, nous avons donc, par analogie, étendu cette définition.

Définition 11. *La vitesse du son thermodynamique d'un mélange bi-fluide où la pression est identique dans les deux fluides est :*

$$c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_1, s_2, \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}}}$$

Nous avons également démontré que cette définition est équivalente à

$$c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_1, s_2, \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho}}}$$

En effet, le calcul suivant reste le même en échangeant les fluides 1 et 2.

Nous allons déterminer l'expression de cette vitesse thermodynamique, premièrement dans le cas où l'équation d'état du bi-fluide est définie par : $p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2)$, p ne dépend que d'une variable physique. Il s'agit des deux systèmes isentropiques que nous étudierons plus en détail dans le chapitre 2. Nous généraliserons, par la suite, notre étude, en supposant l'équation d'état : $p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2)$, p dépend ici de deux variables.

- Tout d'abord, les lois d'état $p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2)$ permettent de lier ρ_1 et ρ_2 , ce qui donne en différentiant : $dp = c_1^2 d\rho_1 = c_2^2 d\rho_2$, où $c_i^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_i}\right)_s$.

De plus, nous pouvons relier la variation de ρ à celles de α_1 et ρ_1 ; en effet :

$$d\rho = \alpha_1 d\rho_1 + \rho_1 d\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_1^2}{c_2^2} d\rho_1 - \rho_2 d\alpha_1. \quad (1.6)$$

De cette expression, nous déduisons la relation suivante :

$$d\rho_1 = \frac{c_2^2 (d\rho + (\rho_2 - \rho_1) d\alpha_1)}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2},$$

qui réinjectée dans l'équation d'état, fournit l'équation de pression dans le mélange :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} d\rho + \frac{c_2^2 c_1^2 (\rho_2 - \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} d\alpha_1. \quad (1.7)$$

Nous allons maintenant exprimer $d\alpha_1$ en fonction de $d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)$ et $d\rho$, afin de déterminer la vitesse du son thermodynamique.

La différentielle (1.6) nous fournit : $d\rho = d(\alpha_1 \rho_1) - \rho_2 d\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_1^2}{c_2^2 \alpha_1} (d(\alpha_1 \rho_1) - \rho_1 d\alpha_1)$.

La variation en α_1 vérifie donc :

$$d\alpha_1 = -\frac{\alpha_1 c_2^2}{\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2} d\rho + \frac{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2}{\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2} d(\alpha_1 \rho_1). \quad (1.8)$$

En injectant cette relation (1.8) dans l'expression (1.7), nous obtenons donc :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} \left(1 - \frac{\alpha_1 c_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}{\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2}\right) d\rho + \frac{c_1^2 c_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}{\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2} d(\alpha_1 \rho_1).$$

Afin d'avoir l'expression de dp en fonction de $d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)$ et non $d(\alpha_1 \rho_1)$, nous avons utilisé la relation suivante : $d(\alpha_1 \rho_1) = \rho d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right) + \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} d\rho$.

Finalement, après simplifications, nous nous ramenons à :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)} d\rho + \frac{c_1^2 c_2^2 \rho (\rho_2 - \rho_1)}{\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2} d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right).$$

Nous obtenons donc la vitesse du son thermodynamique :

$$c_t^{\text{isentropique}} = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}. \quad (1.9)$$

Nous verrons en chapitre 2 que cette valeur de la vitesse thermodynamique correspond aux valeurs des vitesses mathématique et mécanique dans certains de nos mélanges bi-fluides étudiés (cf. section 1.2 du chapitre 2).

- Nous supposons désormais que p dépend de deux variables physiques : e_i et ρ_i . On sait que :

$$dp = \left(c_1^2 - \frac{k_1 p}{\rho_1}\right) d\rho_1 + \rho_1 k_1 de_1, \quad (1.10)$$

(cf. identités thermodynamiques, *annexe D*). Afin de pouvoir écrire la variation de p uniquement en fonction des variations de ρ et de α_1 , il nous faut pouvoir exprimer $d\rho_1$ et de_1 en fonction de $d\rho$ et $d\alpha_1$. Ceci constitue une première étape vers l'élaboration de la vitesse du son thermodynamique.

Des équations d'état $p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2)$ et des identités thermodynamiques $dp = c_i^2 d\rho_i + \rho_i k_i T ds_i$ (cf. *annexe D*), nous déduisons l'égalité suivante : $d\rho_2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} d\rho_1 + \frac{\rho_1 k_1 T}{c_2^2} ds_1 - \frac{\rho_2 k_2 T}{c_2^2} ds_2$. Cette égalité nous permet d'écrire une relation analogue à l'équation (1.6) mais dans le cas non isentropique, à savoir :

$$d\rho = \alpha_1 d\rho_1 + \rho_1 d\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_1^2}{c_2^2} d\rho_1 - \rho_2 d\alpha_1 + \frac{\alpha_2 \rho_1 k_1 T}{c_2^2} ds_1 - \frac{\alpha_2 \rho_2 k_2 T}{c_2^2} ds_2.$$

Nous déduisons de l'expression précédente, la variation de ρ_1 en fonction des paramètres voulus.

Pour déterminer la variation de e_1 en fonction des paramètres choisis, nous utilisons l'identité : $T ds_1 = de_1 - \frac{p}{\rho_1} d\rho_1$, qui nous fournit donc :

$$de_1 = \frac{p c_2^2 (d\rho + (\rho_2 - \rho_1) d\alpha_1)}{\rho_1^2 (\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2)} - \frac{T \rho_1 (p \alpha_2 k_1 - \rho_1 (\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2))}{\rho_1^2 (\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2)} ds_1 + \frac{p \alpha_2 k_2 \rho_2 T}{\rho_1^2 (\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2)} ds_2.$$

L'équation (1.10) et les relations précédemment trouvées nous fournissent donc l'équation de pression dans le mélange (équation analogue à la relation (1.7) du cas isentropique) :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2 d\rho + c_1^2 c_2^2 (\rho_2 - \rho_1) d\alpha_1}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} + \frac{\alpha_1 c_2^2 \rho_1 k_1 T}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} ds_1 + \frac{\alpha_2 c_1^2 \rho_2 k_2 T}{\alpha_1 c_2^2 + \alpha_2 c_1^2} ds_2. \quad (1.11)$$

Une fois cette première étape achevée et l'expression de dp trouvée en fonction de $d\alpha_1$ et $d\rho$, nous procédons de la même manière que pour le cas isentropique, i.e. nous exprimons la variation de α_1 en fonction de $d(\alpha_1\rho_1)$ et $d\rho$.

Nous différencions là encore $d\rho$: $d\rho = d(\alpha_1\rho_1) - \rho_2 d\alpha_1 + \frac{\alpha_2 c_1^2}{\alpha_1 c_2^2} (d(\alpha_1\rho_1) - \rho_1 d\alpha_1) + \frac{\alpha_2 \rho_1 k_1 T}{c_2^2} ds_1 - \frac{\alpha_2 \rho_2 k_2 T}{c_2^2} ds_2$, ce qui, une fois inversée, nous fournit une expression de $d\alpha_1$.

Nous réinjectons cette expression dans l'équation de pression du mélange, qui devient après simplifications :

$$dp = \frac{c_2^2 c_1^2 \rho_1 d\rho + c_2^2 c_1^2 (\rho_2 - \rho_1) d(\alpha_1 \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} + \frac{\alpha_1 c_2^2 \rho_1 \rho_2 k_1 T}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} ds_1 + \frac{\alpha_2 c_1^2 \rho_2 \rho_1 k_2 T}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} ds_2.$$

La dernière étape consistant à exprimer $d(\alpha_1\rho_1)$ en fonction de $d\rho$ et $d\left(\frac{\alpha_1\rho_1}{\rho}\right)$; nous utilisons : $d(\alpha_1\rho_1) = \rho d\left(\frac{\alpha_1\rho_1}{\rho}\right) + \frac{\alpha_1\rho_1}{\rho} d\rho$.

Nous obtenons finalement l'expression suivante :

$$dp = \frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1)} d\rho + \frac{c_1^2 c_2^2 \rho (\rho_2 - \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right) + \frac{\alpha_1 c_2^2 \rho_1 \rho_2 k_1 T}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} ds_1 + \frac{\alpha_2 c_1^2 \rho_2 \rho_1 k_2 T}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1} ds_2.$$

La vitesse du son thermodynamique ayant été définie comme la racine carrée de la dérivée de la pression à entropie et titre massique constants, nous pouvons conclure :

$$c_t^{nonisentropique} = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}. \quad (1.12)$$

Nous pouvons remarquer que l'expression de la vitesse du son thermodynamique est la même, que le système soit isentropique ou non isentropique, à savoir :

$$c_t = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}.$$

Nous vous avons, jusqu'à maintenant, présenté essentiellement la vitesse du son des mono-fluides. Cependant, l'objectif de notre stage est d'étudier la vitesse du son dans les bi-fluides qui ont été jusqu'à présent moins étudiés que les mono-fluides. C'est pour cela que nous nous focaliserons au chapitre 2 sur des systèmes bi-fluides.

Chapitre 2

Définitions appliquées à quelques systèmes bi-fluides

L'étude physique des systèmes bi-fluides conduit à considérer deux modèles : un premier où les deux fluides ont la même vitesse, un second où les vitesses sont distinctes. Nous allons par la suite chercher à déterminer les vitesses du son mathématique et mécanique dans ces deux modèles.

1 Systèmes admissibles : modèle à une vitesse

Dans cette section, nous allons étudier deux cas de systèmes admissibles où les deux fluides partagent la même vitesse u .

1.1 Cas non isentropique

Ce modèle correspond aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer et comparer les vitesses mathématique et mécanique correspondant à ce modèle.

1.1.1 Vitesse mathématique : calculs et résolutions

Résolution du système

On pose $v = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho u, \rho E) \in G$ et $f(v) = (\alpha_1 \rho_1 u, \alpha_2 \rho_2 u, \rho u^2 + p, \rho H u)$, où G est l'ouvert connexe de $\mathbb{R}^4 : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \{e > 0\}$.

On sait de plus que $E = e + \frac{u^2}{2}$, $H = h + \frac{u^2}{2}$, et $h = \frac{p}{\rho} + e$. Nous obtenons alors $\rho H u = pu + \rho u E$. f peut donc s'écrire sous la forme :

$$f(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{v_1 v_3}{v_1 + v_2}, \frac{v_2 v_3}{v_1 + v_2}, \frac{v_3^2}{v_1 + v_2} + p, \frac{v_4 v_3}{v_1 + v_2} + p \frac{v_3}{v_1 + v_2} \right).$$

Nous nous ramenons ainsi à un système de type conservatif : $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$. En introduisant la matrice jacobienne A de f , on a :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v),$$

où $A(v) = df(v)$ et $S(v) = (0, 0, 0, 0)$.

En annulant les vitesses ($v_3 = 0$) dans la matrice jacobienne, nous obtenons avec Maple® :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_1}{v_1+v_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_2}{v_1+v_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial v_1} p(v_1, v_2, 0, v_4) & \frac{\partial}{\partial v_2} p(v_1, v_2, 0, v_4) & \frac{\partial}{\partial v_3} p(v_1, v_2, 0, v_4) & \frac{\partial}{\partial v_4} p(v_1, v_2, 0, v_4) \\ 0 & 0 & \frac{p(v_1, v_2, 0, v_4)}{v_1+v_2} + \frac{v_4}{v_1+v_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

À ce stade, nous pouvons exprimer la vitesse mathématique du son en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial v_i}$. En effet, la vitesse du son est la valeur propre strictement positive de cette matrice jacobienne A_0 .

$$c^2 = \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \frac{\partial p}{\partial v_4} + \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v_2} + \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v_1}. \quad (2.2)$$

Nous remarquons que la vitesse ne dépend pas de v_3 , ce que l'on pouvait supposer dès le début : la vitesse du son est indépendante de la vitesse des fluides. Nous allons maintenant chercher à exprimer ces dérivées en fonction des dérivées partielles $\left(\frac{\partial p}{\partial s_i} \right)_{\rho_i}$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_i} \right)_{s_i}$, cette dernière étant le carré de la vitesse du son dans le mono-fluide i .

Pour cela, on pose $w = (\alpha_i, p, T, u)$, $\rho_i = \mathcal{R}_i(p, T)$ et $e_i = \mathcal{E}_i(p, T)$, où $i = 1, 2$ et $\mathcal{R}_i, \mathcal{E}_i$ sont des fonctions correspondant aux lois d'état du fluide i . En effet, ρ_i et e_i ne dépendent que de p et T d'après le théorème des fonctions implicites. Nous obtenons alors :

$$v = \begin{bmatrix} w_1 \mathcal{R}_1(w_2, w_3) \\ (1 - w_1) \mathcal{R}_2(w_2, w_3) \\ (w_1 \mathcal{R}_1(w_2, w_3) + (1 - w_1) \mathcal{R}_2(w_2, w_3)) w_4 \\ w_1 \mathcal{R}_1(w_2, w_3) \mathcal{E}_1(w_2, w_3) + (1 - w_1) \mathcal{R}_2(w_2, w_3) \mathcal{E}_2(w_2, w_3) + \frac{w_4^2}{2} (w_1 \mathcal{R}_1(w_2, w_3) + (1 - w_1) \mathcal{R}_2(w_2, w_3)) \end{bmatrix}.$$

Nous allons, dans un premier temps, déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial v_i}{\partial w_j}$; puis nous inverserons ces relations afin d'obtenir les $\frac{\partial w_i}{\partial v_j}$ et donc en particulier les $\frac{\partial p}{\partial v_j}$. Pour cela, nous différencions le vecteur v par rapport aux w_j . Il nous faut maintenant déterminer les $\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial w_j}$.

Dans ce but, nous utilisons les identités thermodynamiques (*Annexe D*) suivantes :

$$dp = c_i^2 d\rho_i + \rho_i k_i T ds_i, \quad T ds_i = de_i - \frac{p}{\rho_i^2} d\rho_i, \quad dp = \left(c_i^2 - \frac{k_i p}{\rho_i} \right) d\rho_i + \rho_i k_i de_i.$$

Nous obtenons donc :

$$d\rho_i = \frac{\gamma_i}{c_i^2} dp - \frac{\rho_i k_i C_i^v \gamma_i}{c_i^2} dT,$$

$$de_i = \frac{\gamma_i C_i^v}{\rho_i c_i^2} (\rho_i c_i^2 - k_i p) dT + \left(\frac{p \gamma_i}{\rho_i^2 c_i^2} - \frac{\gamma_i C_i^v k_i T}{\rho_i c_i^2} \right) dp,$$

où $\gamma_i = \frac{c_i^2}{c_i^2 - C_i^v k_i T}$ et $k_i = \frac{1}{\rho_i T} \left(\frac{\partial p}{\partial s_i} \right)_{\rho_i}$.

Ainsi a-t-on :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial w_2} = \frac{\gamma_i}{c_i^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial w_3} = -\frac{\rho_i k_i C_i^v \gamma_i}{c_i^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial w_2} = \frac{p \gamma_i}{\rho_i^2 c_i^2} - \frac{\gamma_i C_i^v k_i T}{\rho_i c_i^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial w_3} = \frac{\gamma_i C_i^v}{\rho_i c_i^2} (\rho_i c_i^2 - k_i p).$$

Nous obtenons enfin la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial v_i}{\partial w_j} \right)_{i,j}$, que nous inversons avec Maple[®]. Les dérivées $\frac{\partial p}{\partial v_j}$ ($p = w_2$) sont finalement déterminées explicitement. En raison de la longueur de ces expressions, nous ne les détaillerons pas ici.

Expression de la vitesse du son

La vitesse du son est alors obtenue en réinjectant ces expressions dans l'équation (2.2). Après de lourdes simplifications, cette vitesse s'écrit :

$$c_m = \sqrt{-\frac{\rho_1 \rho_2 k_1 k_2}{\rho \cdot den} c_1^2 c_2^2 (\gamma_1 \alpha_1 C_1^v \rho_1 + \gamma_2 \alpha_2 C_2^v \rho_2)}, \quad (2.3)$$

avec $den = c_1^2 \alpha_1 \rho_2 k_2^2 \rho_1 (\gamma_1 - 1) \alpha_2 \gamma_2 C_2^v + c_2^2 \alpha_2 \rho_1 k_1^2 \rho_2 (\gamma_2 - 1) \alpha_1 \gamma_1 C_1^v - k_1 k_2 (\rho_1 \rho_2 (c_1^2 \alpha_2^2 \gamma_2 C_2^v + c_2^2 \alpha_1^2 \gamma_1 C_1^v) + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 (c_1^2 \rho_1^2 C_1^v + c_2^2 \rho_2^2 C_2^v))$.

Or, comme $\gamma_i = \frac{c_i^2}{c_i^2 - C_i^v k_i^2 T}$, on peut aussi écrire :

$$c_m = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 (\gamma_1 \alpha_1 C_1^v \rho_1 + \gamma_2 \alpha_2 C_2^v \rho_2)}{\rho \left(c_1^2 \gamma_2 \alpha_2^2 C_2^v + c_2^2 \gamma_1 \alpha_1^2 C_1^v + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 (c_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C_1^v + c_2^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} C_2^v) - 2 \alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 \sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)} \gamma_1 \gamma_2 C_1^v C_2^v \right)}}. \quad (2.4)$$

Difficultés rencontrées et leurs résolutions

Face à la complexité des dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ du cas général et avant d'obtenir l'expression (2.4), nous avons commencé par étudier le cas particulier des gaz parfaits dont les lois d'état sont les suivantes : $\mathcal{R}_i(p, T) = \frac{p}{(\gamma_i - 1) C_i^v T}$ et $\mathcal{E}_i(p, T) = C_i^v T$. En suivant la méthode du cas général, la vitesse du son de ce cas particulier est :

$$c_m = \sqrt{\frac{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) \rho_1 c_1^2 + \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \rho_2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1))}}.$$

Afin de généraliser progressivement, nous nous sommes par la suite intéressés au cas des « stiffened gas », correspondant aux lois d'état suivantes :

$$\mathcal{R}_i(p, T) = \frac{p + \frac{\pi_i}{\gamma_i}}{(\gamma_i - 1) C_i^v T} \text{ et } \mathcal{E}_i(p, T) = C_i^v T + \frac{\pi_i (\gamma_i - 1) C_i^v T}{\gamma_i (p + \frac{\pi_i}{\gamma_i})}.$$

Nous avons ainsi obtenu la vitesse du son ci-dessous :

$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1^2 \rho_2 c_2^2 (\alpha_1 \rho_1 c_1^2 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 \rho_2 c_2^2 (\gamma_1 - 1))}{den_{stiff}}},$$

où $den_{stiff} = \rho (c_1^2 c_2^2 \rho_1 \rho_2 (\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1)) - c_1^2 \rho_1 (-\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \pi_2 - \alpha_2^2 \gamma_2 \pi_1 + \alpha_1 \pi_2 \gamma_2) - c_2^2 \rho_2 (-\alpha_2 \alpha_1 \gamma_2 \pi_1 - \alpha_1^2 \gamma_1 \pi_2 + \alpha_2 \pi_1 \gamma_1) + (\gamma_2 \pi_1 - \gamma_1 \pi_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_1 \pi_2^2 - \alpha_2 \gamma_2 \pi_1^2 + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) \pi_1 \pi_2)$.

C'est ainsi que nous avons pu en complexifiant petit à petit aborder le cas général.

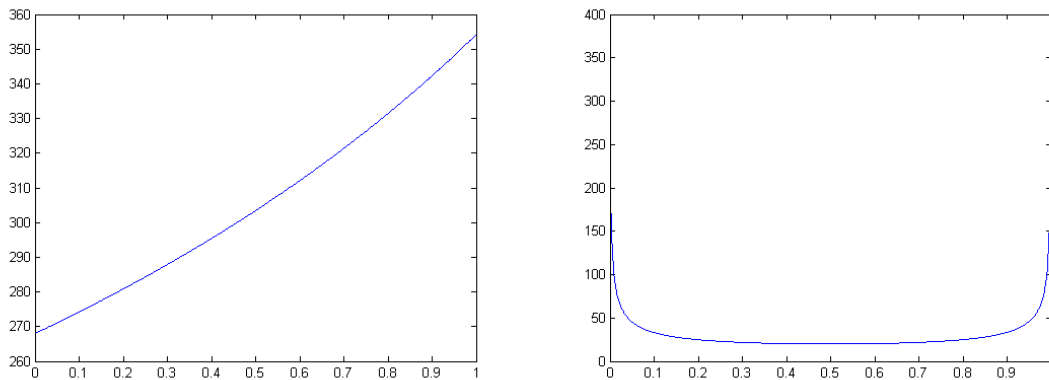
Vérifications et tracés

Nous avons effectué quelques vérifications afin de nous assurer de la validité de nos expressions. Tout d'abord, lorsque nous annulons α_1 (resp. α_2) dans l'expression (2.4), nous retrouvons c_2 (resp. c_1), vitesse du son dans le mono-fluide 2 (resp. 1). De plus, nous remarquons que la valeur de c_m est homogène à une vitesse et symétrique ; ce qui est en concordance avec le fait que nos fluides jouaient le même rôle dans le modèle de départ.

Nous avons ensuite vérifié l'expression de la vitesse générale par confrontation avec les cas particuliers. Pour cela, nous nous sommes assurés que dans le cas où les fluides 1 et 2 sont

des gaz parfaits, nous retrouvons bien la vitesse calculée dans ce cas précis. De même, les vitesses « stiffened gas » et gaz parfaits coïncident, lorsque les deux fluides sont supposés parfaits ($\pi_i = 0$).

Voici quelques exemples de tracés de la vitesse du son dans les cas gaz parfaits et « stiffened gas » :



(a) Azote (gaz parfait), CO_2 (gaz parfait) en fonction de la proportion en CO_2 (b) Air (gaz parfait), eau (stiffened gas) en fonction de la proportion en eau

FIGURE 2.1: Tracés de la vitesse du son c_m , système une vitesse non isentropique : à $25^\circ C$ sous 1,013 bar

Les données numériques utilisées ici sont reportées à l'annexe B.

Nous allons, par la suite, étudier le même modèle dans le cas isentropique. Nous verrons que les courbes de la vitesse du son dans ce nouveau cas semblent identiques, à l'œil nu, aux courbes précédentes. La différence de monotonie sera expliquée au niveau de ce paragraphe.

1.1.2 Vitesse mécanique : équations linéarisées

Pour calculer la vitesse du son mécanique définie en section 2 du chapitre 1, nous reprenons le système (2.1) afin de déterminer une équation vérifiée par p .

Comme il est difficile de donner l'équation d'état non linéaire en p , nous avons alors décidé de travailler en mode linéaire. Nous considérons donc chaque quantité physique comme la somme d'une quantité constante et d'un terme d'ordre 1 (une quantité d'ordre 1 dérivée reste d'ordre 1) : $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $u = 0 + \delta u$, $\rho_1 = \rho_{10} + \delta\rho_1$, $\rho_2 = \rho_{20} + \delta\rho_2$, $\alpha_1 = \alpha_{10} + \delta\alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_{20} + \delta\alpha_2$, $e_1 = e_{10} + \delta e_1$ et $e_2 = e_{20} + \delta e_2$. D'après l'invariance galiléenne, nous avons considéré sans perte de généralité que u variait autour de la valeur fixe 0.

Le système (2.1) linéarisé devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (2.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (2.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (2.5c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} + \alpha_{10} e_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} e_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta e_2}{\partial t} + \alpha_{20} e_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} \\ + \rho_{20} e_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} + p_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \alpha_{10} e_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \alpha_{20} e_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (2.5d)$$

Après de longs calculs (cf. *Annexe F*), l'équation d'onde vérifiée par p est alors :

$$\left[\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \Gamma_2}{\Gamma_1} + \rho_{20} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left[\frac{\Gamma_2}{\rho_0 \Gamma_1} - \frac{p_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

où $\rho_0 = \alpha_{10} \rho_{10} + \alpha_{20} \rho_{20}$ et les inconnues β_i et Γ_i sont définies en *Annexe F*.

De plus, le système 2.1 se ramène à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équation d'onde (2.6),} \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

De l'équation (2.6), nous obtenons la vitesse du son suivante :

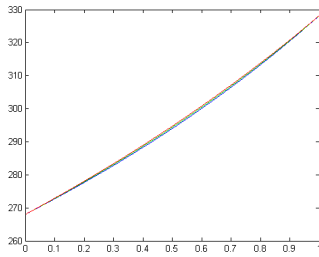
$$c_p = \sqrt{\frac{\left(\frac{\Gamma_2}{\rho_0 \Gamma_1} - \frac{p_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right)}{\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \Gamma_2}{\Gamma_1} + \rho_{20} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1}}}. \quad (2.8)$$

Nous pouvons déjà remarquer que les expressions des vitesses mathématique, mécanique et thermodynamique sont différentes. Néanmoins, les valeurs restent très proches (les erreurs relatives entre ces 3 vitesses sont inférieures à 0.01%) et les courbes des vitesses ont la même allure.

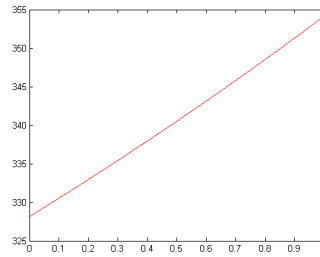
Nous vous avons tracé quelques exemples dans le cas particulier des gaz parfaits.

Fluide	Vitesse
Azote	$354,1 \text{ m.s}^{-1}$
CO_2	$268,0 \text{ m.s}^{-1}$
Oxygène	$328,1 \text{ m.s}^{-1}$

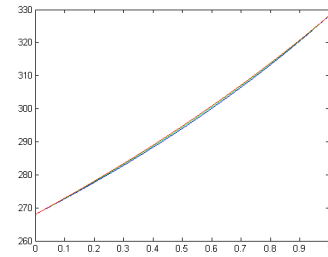
TABLE 2.1: Valeur commune aux trois vitesses du son dans les mono-fluides



(a) Azote, CO_2 en fonction de la proportion en azote



(b) Azote, Oxygène en fonction de la proportion en azote



(c) Oxygène, CO_2 en fonction de la proportion en oxygène

FIGURE 2.2: Comparaison des différentes vitesses du son, système une vitesse non isentropique : à 25°C sous $1,013 \text{ bar}$

La courbe verte correspond à la vitesse mécanique, la rouge à la vitesse thermodynamique et la bleue représente la vitesse mathématique. On peut remarquer que ces trois vitesses sont proches malgré des expressions très différentes.

1.2 Cas isentropique

Tout en restant dans le modèle à une vitesse, nous nous plaçons dans le cas particulier isentropique correspondant aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

L'égalité des pressions permet de relier ρ_1 à ρ_2 par la formule $\rho_2 = \mathcal{P}_2^{-1}(\mathcal{P}_1(\rho_1))$. On a donc ajouté une contrainte à notre système : ρ_2 dépend de ρ_1 .

1.2.1 Vitesse mathématique : calculs et résolutions

Résolution du système

Comme précédemment, nous posons $v = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho u)$ et $f(v) = (\alpha_1 \rho_1 u, \alpha_2 \rho_2 u, \rho u^2 + p)$, où v prend ses valeurs dans $G = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. On peut alors exprimer f , précédemment définie, comme une fonction de v :

$$f(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{v_1 v_3}{v_1 + v_2}, \frac{v_2 v_3}{v_1 + v_2}, \frac{v_3^2}{v_1 + v_2} + p \right),$$

En introduisant la matrice jacobienne de f , on obtient le système linéarisé suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v) \frac{\partial v}{\partial x} = S(v),$$

où $A(v) = df(v)$ et $S(v) = (0, 0, 0)$.

Après calculs avec Maple[®], la matrice jacobienne est la suivante :

$$A(v) = \begin{bmatrix} \frac{v_3}{v_1 + v_2} - \frac{v_1 v_3}{(v_1 + v_2)^2} & -\frac{v_1 v_3}{(v_1 + v_2)^2} & \frac{v_1}{v_1 + v_2} \\ -\frac{v_2 v_3}{(v_1 + v_2)^2} & \frac{v_3}{v_1 + v_2} - \frac{v_2 v_3}{(v_1 + v_2)^2} & \frac{v_2}{v_1 + v_2} \\ -\frac{v_3^2}{(v_1 + v_2)^2} + \frac{\partial}{\partial v_1} p(v_1, v_2, v_3) & -\frac{v_3^2}{(v_1 + v_2)^2} + \frac{\partial}{\partial v_2} p(v_1, v_2, v_3) & 2 \frac{v_3}{v_1 + v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3} p(v_1, v_2, v_3) \end{bmatrix}.$$

En annulant les vitesses (soit $v_3 = 0$), on obtient la matrice :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_1}{v_1 + v_2} \\ 0 & 0 & \frac{v_2}{v_1 + v_2} \\ \frac{\partial}{\partial v_1} p(v_1, v_2, 0) & \frac{\partial}{\partial v_2} p(v_1, v_2, 0) & \frac{\partial}{\partial v_3} p(v_1, v_2, 0) \end{bmatrix}.$$

Pour le moment, l'expression de la vitesse du son dépend des $\frac{\partial p}{\partial v_i} : \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\alpha_1 \rho_1 \frac{\partial p}{\partial v_1} + \alpha_2 \rho_2 \frac{\partial p}{\partial v_2} \right)}$.

En effet, puisque le système est admissible, nous savons que les valeurs propres de A_0 appartiennent à $\{-c_m, 0, c_m\}$, où la valeur propre strictement positive c_m est la vitesse du son.

Nous allons maintenant chercher une expression de la vitesse du son dépendant des vitesses du son dans chaque mono-fluide i .

Pour cela, nous différencions les relations algébriques du système, ce qui donne :

$$0 = d\alpha_1 + d\alpha_2, \quad dp = c_1^2 d\rho_1 = c_2^2 d\rho_2. \quad (2.10)$$

De l'équation précédente, nous déduisons : $d\rho_2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} d\rho_1$ et par différentiation de v , nous obtenons :

$$\begin{cases} dv_1 = \alpha_1 d\rho_1 + \rho_1 d\alpha_1, \\ dv_2 = \alpha_2 d\rho_2 + \rho_2 d\alpha_2. \end{cases}$$

Nous nous ramenons donc à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 d\rho_1 + \rho_1 d\alpha_1 = dv_1, \\ \frac{c_1^2}{c_2^2} \alpha_2 d\rho_1 - \rho_2 d\alpha_1 = dv_2. \end{cases}$$

Les formules de Cramer nous fournissent les expressions :

$$d\rho_1 = \frac{c_2^2(\rho_2 dv_1 + \rho_1 dv_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \quad d\rho_2 = \frac{c_1^2(\rho_1 dv_2 + \rho_2 dv_1)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2},$$

qui, réinjectées dans l'équation (2.10), donnent :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2 (\rho_2 dv_1 + \rho_1 dv_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}.$$

nous permettant ainsi d'avoir les dérivées partielles de p suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial v_1} = \frac{c_1^2 c_2^2 \rho_2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_2} = \frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_3} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Expression de la vitesse du son

On remplace, dans l'expression de c , les $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ par les expressions que l'on vient de déterminer. On obtient alors la vitesse en fonction des paramètres voulus.

$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 c_1^2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 \rho_2 c_2^2 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2)}}. \quad (2.12)$$

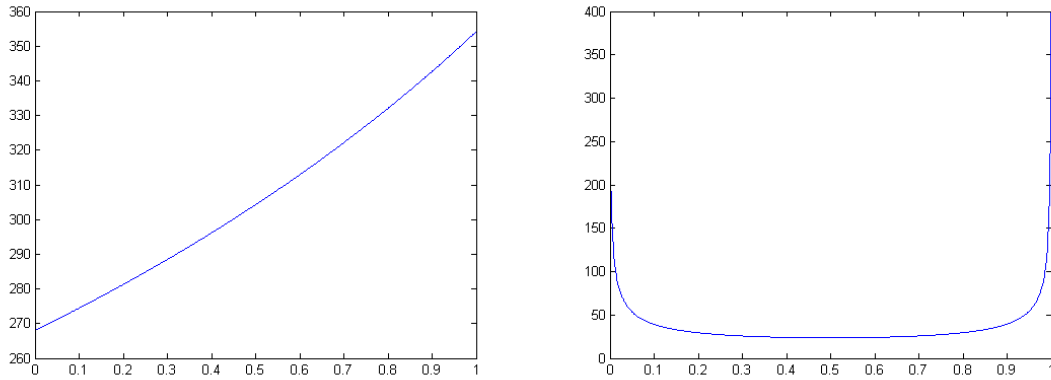
Nous pouvons également écrire cette vitesse sous la forme plus simple suivante :

$$\frac{1}{\rho c_m^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}.$$

Vérifications et tracés

Nous avons réalisé là encore quelques vérifications : homogénéité et symétrie de la vitesse du son.

Nous pouvons désormais chercher à étudier l'allure de la courbe c_m . Nous réalisons ceci avec Matlab™. Prenons l'exemple de différents gaz parfaits ou « stiffened gas » :



(a) Azote (gaz parfait), CO_2 (gaz parfait) en fonction de la proportion en CO_2 (b) Air (gaz parfait), eau (stiffened gas) en fonction de la proportion en eau

FIGURE 2.3: Tracés de la vitesse du son c_m , système une vitesse isentropique : à $25^\circ C$ sous $1,013 \text{ bar}$

Remarque On peut remarquer que dans le cas azote- CO_2 , la courbe est monotone, contrairement à celle du mélange eau-air. Nous avons prouvé qu'il existe toujours un minimum pour la vitesse mathématique du son dans ce modèle une vitesse isentropique (cf. *annexe C*). Or, dans le mélange azote- CO_2 , ce minimum est atteint en une abscisse négative (-0.91). Or, la vitesse du son n'est définie que sur $[0, 1]$; ceci n'a donc aucun sens physique et n'a pas été tracé sur le graphique.

1.2.2 Vitesse mécanique : équations linéarisées

Comme expliqué dans le cas non isentropique, nous partons du système (2.9) que nous linéarisons autour de l'état d'équilibre, à vitesse nulle.

Nous adoptons des notations similaires au cas non isentropique. La linéarisation du système (2.9) donne :

$$\begin{cases} \alpha_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} + \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, & (2.13a) \\ \alpha_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, & (2.13b) \\ \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0. & (2.13c) \end{cases}$$

En dérivant les équations du système (2.13) et en utilisant la relation $\delta p = c_1^2 \delta \rho_1 = c_2^2 \delta \rho_2$, nous

obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{10}}{c_1^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} + \rho_{10} \frac{\partial^2 (\delta \alpha_1)}{\partial t^2} + \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t \partial x} = 0, \\ \frac{\alpha_{20}}{c_2^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} + \rho_{20} \frac{\partial^2 (\delta \alpha_2)}{\partial t^2} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t \partial x} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

En additionnant $\frac{(2.13a)}{\rho_{10}}$ et $\frac{(2.13b)}{\rho_{20}}$, on trouve : $\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial \delta p_1}{\partial t} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial \delta p_2}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0$, soit

$$\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10} c_1^2} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20} c_2^2} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Finalement, par soustraction et dérivation des équations (2.14) et (2.13c), on a l'équation d'onde :

$$\left(\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10} c_1^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20} c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0, \quad (2.15)$$

avec $\rho_0 = \alpha_{10} \rho_{10} + \alpha_{20} \rho_{20}$.

De plus, le système (2.9) se ramène à

$$\begin{cases} \text{l'équation d'onde (2.15),} \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

La vitesse mécanique du son est donc la suivante :

$$c_p = \sqrt{\frac{\rho_{10} \rho_{20} c_1^2 c_2^2}{(\alpha_{10} \rho_{20} c_2^2 + \alpha_{20} \rho_{10} c_1^2) \rho_0}}, \quad (2.17)$$

Nous avons également la relation plus simple suivante :

$$\frac{1}{\rho_0 c_p^2} = \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10} c_1^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20} c_2^2}.$$

Contrairement au cas non isentropique, dans ce système, les vitesses du son mécanique et mathématique coïncident. De plus, cette expression correspond également à la vitesse du son thermodynamique ($c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_1, s_2, \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}}}$) présentée à la section 3 du chapitre 1.

2 Extension de la définition à certains systèmes non admissibles : modèle à deux vitesses

Désormais, nous allons utiliser l'extension de la définition de la vitesse du son dans le cadre de mélanges où les deux fluides ont des vitesses différentes u_1 et u_2 .

2.1 Cas non isentropique

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas non isentropique correspondant au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 E_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1 H_1)}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2 H_2)}{\partial x} + p \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.18a) \\ (2.18b) \\ (2.18c) \\ (2.18d) \\ (2.18e) \\ (2.18f) \end{array}$$

Nous allons réitérer la même étude que précédemment.

2.1.1 Vitesse mathématique : calculs et résolutions

Résolution du système

On pose $v = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_1 \rho_1 E_1, \alpha_2 \rho_2 E_2) \in G$ et $f(v) = (\alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p, \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p, \alpha_1 \rho_1 u_1 H_1, \alpha_2 \rho_2 u_2 H_2)$, où G est l'ouvert connexe $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{e_1 > 0\} \times \{e_2 > 0\}$.

Grâce aux relations $H_k = E_k + \frac{p}{\rho_k}$, $k = 1, 2$, nous pouvons écrire f en fonction de v sous la forme :

$$f(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = (v_3, v_4, \frac{v_3^2}{v_1} + \alpha_1 p, \frac{v_4^2}{v_2} + p \alpha_2, \frac{v_5 v_3}{v_1} + \frac{v_3 \alpha_1}{v_1} p, \frac{v_6 v_4}{v_2} + \frac{v_4 \alpha_2}{v_2} p).$$

Comme dans le modèle à une vitesse, l'expression première de la vitesse du son fait intervenir les $\frac{\partial p}{\partial v_i}$. Or, notre but n'est pas d'obtenir cette vitesse du son en fonction de ces dérivées

partielles mais en fonction des paramètres physiques et de la vitesse du son dans chaque mono-fluide i . Pour ce faire, nous allons commencer par chercher v sous la forme d'une fonction explicite en w (variables physiques judicieusement choisies), puis en inversant la matrice jacobienne de cette fonction, nous pourrions déduire les dérivées $\frac{\partial p}{\partial v_i}$.

Tout d'abord, on pose $w = (\alpha_1, p, u_1, u_2, \rho_1, \rho_2)$. En utilisant les lois d'état $\mathcal{P}_1(\rho_1, e_1)$, $\mathcal{P}_2(\rho_2, e_2)$ et le théorème des fonctions implicites, nous pouvons écrire e_i comme une fonction de p et ρ_i : $e_i = \mathcal{E}_i(p, \rho_i)$; nous obtenons alors, en utilisant l'identité $E_i = e_i + \frac{1}{2}u_i^2$, le vecteur v suivant :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 = \alpha_1 \rho_1 = w_1 w_5 \\ v_2 = \alpha_2 \rho_2 = (1 - w_1) w_6 \\ v_3 = \alpha_1 \rho_1 u_1 = w_1 w_5 w_3 \\ v_4 = \alpha_2 \rho_2 u_2 = w_4 w_6 (1 - w_1) \\ v_5 = \alpha_1 \rho_1 E_1 = w_1 w_5 (\mathcal{E}_1(w_2, w_5) + \frac{1}{2} w_3^2) \\ v_6 = \alpha_2 \rho_2 E_2 = (1 - w_1) w_6 (\mathcal{E}_2(w_2, w_6) + \frac{1}{2} w_4^2) \end{bmatrix}.$$

Nous avons, dans un premier temps, cherché un développement limité de $\mathcal{E}_i(p, \rho_i)$ valable quelque soit la loi d'état. À cette fin, nous avons utilisé les identités thermodynamiques (cf. *Annexe D*). Nous obtenons ainsi :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial \rho_i} \right)_p = -\frac{1}{\rho_i^2 k_i} (\rho_i c_i^2 - k_i p), \quad \left(\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial p} \right)_{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i k_i}.$$

En différentiant v , nous obtenons l'expression des dv_i en fonction des dw_j . Puis, nous inversons ces expressions à l'aide de Maple[®]. Nous obtenons finalement les dérivées $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ ($p = w_2$) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial v_1} = \frac{(e_1 k_1 k_2 p - \frac{k_1 p}{\rho_1} \rho_2 c_2^2 + \frac{k_1 p^2 k_2}{\rho_1} + c_1^2 \rho_2 c_2^2 - e_1 k_1 \rho_2 c_2^2 - c_1^2 k_2 p)}{(\rho_2 c_2^2 \alpha_1 - k_2 p \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2 - p k_1 \alpha_2)}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_2} = \frac{(e_2 k_1 k_2 p - \frac{k_2 p}{\rho_2} \rho_1 c_1^2 + \frac{k_1 p^2 k_2}{\rho_2} + c_1^2 \rho_1 c_2^2 - e_2 k_2 \rho_1 c_1^2 - c_2^2 k_1 p)}{(\rho_2 c_2^2 \alpha_1 - k_2 p \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2 - p k_1 \alpha_2)}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_3} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial v_4} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial v_5} = \frac{\rho_2 k_1 c_2^2 - k_1 k_2 p}{(\rho_2 c_2^2 \alpha_1 - k_2 p \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2 - p k_1 \alpha_2)}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_6} = \frac{\rho_1 k_2 c_1^2 - k_1 k_2 p}{(\rho_2 c_2^2 \alpha_1 - k_2 p \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 c_1^2 - p k_1 \alpha_2)}. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Une fois la matrice jacobienne calculée, nous avons étudié les termes $p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$ et $p \frac{\partial \alpha_i}{\partial x}$ qui interviennent dans les dernières équations du système. Or, lors du calcul des $\frac{\partial p}{\partial v_i}$ précédents, nous

avons déterminé une expression explicite des dw_j en fonction des dv_i . Comme $w_1 = \alpha_1$, nous connaissons donc la valeur des coefficients A_j^i définis par

$$d\alpha_i = A_1^i dv_1 + A_2^i dv_2 + A_3^i dv_3 + A_4^i dv_4 + A_5^i dv_5 + A_6^i dv_6.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, nous avons } A_1^1 &= \frac{(-\alpha_2 c_1^2 + \alpha_2 k_1 (\frac{p}{\rho_1} + e_1))}{(-\alpha_2 (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2) + p(k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_1))}, A_2^1 = \frac{(\alpha_1 c_2^2 - \alpha_1 k_2 (\frac{p}{\rho_2} + e_2))}{(-\alpha_2 (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2) + p(k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_1))}, \\ A_3^1 &= 0, A_4^1 = 0, A_5^1 = \frac{-\alpha_2 k_1}{(-\alpha_2 (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2) + p(k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_1))}, A_6^1 = \frac{\alpha_1 k_2}{(-\alpha_2 (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2) + p(k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_1))}, \\ A_j^2 &= -A_j^1, \forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire que

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \\ p \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pA_1^1 & pA_2^1 & pA_3^1 & pA_4^1 & pA_5^1 & pA_6^1 \\ pA_1^2 & pA_2^2 & pA_3^2 & pA_4^2 & pA_5^2 & pA_6^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_4}{\partial x} \\ \frac{\partial v_5}{\partial x} \\ \frac{\partial v_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ p \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pA_1^1 & pA_2^1 & pA_3^1 & pA_4^1 & pA_5^1 & pA_6^1 \\ pA_1^2 & pA_2^2 & pA_3^2 & pA_4^2 & pA_5^2 & pA_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \\ \frac{\partial v_4}{\partial t} \\ \frac{\partial v_5}{\partial t} \\ \frac{\partial v_6}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Finalement, nous pouvons ramener le système (2.18) à l'équation :

$$M_1 \frac{\partial v}{\partial t} + (A(v) - M_2) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\text{où } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ pA_1^1 & pA_2^1 & pA_3^1 & pA_4^1 & 1 + pA_5^1 & pA_6^1 \\ pA_1^2 & pA_2^2 & pA_3^2 & pA_4^2 & pA_5^2 & 1 + pA_6^2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pA_1^1 & pA_2^1 & pA_3^1 & pA_4^1 & pA_5^1 & pA_6^1 \\ pA_1^2 & pA_2^2 & pA_3^2 & pA_4^2 & pA_5^2 & pA_6^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $A(v)$ est la matrice jacobienne de f .

Le système (2.18) peut finalement s'écrire sous la forme d'une équation non conservative :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + E \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

où l'on a posé $E = M_1^{-1}(A(v) - M_2)$.

Comme dans le modèle à une vitesse, nous allons ensuite annuler les vitesses physiques u_1 et u_2 dans E ce qui nous donne une matrice E_0 ; le spectre étant inclus dans $\{0, -c_m, c_m\}$; la vitesse du son sera alors la valeur propre strictement positive de cette nouvelle matrice.

Expression de la vitesse du son

Après simplification, la vitesse du son de ce modèle est :

$$c_m = \sqrt{\frac{c_2^2 c_1^2 (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\alpha_1 c_2^2 \rho_2 + \alpha_2 c_1^2 \rho_1}}, \quad (2.20)$$

Cette vitesse peut également s'écrire sous la forme :

$$\frac{\underline{\rho}}{c_m^2} = \frac{\alpha_2 \rho_1}{c_2^2} + \frac{\alpha_1 \rho_2}{c_1^2},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2$.

Difficultés rencontrées et leur résolution

Comme une première étape vers le cas général, nous avons tout d'abord étudié le cas où un de nos deux fluides était un gaz parfait et l'autre incompressible (ρ_2 constant). Nous avons alors directement une relation courte et explicite entre les α_i et les v_i : $\alpha_1 = 1 - \frac{v_2}{\rho_2}$ et $\alpha_2 = \frac{v_2}{\rho_2}$. Il est alors beaucoup plus simple de déterminer les $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}$ et les $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$. Par une résolution similaire à celle du cas général expliqué précédemment, nous obtenons alors la vitesse du son dans ce cas précis :

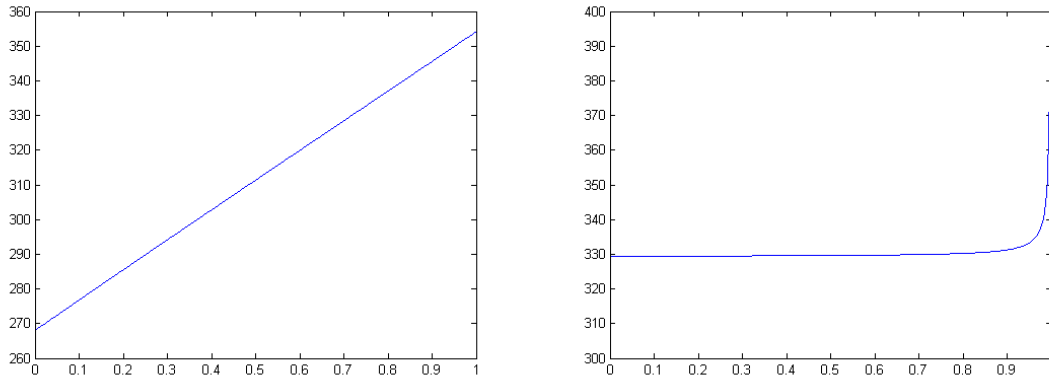
$$c_m = \sqrt{\frac{\gamma_1 p (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\rho_2 \alpha_1 \rho_1}}.$$

Nous remarquons que cette formule n'est pas symétrique mais nous pouvions nous y attendre dès le départ. En effet, cela est en accord avec la dissymétrisation réalisée. Supposer que ρ_2 est constant, revient à supposer que la vitesse du son dans le fluide 2 est infinie.

Vérifications et tracés

Nous nous assurons de la symétrie et de l'homogénéité de la vitesse du son. De plus, en annulant α_1 (resp. α_2), nous retrouvons la vitesse du son dans les mono-fluides. Nous vérifions également que la vitesse du son obtenue dans le cas particulier « gaz parfait » est cohérente avec celle du cas général.

Voici quelques exemples de tracés de la vitesse du son dans les cas gaz parfaits et stiffened gas :



(a) Azote (gaz parfait), CO_2 (gaz parfait) en fonction de la proportion en CO_2 (b) Air (gaz parfait), eau (stiffened gas) en fonction de la proportion en eau

FIGURE 2.4: Tracés de la vitesse du son c_m , système une vitesse non isentropique : à $25^\circ C$ sous 1,013 bar

Pour les données numériques utilisées ici, voir *Annexe B*.

2.1.2 Vitesse mécanique : équations linéarisées

Nous allons démontré qu'au sein du modèle à deux vitesses, le système non isentropique (2.18) est équivalent à celui isentropique (2.23). La vitesse mécanique est donc la même dans ces deux systèmes. Par souci de simplification, nous l'avons déterminée dans le cas isentropique. (cf. *section 2.2* du chapitre 2)

Proposition 1. *Le système (2.18) est équivalent à*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D(\alpha_1 \rho_1)}{Dt} = -\alpha_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \frac{D(\alpha_2 \rho_2)}{Dt} = -\alpha_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ \frac{Du_1}{Dt} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{Du_2}{Dt} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{De_1}{Dt} = -\frac{p}{\alpha_1 \rho_1} \frac{D\alpha_1}{Dt} - \frac{p}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \frac{De_2}{Dt} = -\frac{p}{\alpha_2 \rho_2} \frac{D\alpha_2}{Dt} - \frac{p}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.21a) \\ (2.21b) \\ (2.21c) \\ (2.21d) \\ (2.21e) \\ (2.21f) \end{array}$$

Démonstration. • Tout d'abord, les deux premières équations du système (2.21) sont obtenues trivialement.

- On déduit ensuite de l'équation (2.18c) l'équation (2.21c), en appliquant le lemme de l'annexe A avec $\varepsilon = \alpha_1 \rho_1$, $A = u_1$ et $u = u_1$. Afin de satisfaire les hypothèses du lemme, on vérifie l'équation (2.18a).
- Enfin, on retrouve, à partir de l'équation (2.18e), l'équation (2.21e). En effet, en réinjectant $\rho H_i = p + \rho e_i + \frac{1}{2} \rho u_i^2$, $\rho E_i = \rho e_i + \frac{1}{2} \rho u_i^2$, dans l'équation (2.18e), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 e_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 e_1 u_1)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(u_1 \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(u_1 \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \alpha_1 \rho_1 u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \\ = - \frac{\partial(\alpha_1 p u_1)}{\partial x} - p \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

Or, par le deuxième point de la démonstration, nous avons obtenu que

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 e_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 e_1 u_1)}{\partial x} = -p \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - p \frac{\partial(\alpha_1 u_1)}{\partial x}.$$

Enfin, en appliquant le lemme de l'annexe A à l'équation précédente avec $\varepsilon = \alpha_1 \rho_1$, $A = e_1$, $u = u_1$, on obtient,

$$\frac{De_1}{Dt} = - \frac{p}{\alpha_1 \rho_1} \frac{D\alpha_1}{Dt} - \frac{p}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

De la même manière en remplaçant les indices 1 et 2, on obtient (2.21d) et (2.21f). On a donc montré la proposition. \square

Proposition 2. *Dans le modèle deux vitesses, pour des solutions régulières, le système non isentropique (2.21) est équivalent au système isentropique (2.23).*

Démonstration. En remplaçant dans l'identité thermodynamique $T_1 \frac{Ds_1}{Dt} = \frac{De_1}{Dt} - \frac{p}{\rho_1^2} \frac{D\rho_1}{Dt}$, De_1 et $D\rho_1$ par leurs expressions obtenues au système (2.21), on obtient :

$$\frac{Ds_1}{Dt} = 0.$$

Le même résultat peut être énoncé sur s_2 en échangeant 1 par 2. \square

Ainsi, dans le système à deux vitesses (2.18), l'entropie d'une particule de fluide se conserve au cours du temps. C'est pourquoi, dans ce système, l'équation linéarisée vérifiée par la pression est la même que celle du système isentropique, à savoir :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{10}\rho_{20}}{c_1^2} + \frac{\alpha_{20}\rho_{10}}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^4} + 2 \left(\frac{u_{20}\alpha_{20}\rho_{10}}{c_2^2} + \frac{u_{20}\alpha_{10}\rho_{20}}{c_1^2} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^3 \partial x} - 2u_{20}\alpha_{10}\rho_{20} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t \partial x^3} \\ & + \left(\frac{\alpha_{20}u_{20}^2\rho_{10}}{c_2^2} + \frac{\alpha_{10}u_{20}^2\rho_{20}}{c_1^2} - \alpha_{20}\rho_{10} - \alpha_{10}\rho_{20} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^2 \partial t^2} - u_{20}^2\alpha_{10}\rho_{20} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour le détail des calculs se référer à la section relative au cas isentropique (section 2.2.2 du chapitre 2). Nous vérifierons également que la vitesse mathématique est identique que le modèle soit isentropique ou non.

2.2 Cas isentropique

2.2.1 Vitesse mathématique : calculs et résolutions

Nous considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1\rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2\rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Résolution du système

On pose $v = (\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_1\rho_1 u_1, \alpha_2\rho_2 u_2) \in G$ et $f(v) = (\alpha_1\rho_1 u_1, \alpha_2\rho_2 u_2, \alpha_1\rho_1 u_1^2, \alpha_2\rho_2 u_2^2)$, où G est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^4 : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Nous obtenons ainsi

$$f(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_3, v_4, \frac{v_3^2}{v_1}, \frac{v_4^2}{v_2}).$$

Comme dans les autres systèmes, nous cherchons les dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial v_i}$. La différenciation de v_1 et v_2 fournit :

$$dv_1 = \alpha_1 d\rho_1 + \rho_1 d\alpha_1, \quad dv_2 = \alpha_2 d\rho_2 + \rho_2 d\alpha_2,$$

qui, par les formules de Cramer nous donnent :

$$d\rho_1 = \frac{c_2^2(\rho_2 dv_1 + \rho_1 dv_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \quad d\rho_2 = \frac{c_1^2(\rho_1 dv_2 + \rho_2 dv_1)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}.$$

Réinjecter ces formules dans l'équation $dp = c_1^2 d\rho_1 = c_2^2 d\rho_2$, obtenue en différentiant les lois d'état, permet d'écrire :

$$dp = \frac{c_1^2 c_2^2 (\rho_2 dv_1 + \rho_1 dv_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}.$$

Nous en déduisons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial v_1} = \frac{c_1^2 c_2^2 \rho_2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_2} = \frac{c_1^2 c_2^2 \rho_1}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial v_3} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial v_4} = 0. \end{array} \right.$$

Comme $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} \\ \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial v_1} & \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial v_2} & 0 & 0 \\ \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial v_1} & \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial v_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_4}{\partial x} \end{bmatrix}$, on peut ramener le système (2.23) à

l'équation non conservative :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (A(v) + C) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.24)$$

où $A(v)$ est la matrice jacobienne de f et $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial v_1} & \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial v_2} & 0 & 0 \\ \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial v_1} & \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial v_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il ne nous reste plus qu'à annuler les vitesses physiques dans la matrice $E = A(v) + C$ pour obtenir :

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\alpha_1 c_1^2 c_2^2 \rho_2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2} & \frac{\alpha_1 c_1^2 c_2^2 \rho_1}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2 c_1^2 c_2^2 \rho_2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2} & \frac{\alpha_2 c_1^2 c_2^2 \rho_1}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Expression de la vitesse du son

En calculant les valeurs propres de la matrice E_0 , nous remarquons que, bien que ce système ne soit pas admissible (car non hyperbolique), le spectre est inclus dans

$\{0, 0, \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 (\alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}}, -\sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 (\alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}}\}$. Néanmoins, grâce à l'extension de la définition de

la vitesse mathématique du son (cf. *chapitre 1*), nous pouvons tout de même définir celle-ci comme :

$$c_m = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 (\alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2)}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2}},$$

ou encore, sous une forme plus lisible :

$$\frac{\rho}{c_m^2} = \frac{\alpha_2 \rho_1}{c_2^2} + \frac{\alpha_1 \rho_2}{c_1^2},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2$.

Vérifications et tracés

Une fois la symétrie et l'homogénéité vérifiées, nous nous assurons qu'en annulant α_1 ou α_2 , nous retrouvons la vitesse du mono-fluide i .

De plus, nous pouvons également souligner que nous retrouvons la même expression de la vitesse mathématique que dans le cas non isentropique (exposé section 2.1 du chapitre 2). Ceci est en adéquation avec le fait que les systèmes deux vitesses isentropique et non isentropique sont équivalents.

Nous n'avons pas réinséré les courbes de la vitesse du son ; celles-ci sont identiques à celles tracées en 2.1 du chapitre 2.

Remarques sur la monotonie

Nous observons, à travers les différents graphiques représentés dans ce rapport, que la monotonie des courbes de vitesse du son mathématique varie d'un système à l'autre et d'un mélange à l'autre. Nous avons donc cherché des conditions dynamiques et sur les plages de valeurs pour savoir, à l'avance, dans quel cas on se trouve. Tout d'abord, il convient de constater que le modèle à deux vitesses se caractérise par une vitesse du son mathématique (c_m) monotone en $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

Proposition 3. *Dans le modèle à deux vitesses, la courbe de vitesse mathématique est monotone en α et sera croissante si*

$$\rho_2 \geq \rho_1.$$

Elle sera décroissante dans le cas contraire.

En revanche, dans le modèle à une vitesse, la monotonie de c_m va dépendre de la plage de valeurs associées au mélange considéré. Ainsi, une condition dynamique ne suffit pas, ici, pour conclure sur la monotonie de la vitesse du son. En effet, nous avons montré que dans ce modèle, l'expression de la vitesse du son présente un minimum théorique en $\alpha_1 = \frac{2\rho_1\rho_2c_1^2 - \rho_2^2c_2^2 - \rho_1^2c_1^2}{2(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2c_2^2 - \rho_1c_1^2)}$. Néanmoins, cette vitesse du son n'est définie que pour $\alpha_1 \in [0, 1]$. Ainsi, pour certaines valeurs de ρ_1, ρ_2, c_1 et c_2 , l'intervalle $[0, 1]$ se situera dans un domaine monotone de la courbe

de vitesse. Nous avons également étudié la vitesse comme une fonction de α afin d'obtenir une expression du minimum symétrique en les deux fluides ; le minimum est alors atteint en

$$\alpha = \frac{\rho_1 \rho_2 (c_2^2 - c_1^2)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 c_1^2 - \rho_2 c_2^2)}.$$

Proposition 4. *Dans le modèle à une vitesse isentropique, la vitesse du son n'est monotone en α que si*

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (c_2^2 - c_1^2)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 c_1^2 - \rho_2 c_2^2)} \notin [-1, 1].$$

Le modèle à une vitesse non isentropique semble présenter les mêmes caractéristiques que celui isentropique mais nous n'avons pas réussi à mener les calculs jusqu'au bout.

2.2.2 Vitesse mécanique : équations linéarisées

Nous partons du système (2.23).

Nous allons linéariser autour d'un état d'équilibre. Par invariance galiléenne, nous pouvons imposer à l'une des vitesses physiques d'être nulle (ici u_1). En revanche, supposer u_1 et u_2 nulles nous ramènerait à un autre modèle : celui à une vitesse.

En linéarisant ces équations et en utilisant des notations classiques, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} + \rho_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} = 0, \quad (2.25a) \\ \alpha_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} + \rho_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} + \alpha_{20} u_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial x} + \rho_{20} u_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial x} = 0, \quad (2.25b) \\ \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + \alpha_{10} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0, \quad (2.25c) \\ \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u_2}{\partial t} + \rho_{20} u_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} + \alpha_{20} u_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + 2\alpha_{20} \rho_{20} u_{20} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} + \\ \rho_{20} u_{20}^2 \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial x} + \alpha_{20} u_{20}^2 \frac{\partial \delta \rho_{20}}{\partial x} + \alpha_{20} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0. \quad (2.25d) \end{array} \right.$$

En remplaçant $\frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} (= -\frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t})$ par son expression issue de l'équation (2.25b) dans l'équation (2.25a), nous déduisons la relation suivante : $\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \alpha_{20} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} + \frac{\alpha_{20} u_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial x} + u_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial x} + \alpha_{10} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} = 0$.

Nous dérivons ensuite cette dernière équation ainsi que l'équation (2.25d), qui combinées nous donnent l'expression : $\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 \delta \rho_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta \rho_2}{\partial t^2} - \frac{\alpha_{20} u_{20}^2}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta \rho_2}{\partial x^2} - u_{20}^2 \frac{\partial^2 \delta \alpha_2}{\partial x^2} - 2u_{20} \alpha_{20} \frac{\partial^2 \delta u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0$.

Puis, nous remplaçons ensuite $\frac{\partial^2 \delta u_2}{\partial x^2}$ dans cette dernière équation par son expression issue

de l'équation (2.25b) dérivée par rapport à x , l'équation devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 \delta \rho_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta \rho_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_{20} u_{20}^2}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta \rho_2}{\partial x^2} + \frac{2u_{20} \alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta \rho_2}{\partial x \partial t} - u_{20}^2 \frac{\partial^2 \delta \alpha_1}{\partial x^2} \\ - 2u_{20} \frac{\partial^2 \delta \alpha_1}{\partial x \partial t} - \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

La dérivation de l'équation (2.25a) nous fournit une expression pour $\frac{\partial^2 \delta \alpha_1}{\partial t \partial x}$ que nous injectons dans l'équation (2.26).

Nous dérivons ensuite l'expression trouvée, puis en remplaçant $\frac{\partial^3 \delta \alpha_1}{\partial t \partial x^2}$ par sa valeur obtenue à partir de l'équation (2.25a) dérivée deux fois et $\frac{\partial^3 \delta u_1}{\partial t \partial x^2}$ par l'équation (2.25d), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^4 \delta \rho_1}{\partial t^4} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^4 \delta \rho_2}{\partial t^4} + \frac{\alpha_{20} u_{20}^2}{\rho_{20}} \frac{\partial^4 \delta \rho_2}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{2u_{20} \alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^4 \delta \rho_2}{\partial x \partial t^3} + u_{20}^2 \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^4 \delta \rho_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha_{10} u_{20}^2 \frac{\partial^4 \delta u_1}{\partial x^3 \partial t} + 2u_{20} \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^4 \delta \rho_1}{\partial t^3 \partial x} - \\ \frac{2u_{20} \alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t \partial x^3} - \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant $\delta p = c_1^2 \delta \rho_1 = c_2^2 \delta \rho_2$ et l'équation (2.25c), et après simplifications, nous obtenons l'équation d'onde vérifiée par p :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_{10} \rho_{20}}{c_1^2} + \frac{\alpha_{20} \rho_{10}}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^4} + 2 \left(\frac{u_{20} \alpha_{20} \rho_{10}}{c_2^2} + \frac{u_{20} \alpha_{10} \rho_{20}}{c_1^2} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t^3 \partial x} - 2u_{20} \alpha_{10} \rho_{20} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial t \partial x^3} \\ + \left(\frac{\alpha_{20} u_{20}^2 \rho_{10}}{c_2^2} + \frac{\alpha_{10} u_{20}^2 \rho_{20}}{c_1^2} - \alpha_{20} \rho_{10} - \alpha_{10} \rho_{20} \right) \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^2 \partial t^2} - u_{20}^2 \alpha_{10} \rho_{20} \frac{\partial^4 \delta p}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cette équation étant d'ordre 4, nous n'avons pu trouver une expression simple de la vitesse du son mécanique dans le modèle bi-fluide à deux vitesses.

3 Pour aller plus loin

3.1 Modèle à masse ajoutée

Le modèle à masse ajoutée suppose que chaque fluide communique une accélération à l'autre fluide. L'effet du fluide 1 sur le fluide 2 sera modélisé par une masse ajoutée, qui intervient au niveau de la quantité de mouvement. Cette masse ajoutée est ici représentée par la variable \mathcal{A} , qui a la dimension d'une masse volumique.

Les équations de ce modèle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i v_i)}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho_2 = \rho_{20} = \text{constante}, \\ p = p_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}} \right)^{\gamma_1}, \\ v_1 = u_1 - \frac{\mathcal{A}}{\alpha_1 \rho_1} (u_2 - u_1), \\ v_2 = u_2 + \frac{\mathcal{A}}{\alpha_2 \rho_2} (u_2 - u_1), \\ \mathcal{A} = C_a \alpha_1 \alpha_2 \rho, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Le coefficient C_a s'appelle coefficient de masse ajoutée. On peut remarquer qu'au sein du modèle considéré ici, un des fluides suit une loi gaz parfait de Laplace tandis que l'autre est supposé incompressible.

Comme pour chaque système, notre but est de déterminer la vitesse mathématique du son. Nous allons donc suivre la même démarche qu'expliquée précédemment.

Nous posons le vecteur des variables conservatives $w = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \rho_1 v_1, \alpha_2 \rho_2 v_2)$ défini sur un ouvert connexe G . Soit

$$f(w) = (\alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_1 \rho_1 u_1 v_1 + \alpha_1 p, \alpha_2 \rho_2 u_2 v_2 + \alpha_2 p).$$

Nous avons, après calculs, l'équation :

$$0 = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{p}{\rho_{20}} \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{p}{\rho_{20}} \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Nous exprimons ensuite u_1 et u_2 en fonction des variables conservatives en résolvant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_4 = u_2 w_2 + C_a \frac{w_2}{\rho_{20}} \left(1 - \frac{w_2}{\rho_{20}} \right) (w_1 + w_2) (u_2 - u_1), \\ w_3 + w_4 = w_2 u_2 + w_1 u_1. \end{array} \right.$$

Ainsi, les expressions de u_1 et u_2 nous permettent de nous ramener au système classique quasi-linéaire faisant intervenir la matrice jacobienne de f .

$$0 = \frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Néanmoins, ces expressions de u_i et $A(w)$, trop volumineuses, n'ont pas été reportées ici.

Nous calculons alors A_0 la matrice A où nous avons annulé les vitesses physiques des fluides et vérifions que le spectre est bien inclus dans $\{-c_m, 0, c_m\}$ où

$$c_m^2 = \frac{\gamma_1 p (C_a \underline{\rho} + \underline{\rho})}{\alpha_1 (C_a \underline{\rho}^2 + \rho_1 \rho_{20})},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_{20}$.

La vitesse c_m est donc la vitesse mathématique du son.

Ouverture

Nous avons étudié ce système dans le but de pallier la non-hyperbolicité du système deux fluides, deux vitesses. En effet, nous espérons que l'introduction du coefficient C_a , sous certaines hypothèses, rendrait le système hyperbolique. Pour cela, nous avons cherché les valeurs de C_a pour lesquelles nous avons l'hyperbolicité ; cependant, les calculs se sont vite révélés, malgré nos simplifications, insurmontables. Par manque de temps, il nous a été impossible de mener jusqu'au bout ce calcul.

3.2 Modèle aéré

Jusqu'à présent, nous avons déterminé nos différentes expressions de la vitesse du son (mathématique et mécanique) à partir des équations d'Euler. Celles thermodynamiques, ont quant à elles, étaient déterminées en travaillant sous forme différentielle et en utilisant les identités thermodynamiques. Comme précédemment, nous allons chercher à déterminer une vitesse du son thermodynamique sans utiliser les équations d'Euler, ni différentier les lois d'état. On se place dans un modèle bi-fluide et non diphasique, il n'y a donc pas d'échange de masse entre les deux fluides. Ainsi, par conservation de la masse du système et par extensivité de l'énergie interne, le système est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\underline{\rho}} = \frac{q_g}{\rho_g} + \frac{1-q_g}{\rho_l} \\ e = q_g e_g + (1-q_g) e_l, \\ \rho_i = \mathcal{R}_i(p, T), \\ e_i = \mathcal{E}_i(p, T), \end{array} \right. \quad (2.29)$$

où q_g est le titre massique du gaz.

Nous allons chercher à exprimer p en fonction de ρ_i et e_i . En effet, on sait que $T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$ et $dp = \rho k T ds + c^2 d\rho$. Ainsi, nous pourrions alors déterminer c_t .

Le système 2.29 contient quatre équations d'états : deux pour chaque fluide, une sur ρ et une sur e . Notre objectif va donc être d'inverser ce système pour obtenir ainsi $T = \mathcal{T}(\rho, e)$ mais surtout $p = \mathcal{P}(\rho, e)$. Néanmoins, cette inversion n'est possible que pour certaines lois d'état.

Nous supposons donc que notre mélange se compose d'un liquide et d'un gaz qui suivent tous deux une loi « stiffened gas », à savoir :

$$p = (\gamma_i - 1)\rho_i e_i - \pi_i, \quad e_i = C_i^v T + \frac{\pi_i}{\gamma_i \rho_i}.$$

Nous pouvons alors en déduire une expression de la masse volumique ρ et de e en fonction de p et T :

$$\mathcal{R}_i(p, T) = \frac{p\gamma_i + \pi_i}{C_i^v T \gamma_i (\gamma_i - 1)}, \quad \mathcal{E}_i(p, T) = \frac{\gamma_i C_i^v T (p + \pi_i)}{p\gamma_i + \pi_i}.$$

En réinjectant ces équations dans les deux premières équations du système, nous obtenons :

$$\rho e = \frac{q_g \gamma_g (p + \pi_g) (\gamma_l p + \pi_l) C_g^v + (1 - q_g) \gamma_l (p + \pi_l) (\gamma_g p + \pi_g) C_l^v}{q_g \gamma_g (\gamma_g - 1) (\gamma_l p + \pi_l) C_g^v + (1 - q_g) \gamma_l (\gamma_l - 1) (\gamma_g p + \pi_g) C_l^v}.$$

Nous supposons dans un premier temps que le gaz suit une loi gaz parfait, i.e $\pi_g = 0$. Nous trouvons alors pour ρe :

$$\rho e = \frac{q_g \gamma_g C_g^v p (\gamma_l p + \pi_l) + (1 - q_g) \gamma_l (p + \pi_l) \gamma_g p C_l^v}{q_g \gamma_g p (\gamma_l p + \pi_l) C_g^v + (1 - q_g) \gamma_l (\gamma_l - 1) \gamma_g p C_l^v}.$$

On peut remarquer que dans ce cas précis, la variable T s'est simplifiée et que ρe s'écrit comme une fraction rationnelle en p . On peut donc poser $\rho e = \varphi(p)$. En différentiant cette égalité, de peut s'exprimer en fonction de dp et $d\rho$. Or, d'après les identités thermodynamiques (cf. *Annexe D*), on a : $de = \frac{1}{k\rho} dp - \frac{1}{k\rho^2} (\rho c^2 - kp) d\rho$. En identifiant, nous obtenons :

$$c_i^2 = \frac{\varphi(p) + p}{\rho \cdot \varphi'(p)}.$$

Finalement, nous trouvons après simplifications :

$$c_i^2 = \frac{num}{den},$$

où

$$num = p\gamma_g^2 (\gamma_l C_l^v (p + \pi_l) (1 - q_g) + q_g \gamma_g C_g^v (\gamma_l p + \pi_l) + \gamma_l C_l^v (\gamma_l - 1) (1 - q_g^p)) (q_g C_g^v (\gamma_g - 1) (\gamma_l p + \pi_l) + \gamma_l C_l^v (\gamma_l - 1) (1 - q_g) p),$$

et

$$den = (\gamma_g^2 \pi_l^2 q_g C_g^v (\gamma_g - 1) (q_g C_g^v + \gamma_l C_l^v (1 - q_g)) + 2\gamma_g^2 (\gamma_g - 1) C_g^v q_g \gamma_l p \pi_l ((1 - q_g) C_l^v + q_g C_g^v) - \gamma_g^2 \gamma_l^2 p^2 (-C_l^v C_g^v q_g (1 - q_g) (\gamma_l - 1) - q_g^2 (C_g^v)^2 (\gamma_g - 1) - (1 - q_g)^2 (C_l^v)^2 (\gamma_l - 1))) \rho.$$

Nous revenons maintenant au cas général où le gaz et le liquide suivent une loi « stiffened gas » et nous obtenons de la même manière :

$$c_i^2 = \frac{num_{stiff}}{den_{stiff}},$$

$$num_{stiff} = (\pi_g + \gamma_g p) (\pi_l + \gamma_l p) (q_g \gamma_g C_g^v + (1 - q_g) \gamma_l C_l^v) \\ (q_g \gamma_g (\gamma_g - 1) (\gamma_l p + \pi_l) C_g^v + (1 - q_g) \gamma_l (\gamma_l - 1) (\pi_g + \gamma_g p) C_l^v),$$

$$den_{stiff} = (\gamma_l p + \pi_l)^2 \gamma_g (C_g^v)^2 q_g^2 (\gamma_g - 1) + (\pi_g + \gamma_g p)^2 \gamma_l^2 (C_l^v)^2 (1 - q_g)^2 (\gamma_l - 1) \\ + \gamma_g \gamma_l C_l^v C_g^v (1 - q_g) q_g \left((\pi_g + p)^2 \gamma_l (\gamma_l - 1) + (\gamma_l - 1) (\gamma_g - 1) ((\gamma_l + \gamma_g) p^2 - 2\pi_g \pi_l) + (\pi_l + p)^2 \gamma_g (\gamma_g - 1) \right).$$

Ce système correspond au mélange courant, eau-air, présent dans l'écume des vagues. Nous avons ici considéré q_g constant. En revanche, dans la réalité, l'extrémité de la vague est bien plus aérée que le centre et donc cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Chapitre 3

Similitudes et divergences entre les trois définitions via l'expérience

Dans ce chapitre, nous allons vous montrer comment interpréter nos résultats théoriques à l'aide de comparaisons expérimentales.

Pour cela, nous avons cherché à confronter nos expressions mathématiques, mécaniques et thermodynamiques à des données empiriques et à des modèles numériques.

1 Vitesse mathématique et données expérimentales

Nous avons dans un premier temps recherché des données expérimentales de la vitesse du son dans différents bi-fluides. Notre objectif était alors de repérer quel modèle mathématique était le plus proche des données empiriques et donc de classer nos bi-fluides selon leur appartenance ou non à un modèle.

1.1 Résultats concluants

La majorité de nos résultats était plutôt satisfaisante. Nous allons vous présenter les plus caractéristiques. Pour certains bi-fluides comme le mélange CO_2 -air, nous pouvons nettement distinguer deux groupes de courbes : un premier correspondant au modèle où les deux fluides ont la même vitesse, un second où les deux fluides ont des vitesses distinctes.

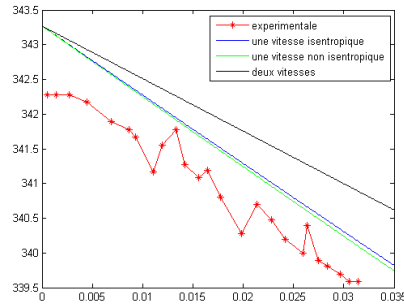


FIGURE 3.1: Tracés de la vitesse du son dans le bi-fluide CO_2 -air en fonction de la proportion en CO_2

À partir de ces tracés, nous pouvons ici conclure qu'un mélange CO_2 -air semble ici plus proche du modèle à une seule vitesse. En revanche, il paraît très délicat de s'avancer sur l'entropie du mélange. En effet, nous pouvons remarquer qu'au sein du modèle à une seule vitesse, les systèmes isentropique et non isentropique sont très proches. La validité du résultat serait donc très limitée.

Nous avons ensuite réalisé la même comparaison sur différents bi-fluides. Voici un échantillon de nos résultats :

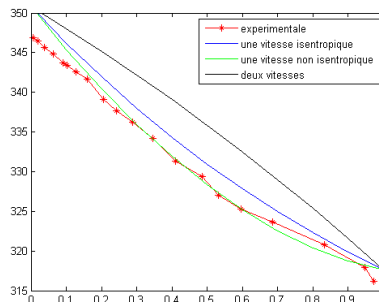


FIGURE 3.2: Tracés de la vitesse du son dans le bi-fluide $Ar-N_2$ en fonction de la proportion en Ar

On remarque ici que le modèle à une vitesse non-isentropique semble le plus adapté au bi-fluide $Ar-N_2$. Néanmoins, un certain degré d'incertitude persiste sur la non isentropie. En effet, le modèle à une vitesse isentropique est relativement proche de celui non isentropique.

Nous avons réalisé cette même comparaison sur un mélange air-eau :

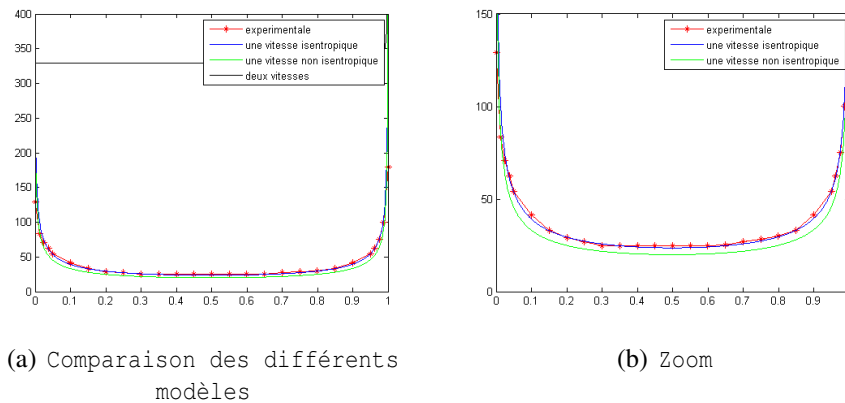


FIGURE 3.3: Tracés de la vitesse du son dans le bi-fluide air-eau en fonction de la proportion en eau

De manière encore plus marquée ici, le modèle à une vitesse correspond le plus à notre bi-fluide. De plus, ce modèle semble se comporter de manière isentropique. En effet, la courbe bleue coïncide étroitement avec la courbe expérimentale. Enfin, nous retrouvons théoriquement et dans ce cas précis la valeur du minimum de la vitesse :

α_{eau}	c_{min} expérimentale	c_{min} mathématique
0.499	20m.s^{-1}	23.69m.s^{-1}

1.2 Difficultés rencontrées

Ainsi, pour certains bi-fluides, les expressions théoriques trouvées nous permettent bien de classifier nos bi-fluides en fonction des modèles introduits précédemment. Néanmoins, nous avons rencontré quelques difficultés. Tout d'abord, il n'a pas été facile de trouver des données sur des fluides couramment utilisés.

De plus, dans de nombreux cas, nos modèles étaient très proches les uns des autres. Il nous était alors impossible de conclure, en voici un exemple :

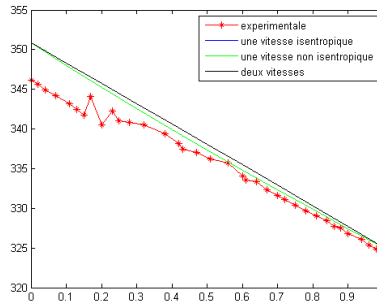


FIGURE 3.4: Tracés de la vitesse du son dans le bi-fluide O_2-N_2 en fonction de la proportion en O_2

Nous nous sommes ensuite penchés sur une nouvelle forme de comparaison : comparaison par simulation numérique.

2 Confrontations mathématique-mécanique par simulation numérique

Notre objectif était de modéliser et de mesurer la vitesse d'une perturbation dans un milieu.

2.1 Modèle

Nous avons modélisé notre milieu par un tube de longueur L . Par la suite, on choisira $L = 20\text{m}$. Nous avons appliqué des conditions périodiques aux bords et nous avons ensuite divisé notre tube en différentes mailles $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ afin de discrétiser le problème.

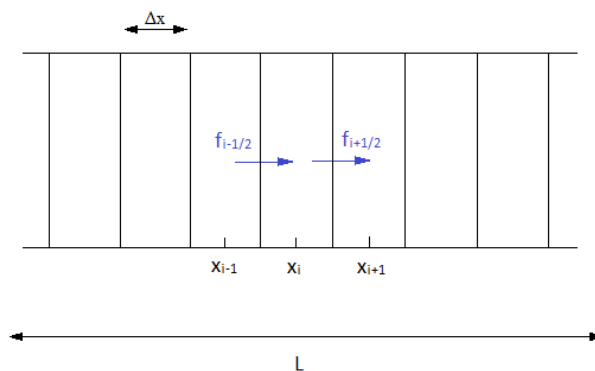


FIGURE 3.5: Modélisation

Nous avons ensuite cherché à calculer l'évolution de p , ρ , u , etc. dans chaque maille.

Nous avons utilisé une méthode à volume fini pour discrétiser nos équations conservatives de la forme $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ obtenues suite à l'étude des différents modèles.

On pose $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. On obtient alors :

$$\frac{\tilde{v}_i(t_n + \Delta t) - \tilde{v}_i(t_n)}{\Delta t} = \frac{\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(t_n) - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}(t_n)}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

où $\tilde{v}_i(t_n) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x, t_n) dx$ et $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(t_n) = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(v(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$.

Cependant, $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(t_n)$ ne peut pas être exprimé en fonction des $\tilde{v}_i(t_n)$. Nous devons donc réaliser une approximation. Pour cela, nous avons utilisé un schéma VFFC (Volume fini avec flux caractéristique) :

Pour simplifier, notons $\tilde{v}_i^n = \tilde{v}_i(t_n)$. On note également λ_k les valeurs propres de la matrice jacobienne de f , r_k (resp. l_k) les vecteurs propres à droite (resp. à gauche) de cette même matrice. En effet, si la matrice jacobienne est régulièrement hyperbolique alors il existe une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice est diagonale.

Nous approchons alors $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(t_n)$ par une fonction qui ne dépend que des valeurs des mailles précédentes et suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}(t_n) &= g(\tilde{v}_{i-1}^n, \tilde{v}_i^n), \\ \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(t_n) &= g(\tilde{v}_{i+1}^n, \tilde{v}_i^n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où g est défini par :

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - M(u, v) \frac{f(v) - f(u)}{2}, \quad (3.3)$$

et

$$M_{i,j}(u, v) = \sum_{k=1}^n \text{signe} \left(\lambda_k \left(\frac{u+v}{2} \right) \right) r_{k,i} \left(\frac{u+v}{2} \right) l_{k,j} \left(\frac{u+v}{2} \right). \quad (3.4)$$

Nous avons travaillé à partir du programme qui nous a été fourni résolvant un système Euler mono-fluide isentropique. Nous l'avons tout d'abord étendu au cas non isentropique, puis nous l'avons adapté à notre premier modèle bi-fluide : modèle à une vitesse isentropique.

Notre objectif était toujours de retrouver la vitesse du son mécanique dans différents bi-fluides à partir cette fois de la simulation numérique mise en place.

2.2 Convergence et stabilité

Nous avons commencé par étudier la convergence et la stabilité du schéma. Le schéma VFFC est stable si le nombre de Courant satisfait la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy condition) :

$$N_c = |\Lambda| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (3.5)$$

Λ est la plus grande valeur propre de la matrice jacobienne. Or, dans notre cas, les valeurs propres sont $u - c$, u , $u + c$. Ainsi, $\Lambda = u + c$. Nous avons donc choisi des valeurs pour Δt et Δx telles que cette condition soit satisfaite.

De plus, afin d'adopter une approche plus réelle, nous avons fait tendre le pas de discrétisation vers 0 et vérifié la convergence du modèle.

2.3 Vitesse du son

Nous avons ensuite initialisé notre code avec une perturbation gaussienne sur ρ ou ρ_1 et ρ_2 dans le cas bi-fluide, au centre de notre tube. La pression, α_1 , α_2 dans le cas bi-fluide, etc. seront aussi modifiés. En effet, toutes ces variables sont liées par l'équation conservative propre à chaque modèle. La perturbation d'une de ces variables affectera les autres. Nous nous sommes alors intéressés à l'évolution du maximum de la perturbation en pression au cours du temps. En effet, le son est une perturbation locale de la pression et la vitesse de cette perturbation correspond à la vitesse mécanique du son.

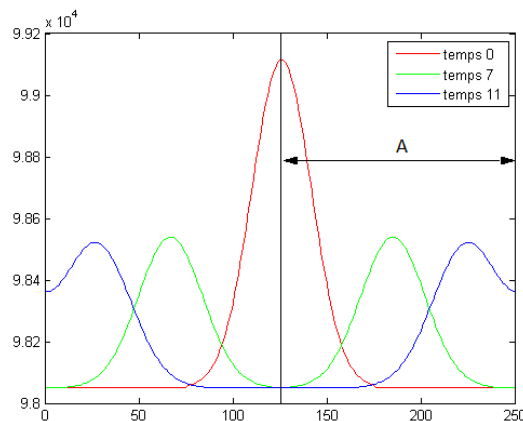


FIGURE 3.6: Modélisation dans un mono-fluide

Afin de déterminer l'avancée de cette perturbation initiale, nous n'avons utilisé que la partie A du graphique. Nous avons ensuite repéré l'abscisse du maximum de pression en fonction du temps jusqu'à l'arrivée de la perturbation au niveau de l'extrémité droite du tube. À partir de ces données nous pouvions alors déterminer la vitesse de la gaussienne, c'est à dire, la vitesse du son. Nous vous joignons le programme Matlab™ en annexe (cf. *Annexe E*).

D'après la section 1.2 du chapitre 2, nous avons vu qu'en partant du système initial à 3 équations, nous arrivions à le linéariser pour obtenir une équation d'onde (d'ordre 2) en pression. Ceci explique l'avancée d'une perturbation à la vitesse c_p et une à la vitesse $-c_p$ (en choisissant u nulle comme dans la linéarisation). Mais, lors de la linéarisation, nous avons également une deuxième équation (cf. système (2.16)). Celle-ci sera à l'origine d'un pic central avançant à la

vitesse u au niveau de la simulation. Néanmoins, ayant choisi u nulle, le pic central sera fixe. Afin de déterminer expérimentalement c_p , nous avons voulu éviter la zone B correspondant au pic central et nous avons donc étudié l'évolution du maximum de pression non pas sur toute la partie A mais sur la partie C uniquement.

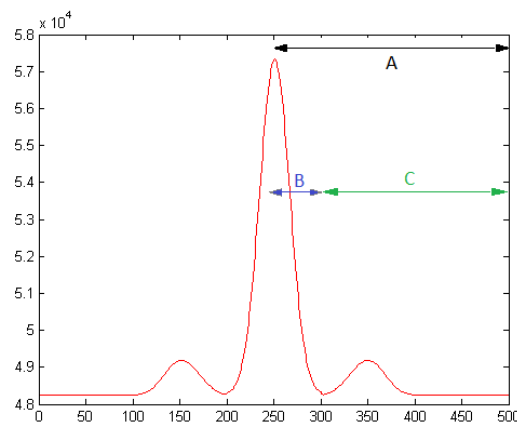


FIGURE 3.7: Modélisation dans un bi-fluide

Après avoir déterminé nos vitesses (mécaniques) à partir de notre simulation, nous avons comparé ces valeurs aux vitesses du son mathématiques théoriques.

Fluide	Vitesse numérique : c_n	Vitesse mathématique : c_m	Différence relative : $\frac{ c_n - c_m }{c_m}$
Air	327 m.s^{-1}	$326,8 \text{ m.s}^{-1}$	0,06 %
Argon	321 m.s^{-1}	$320,6 \text{ m.s}^{-1}$	0,1 %
Azote	355 m.s^{-1}	$354,1 \text{ m.s}^{-1}$	0,2 %
CO_2	$269,0 \text{ m.s}^{-1}$	$268,0 \text{ m.s}^{-1}$	0,4 %
hélium	$1,04 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$	$1,014 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$	2,6 %
Oxygène	329 m.s^{-1}	$328,1 \text{ m.s}^{-1}$	0,3 %

TABLE 3.1: Comparaison des vitesses du son dans les mono-fluides

Ces valeurs de vitesses numériques dans les mono-fluides sont valables tant dans la simulation « Euler » que dans la simulation « une vitesse isentropique » (en considérant deux fois le même fluide).

Fluide 1	Fluide 2	Vitesse numérique : c_n	Vitesse mathématique : c_m	Différence relative :
Azote	Hélium	470m.s ⁻¹	486.5m.s ⁻¹	3.4 %
Azote	Oxygène	342m.s ⁻¹	340.5m.s ⁻¹	0.44 %
Oxygène	Hélium	443m.s ⁻¹	456.3m.s ⁻¹	2.9 %

TABLE 3.2: Comparaison des vitesses du son dans les bi-fluides composés de 50% du fluide 1 et de 50 % du fluide 2

3 Seconde utilisation de la simulation : vitesses thermodynamique et mathématique

Dans un bi-fluide, nous avons vu que nous pouvons définir la vitesse du son thermodynamique comme : $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\alpha_1 \rho_1, s_1, s_2}}$.

Nous avons cherché à déterminer expérimentalement cette vitesse du son. Dans le cas d'un bi-fluide, on a :

$$dp = \beta_1 d\rho + \beta_2 d\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right).$$

Or, avec notre simulation, nous avons accès aux valeurs de α_1 , p , ρ à différents instants. Nous avons donc

$$P = M\beta + \varepsilon$$

$$\text{où } P = \begin{bmatrix} \delta p^1 \\ \delta p^2 \\ \vdots \\ \delta p^n \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \delta \rho^1 & \delta\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)^1 \\ \delta \rho^2 & \delta\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)^2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta \rho^n & \delta\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)^n \end{bmatrix} \text{ et } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon \text{ est l'erreur que l'on minimisera.}$$

δp^i correspond à $p(t_i) - p(t_{i-1})$, $\delta \rho^i$ correspond à $\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})$ et $\delta\left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\right)^i$ correspond à $\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}(t_i) - \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}(t_{i-1})$.

Notre but était de déterminer β_1 et β_2 . Pour cela, nous avons utilisé la méthode statistique des estimateurs aux moindres carrés qui nous donne l'estimateur de β :

$$\hat{\beta} = (M^T M)^{-1} (M^T P). \quad (3.6)$$

De la même manière, on obtient pour les mono-fluides :

$$\hat{\beta} = (N^T N)^{-1} (N^T P). \quad (3.7)$$

$$\text{où } N = \begin{bmatrix} \delta \rho^1 \\ \delta \rho^2 \\ \vdots \\ \delta \rho^n \end{bmatrix}.$$

Nous avons implémenté cette méthode statistique en Matlab™ (cf. *Annexe E*). Finalement, nous avons comparé les valeurs obtenues (vitesses thermodynamiques issues de la simulation) avec nos vitesses mathématiques théoriques :

Fluide	Vitesse numérique : c_n	Vitesse mathématique : c_m	Différence relative : $\frac{ c_n - c_m }{c_m}$
Air	328m.s^{-1}	$326,8 \text{m.s}^{-1}$	0,4 %
Argon	321m.s^{-1}	$320,6 \text{m.s}^{-1}$	0,1 %
Azote	354m.s^{-1}	$354,1 \text{m.s}^{-1}$	0.03 %
CO_2	268m.s^{-1}	268.0m.s^{-1}	≤ 0.01 %
hélium	$1,021.10^3 \text{m.s}^{-1}$	$1,014.10^3 \text{m.s}^{-1}$	0.7 %
Oxygène	328m.s^{-1}	$328,1 \text{m.s}^{-1}$	0.03 %

TABLE 3.3: Comparaison des vitesses du son dans les mono-fluides

Fluide 1	Fluide 2	Vitesse numérique : c_n	Vitesse mathématique : c_m	Différence relative :
Azote	Hélium	451m.s^{-1}	486.5m.s^{-1}	7.3 %
Azote	Oxygène	359m.s^{-1}	340.5m.s^{-1}	5.4 %
Oxygène	Hélium	433m.s^{-1}	456.3m.s^{-1}	5.1 %

TABLE 3.4: Comparaison des vitesses du son dans les bi-fluides composés de 50% du fluide 1 et de 50 % du fluide 2

Conclusion

La vitesse du son, dans les mono-fluides comme dans les bi-fluides, peut se définir de différentes manières, mathématiquement, mécaniquement ou thermodynamiquement. D'un modèle à l'autre, les expressions diffèrent mais les valeurs restent numériquement proches. Il est aussi à noter, que les résultats théoriques obtenus sont en concordance avec les données expérimentales présentes dans la littérature. Ces données concernent des mélanges composés d'un, de deux ou de trois fluides voire plus ; ces derniers multi-fluides, peu étudiés mathématiquement, pourraient faire l'objet d'une étude théorique plus approfondie. Une autre possibilité d'ouverture à ce stage serait l'étude des diphasiques, à ne pas confondre avec les bi-fluides à deux phases, qui se rencontrent fréquemment dans des domaines en plein essor, tels que les énergies renouvelables (géothermie), la météorologie (nuages de pluie)... De par le passage de l'onde sonore, sont à prendre en compte des échanges de masse mais aussi de chaleur latente entre les deux phases, absents dans les bi-fluides précédemment étudiés. Un nouvel équilibre est alors à considérer, l'équilibre liquide-gaz, qui vient complexifier les systèmes précédents. L'étude de la vitesse du son pourrait également être complexifiée et étoffée par l'introduction des ondes de choc. Ces ondes de grandes amplitudes se rencontrent dans le « bang » supersonique d'un avion ou encore lors de la détonation accompagnant une explosion. Dans les exemples cités précédemment, le lien entre la vitesse du son et le phénomène physique est intuitif ; mais subsistent encore de nombreux domaines appliqués dans lesquels la vitesse du son joue un rôle indéniable mais mal défini (volcanisme...). Les expressions de la vitesse du son pourraient constituer une aide aux recherches à venir dans ces différents domaines. Ainsi, la connaissance de cette vitesse du son peut être à la base de différentes théories touchant des domaines d'application divers.

Annexe A

Autour de l'équivalence des systèmes

Nous notons $\frac{DA}{Dt}$ la dérivée particulière : $\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \cdot \nabla A$.

Lemme 2. : Soit K une fonction, si ε vérifie l'équation de conservation

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon u) = 0, \quad (\text{A.1})$$

alors il y a équivalence entre

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{K}{\varepsilon}, \quad (\text{A.2})$$

et

$$\frac{\partial(\varepsilon A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon A u) = K. \quad (\text{A.3})$$

Remarque Le lemme est aussi valable en dimension 1, voir chapitre 1.

Démonstration. (A.3) \Rightarrow (A.2) : on suppose que

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon A u)}{\partial x} = K. \quad (\text{A.4})$$

Alors,

$$K = \varepsilon \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + A \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} \right),$$

Comme on a supposé de plus que ε vérifiait l'équation de conservation (A.1), on en déduit donc que

$$\frac{K}{\varepsilon} = \frac{DA}{Dt}.$$

(A.2) \Rightarrow (A.3) : On suppose que

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{K}{\varepsilon};$$

par définition de la dérivée particulaire, cette hypothèse revient à l'équation suivante : $\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{K}{\varepsilon}$. Par un calcul analogue à la démonstration de la réciproque et en utilisant le fait que ρ vérifie l'équation de conservation (A.1), on en conclut que

$$\frac{\partial(\varepsilon A)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon A u)}{\partial x} = K.$$

□

Lemme 3. *Si toutes les quantités sont suffisamment régulières, les systèmes*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H u) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

et

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div}(u), \\ \frac{Du}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \\ \frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div}(u). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

sont équivalents.

Démonstration. La première équation du système (A.6) est identique à la première équation de (A.5) mais écrite différemment.

En appliquant le lemme précédent avec $A = u$, $\varepsilon = \rho$ et $K = -\frac{\partial p}{\partial x}$, la deuxième équation du système (A.5) est équivalente à la deuxième équation du système (A.6).

La troisième équation du système (A.5) nous fournit, d'après les expressions de E et H (cf. Annexe D) :

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho u^3)}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \rho u + \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}.$$

Utilisons la deuxième équation du système (A.6) et la deuxième équation du système (A.5). Après calcul, on obtient :

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} p.$$

En appliquant le lemme précédant à $A = e$ et $\varepsilon = \rho$, on trouve :

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De même, nous pouvons déduire la troisième équation du système (A.5) à partir du système (A.6), par des calculs analogues. Nous avons ainsi démontré l'équivalence de ces deux systèmes. □

Annexe B

Données expérimentales pour différents bi-fluides

Afin de représenter graphiquement nos expressions de la vitesse du son ou encore de confronter celles-ci avec notre simulation numérique, nous avons utilisé différentes données physiques telles que : ρ , C^v , γ ... Dans la simulation, nous avons étudié le cas des gaz parfaits de Laplace, dont la loi d'état est :

$$p = C_0 \rho^\gamma,$$

$$\text{où } C_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{(\gamma-1)C^v T_0}{\rho_0^{\gamma-1}}.$$

Les différentes données physiques sont prises à 1,013 bar et 25°C. Elles sont issues des sites :

<http://encyclopedia.airliquide.com/encyclopedia.asp>,

<http://www.apithailand.com/carbon.html>.

Azote

$$\begin{aligned}\rho &= 1,185 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 742 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,4038 \\ C_0 &= 83414 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

Oxygène

$$\begin{aligned}\rho &= 1,354 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 659 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,3933 \\ C_0 &= 68593 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

Hélium

$$\begin{aligned}\rho &= 0,169 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 3122 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,664 \\ C_0 &= 2012422 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

Air

$$\begin{aligned}\rho &= 1,29 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 646 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,40 \\ C_0 &= 69581 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

CO₂

$$\begin{aligned}\rho &= 1,823 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 684 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,276 \\ C_0 &= 47690 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

Eau

$$\begin{aligned}\rho &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 166,72 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 7 \\ \pi &= 2,1.10^9 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Argon

$$\begin{aligned}\rho &= 1,67 \text{ kg.m}^{-3} \\ C^v &= 312 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1,664 \\ C_0 &= 43941 \text{ bar.m}^{3\gamma}.\text{kg}^{-\gamma}\end{aligned}$$

Annexe C

Formulaire sur les différentes vitesses mathématiques du son

1 Étude des mono-fluides

1.1 Système Euler

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

Vitesse du son $c_m = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$.

1.2 Système Euler isentropique

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho). \end{array} \right.$$

Vitesse du son $c_m = \sqrt{\mathcal{P}'(\rho)}$.

2 Étude des bi-fluides

Nous avons décidé d'exprimer en annexe les vitesses du son dans les bi-fluides de trois façons différentes :

- La première dépend des fractions volumiques, α_i .
- La deuxième expression fait intervenir les fractions massiques q_i au lieu de la fraction volumique : l'avantage de ces variables est de rester constantes. En effet, la masse ne peut varier que dans les diphasiques, non étudiés dans ce stage.
- Par analogie avec l'expression de la vitesse d'un mono-fluide gaz parfait $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, nous définissons la vitesse du son dans un bi-fluide composé de deux gaz parfaits à partir d'un coefficient adiabatique équivalent γ_{eq} tel que $c^2 = \frac{\gamma_{eq} p}{\rho}$.

2.1 Modèle à une vitesse

2.1.1 a. Cas non isentropique

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right.$$

Vitesse du son

$$c_m = \sqrt{\frac{c_1^2 c_2^2 (\gamma_1 \alpha_1 C_1^v \rho_1 + \gamma_2 \alpha_2 C_2^v \rho_2)}{\rho \left(c_1^2 \gamma_2 \alpha_2^2 C_2^v + c_2^2 \gamma_1 \alpha_1^2 C_1^v + \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 (c_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C_1^v + c_2^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} C_2^v) - 2 \alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 \sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)} \gamma_1 \gamma_2 C_1^v C_2^v \right)}}.$$

Cas particulier des gaz parfaits

$$c_m = \sqrt{\frac{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) \rho_1 c_1^2 + \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \rho_2 c_2^2}{\rho (\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1))}}.$$

Vitesse du son en mécanique des multi-fluides

Expression de la vitesse du son en fonction des fractions massiques (dans le cas particulier des gaz parfaits)

$$c_m = \sqrt{\frac{q_1 \rho_1 \rho_2 (\gamma_2 - 1) c_1^2 + q_2 \rho_2 \rho_1 (\gamma_1 - 1) c_2^2}{\rho (q_1 \rho_2 (\gamma_2 - 1) + q_2 \rho_1 (\gamma_1 - 1))}}.$$

Expression de l'indice adiabatique équivalent (dans le cas particulier des gaz parfaits)

$$\gamma_{eq} = \frac{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) \gamma_1 + \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \gamma_2}{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1)}$$

2.1.2 b. Cas isentropique

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right.$$

Vitesse du son

$$\frac{1}{\rho c_m^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}.$$

Expression de la vitesse du son en fonction des fractions massiques

$$\frac{1}{\rho^2 c_m^2} = \frac{q_1}{\rho_1^2 c_1^2} + \frac{q_2}{\rho_2^2 c_2^2}.$$

Expressions de l'indice adiabatique équivalent

$$\gamma_{eq} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1}.$$

Minimum de la vitesse du son

La vitesse du son dans ce modèle présente un minimum dont la valeur théorique est rappelée dans le tableau ci-dessous.

abscisse du minimum	$\alpha_1 = \frac{2\rho_1\rho_2c_1^2 - \rho_2^2c_2^2 - \rho_1^2c_1^2}{2(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2c_2^2 - \rho_1c_1^2)}$
minimum de la vitesse	$c_m^2 = 4 \frac{c_1^2c_2^2\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2c_2^2 - \rho_1c_1^2)}{(c_2^2\rho_2^2 - c_1^2\rho_1^2)^2}$

TABLE C.1: Étude théorique du minimum de la vitesse mathématique du son

2.2 Modèle à deux vitesses

2.2.1 a. Cas non isentropique

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1\rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2\rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2\rho_2u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1\rho_1u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1u_1^2)}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2\rho_2u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2\rho_2u_2^2)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1\rho_1E_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1u_1H_1)}{\partial x} + p \frac{\partial\alpha_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2\rho_2E_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2\rho_2u_2H_2)}{\partial x} + p \frac{\partial\alpha_2}{\partial t} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right.$$

Vitesse du son

$$\frac{\underline{\rho}}{c_m^2} = \frac{\alpha_2\rho_1}{c_2^2} + \frac{\alpha_1\rho_2}{c_1^2},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_2\rho_1 + \alpha_1\rho_2$.

Cas particulier d'un gaz parfait (1) avec un fluide incompressible (2)

$$c_m = \sqrt{\frac{\gamma_1 p (\rho_2 \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1)}{\rho_2 \alpha_1 \rho_1}}.$$

Expression de la vitesse du son en fonction des fractions massiques

$$\frac{\underline{\rho}}{c_m^2 \rho} = \frac{q_1 \rho_2}{\rho_1 c_1^2} + \frac{q_2 \rho_1}{\rho_2 c_2^2},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_1\rho_2 + \alpha_2\rho_1$.

Expressions de l'indice adiabatique équivalent

$$\gamma_{eq} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \rho (\alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2)}.$$

2.2.2 b. Cas isentropique

Équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right.$$

Vitesse du son

$$\frac{\underline{\rho}}{c_m^2} = \frac{\alpha_2 \rho_1}{c_2^2} + \frac{\alpha_1 \rho_2}{c_1^2},$$

avec $\underline{\rho} = \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2$.

Expression de la vitesse du son en fonction des fractions massiques

$$\frac{\underline{\rho}}{c_m^2 \rho} = \frac{q_1 \rho_2}{\rho_1 c_1^2} + \frac{q_2 \rho_1}{\rho_2 c_2^2},$$

où $\underline{\rho} = \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1$.

Expressions de l'indice adiabatique équivalent

$$\gamma_{eq} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \rho (\alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2)}.$$

L'expression de la vitesse du son mathématique est la même dans ce modèle deux vitesses, isentropique que dans le modèle deux vitesses, non isentropique.

Annexe D

Identités thermodynamiques et relations algébriques

Identités thermodynamiques

Les variables c et k , strictement positives, sont définies par la relation :

$$dp = c^2 d\rho + \rho k T ds. \quad (\text{D.1})$$

En introduisant C^v , nous avons alors :

$$dT = \frac{T}{C^v} ds + \frac{kT}{\rho} d\rho. \quad (\text{D.2})$$

Par définition de s , on a l'identité :

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (\text{D.3})$$

On peut alors déduire des identités précédentes les relations :

$$dp = \left(c^2 - \frac{kp}{\rho} \right) d\rho + \rho k de, \quad (\text{D.4})$$

$$dT = \frac{1}{C^v} de + \left(kT - \frac{p}{\rho C^v} \right) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (\text{D.5})$$

$$dp = \rho k C^v dT + (c^2 - k^2 C^v T) d\rho, \quad (\text{D.6})$$

$$de = \frac{\gamma C^v}{\rho c^2} (\rho c^2 - kp) dT + \frac{c^2 \rho (1 - \gamma) + kp \gamma}{kc^2 \rho^2} d\rho. \quad (\text{D.7})$$

On a également la relation :

$$\gamma = \frac{c^2}{c^2 - C^v k^2 T}. \quad (\text{D.8})$$

Relations algébriques

Dans le cas d'un bi-fluide, nous disposons des relations algébriques suivantes :

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (\text{D.9})$$

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, \quad (\text{D.10})$$

$$\rho e = \alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_2 \rho_2 e_2, \quad (\text{D.11})$$

$$E = e + \frac{1}{2} u^2, \quad (\text{D.12})$$

$$H = h + \frac{1}{2} u^2, \quad (\text{D.13})$$

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \quad (\text{D.14})$$

$$k = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho. \quad (\text{D.15})$$

Annexe E

Simulation numérique : vitesse mécanique et thermodynamique

1 Programme Maximum vitesse

Ce programme a pour but de déterminer une valeur de la vitesse physique du son à partir de la simulation. Comme expliqué au chapitre 3, il se fonde sur la mesure du déplacement du maximum de la pression.

Le fichier « fichierpression » est créé par le programme C.

```
fichierpression;
NT = size(pression,1);
NX = size(pression,2);
L=20;
nombre_maille=500*2;
deltax=L/nombre_maille;
DELTAT=0.00006/2;
t0 = 40;
[val0, pos0]=max(pression(t0,NX/2+70:end));

pos0 = pos0+NX/2+70-1;
posactuel= pos0;
tempsactuel= t0;

while (tempsactuel<NT && posactuel < NX-50)
    [val, pos]=max(pression(tempsactuel+1,posactuel:NX));
    posactuel=posactuel+pos-1;
    tempsactuel=tempsactuel+1;
end
```

```
c=(posactuel - pos0)* deltax/ (20*(tempsactuel-t0) * DELTAT)
```

2 Programme qui calcule la vitesse thermodynamique

Nous nous sommes également servis de la simulation afin de déterminer numériquement une valeur de vitesse thermodynamique. Nous avons utilisé le modèle statistique des estimateurs aux moindres carrés (cf. chapitre 3 section 3) :

Tout comme précédemment, les fichiers « fichierpression », « fichierrho_g », « fichieralpha1rho1_g » et « fichieralpha2rho2_g » ont été créés par l'exécution du programme C.

```
fichierpression;
fichierrho_g;
fichieralpha1rho1_g;
fichieralpha2rho2_g;
NT = size(pression,1);
NX = size(pression,2);

nx0=NX/2+70; afin d'éviter le pic central
Dq1=[];
Drho=[];
P=[];
for j=2:NT
    Dq1=[Dq1;alpha1rho1(j,nx0)/rho(j,nx0)-alpha1rho1(j-1,nx0)/rho(j-1,nx0)];
    Drho=[Drho;rho_g(j,nx0)-rho_g(j-1,nx0)];
    P=[P;pression(j,nx0)-pression(j-1,nx0)];
end

M=[Drho,Dq1];

beta=(M'*M)\(M'*P);
```

Nous avons également testé ce même programme, non plus avec :

```
Dq1=[Dq1;alpha1rho1(j,nx0)/rho(j,nx0)-alpha1rho1(j-1,nx0)/rho(j-1,nx0)];
```

mais avec cette fois :

```
Dq2=[Dq2;alpha2rho2(j,nx0)/rho(j,nx0)-alpha2rho2(j-1,nx0)/rho(j-1,nx0)];
```

Nous avons alors pu vérifier que nous obtenions la même valeur de vitesse. Ainsi, nous avons retrouvé par la simulation que $\frac{\alpha_1 p_1}{\rho}$ et $\frac{\alpha_2 p_2}{\rho}$ sont interchangeables dans la définition thermodynamique du son.

Ce programme peut également être adapté aux modèles mono-fluides.

Annexe F

Système une vitesse non isentropique, équations linéarisées

Nous rappelons le système à une vitesse non isentropique linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} = 0, \\ \alpha_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} = 0, \\ \alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} + \alpha_{10} e_{10} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} e_{10} \frac{\partial \delta \alpha_1}{\partial t} \\ \quad + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta e_2}{\partial t} + \alpha_{20} e_{20} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} e_{20} \frac{\partial \delta \alpha_2}{\partial t} \\ \quad + (p_0 + \rho_0 e_0) \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(F.1a)} \\ \text{(F.1b)} \\ \text{(F.1c)} \\ \text{(F.1d)} \end{array}$$

À partir des trois premières équations, nous obtenons :

$$\alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} - \alpha_{10} \rho_{10} e_{10} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta e_2}{\partial t} - \alpha_{20} \rho_{20} e_{20} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + (\rho_0 e_0 + p_0) \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0,$$

ce qui nous fournit la relation suivante :

$$\alpha_{10} \rho_{10} \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} + \alpha_{20} \rho_{20} \frac{\partial \delta e_2}{\partial t} + p_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0. \quad \text{(F.2)}$$

Par l'équation d'état, $p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2)$, et les identités thermodynamiques suivantes,

$$\delta p = (c_i^2 - \frac{k_i p_0}{\rho_{i0}}) \delta \rho_i + \rho_{i0} k_i \delta e_i, \quad \text{(F.3)}$$

nous déduisons : $(c_1^2 - \frac{k_1 p_0}{\rho_{10}}) \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} k_1 \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} = (c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}}) \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} k_2 \frac{\partial \delta e_2}{\partial t}$.

En combinant cette dernière relation avec la relation (F.2), nous obtenons l'équation de base suivante :

$$(c_1^2 - \frac{k_1 p_0}{\rho_{10}}) \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} (k_1 + \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20}}) \frac{\partial \delta e_1}{\partial t} + \frac{p_0 k_2}{\alpha_{20}} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = (c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}}) \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial t}. \quad (\text{F.4})$$

En utilisant les mêmes identités thermodynamiques que précédemment utilisées (F.3), nous pouvons remplacer la variable δe_1 dans l'équation (F.4) par les variables δp et $\delta \rho_1$. De même nous pouvons remplacer la variable $\delta \rho_2$ par δe_1 et $\delta \rho_1$ et donc par $\delta \rho_1$ et δp .

En effet, les identités thermodynamiques (F.3) nous permettent de relier les variables entre elles :

$$\delta e_2 = \frac{1}{k_2 \rho_{20}} \left(\left(c_1^2 - \frac{k_1 p_0}{\rho_{10}} \right) \delta \rho_1 + \rho_{10} k_1 \delta e_1 - \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \delta \rho_2 \right). \quad (\text{F.5})$$

De la deuxième équation d'état supposée ici, $T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2)$, et de l'identité $\delta T = \frac{\delta e_i}{C_i^v} + \frac{\delta \rho_i}{\rho_{i0}} \left(k_i T_0 - \frac{p_0}{\rho_{i0} C_i^v} \right)$ (cf. annexe D), nous déduisons :

$$\delta \rho_2 = \frac{\rho_{20}^2 C_2^v}{k_2 T_0 \rho_{20} C_2^v - p_0} \left(\frac{\delta e_1}{C_1^v} + \frac{\delta \rho_1}{\rho_{10}} \left(k_1 T_0 - \frac{p_0}{\rho_{10} C_1^v} \right) - \frac{\delta e_2}{C_2^v} \right). \quad (\text{F.6})$$

En remplaçant cette égalité dans l'équation (F.5), nous obtenons :

$$\delta e_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta \rho_1 + \frac{\beta_3}{\beta_1} \delta e_1, \quad (\text{F.7})$$

où les constantes β_i sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\frac{\rho_{20}^2 C_1^v \rho_{10} c_2^2}{\gamma_2}, \\ \beta_2 = \frac{(C_1^v \rho_{10} k_1 - C_2^v \rho_{20} k_2)}{\rho_{10}} p_0^2 + \frac{(C_2^v \rho_{20}^2 c_2^2 - C_1^v \rho_{10}^2 c_1^2)}{\rho_{10}} p_0 + \frac{C_1^v C_2^v \rho_{10} \rho_{20} T (\rho_{10} c_1^2 k_2 - \rho_{20} c_2^2 k_1)}{\rho_{10}}, \\ \beta_3 = \rho_{10} (C_2^v k_2 \rho_{20} - C_1^v k_1 \rho_{10}) p_0 + \rho_{10} \rho_{20} C_2^v (C_1^v \rho_{10} k_1 k_2 T_0 - \rho_{20} c_2^2). \end{array} \right.$$

(NB : γ_i est définie dans l'annexe D par $\gamma_i = \frac{c_i^2}{c_i^2 - C_i^v k_i^2 T}$).

En remplaçant ainsi δe_2 dans l'équation (F.6) par son expression précédemment trouvée, nous obtenons bien $\delta \rho_2$ en fonction de $\delta \rho_1$ et δe_1 :

$$\delta \rho_2 = \frac{\rho_{20}^2}{\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0} \left(\left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \delta e_1 + \left(\frac{C_2^v (\rho_{10} k_1 T_0 C_1^v - p_0)}{C_1^v \rho_{10}^2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta \rho_1 \right). \quad (\text{F.8})$$

Nous avons ainsi les variables δe_1 et $\delta \rho_2$ en fonction de $\delta \rho_1$ et de δp . L'équation (F.4) devient donc :

$$\Gamma_2 \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial t} - \frac{\rho_{20}^2}{\rho_{10} k_1 (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \left(1 + \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{p_0 k_2}{\alpha_{20}} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, \quad (\text{F.9})$$

$$\text{où } \Gamma_2 = \frac{k_2^2 \alpha_{10} (\gamma_1 - 1) (\rho_0 k_1 - c_1^2 \rho_{10}) + k_1^2 \alpha_{20} (\gamma_2 - 1) (\rho_0 k_2 - c_2^2 \rho_{20})}{k_1 k_2 \rho_{10} \alpha_{20} (\gamma_1 - 1)}.$$

Nous avons ainsi pu déterminer une équation liant δp_1 , δp et δu . Afin d'obtenir une équation de pression, il nous faut donc éliminer les variables δu et δp_1 . L'élimination de la première se réalise facilement grâce à l'équation (F.1d) du système initial. Nous allons procéder à l'élimination de la seconde.

Grâce à l'opération $\frac{(F.1a)}{\rho_{10}} + \frac{(F.1b)}{\rho_{20}}$ nous obtenons : $\frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}} \frac{\partial \delta p_1}{\partial t} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}} \frac{\partial \delta p_2}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0$. En remplaçant δp_2 par l'expression (F.8) et en remplaçant δe_1 par l'identité thermodynamique (F.3), nous déterminons ainsi δp_1 en fonction de δp et δu :

$$\frac{\partial \delta p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma_1} \left(\frac{\alpha_{20} \rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right), \quad (F.10)$$

$$\text{où } \Gamma_1 = \frac{\alpha_{10} k_2 \gamma_1 + \alpha_{20} k_1 \gamma_2 - \alpha_{10} k_2 - \alpha_{20} k_1}{\rho_{10} k_2 (\gamma_1 - 1)}.$$

Nous pouvons finalement injecter l'équation (F.10) dans l'équation (F.9), ce qui nous donnera une équation en δp et δu .

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \left[-\frac{\alpha_{20} \rho_{20}}{\rho_{10} k_1 (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] \\ - \frac{\rho_{20}^2}{\rho_{10} k_1 (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} \\ + \left(1 + \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\rho_0 k_2}{\alpha_{20}} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

En dérivant la relation précédente et en utilisant l'équation (F.1d), l'équation d'onde vérifiée par p est la suivante :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \Gamma_2}{\Gamma_1} + \rho_{20} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ - \left[\frac{\Gamma_2}{\rho_0 \Gamma_1} - \frac{\rho_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (F.11) \end{aligned}$$

De l'équation (F.11), nous obtenons la vitesse du son suivante :

$$c_p^2 = \frac{\left(\frac{\Gamma_2}{\rho_0 \Gamma_1} - \frac{\rho_0 k_2}{\rho_0 \alpha_{20}} \right)}{\frac{\rho_{20}}{k_1 \rho_{10} (\rho_{20} k_2 T_0 C_2^v - p_0)} \left(\frac{C_2^v}{C_1^v} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \left(\frac{\alpha_{20} \Gamma_2}{\Gamma_1} + \rho_{20} \left(c_2^2 - \frac{k_2 p_0}{\rho_{20}} \right) \right) - 1 - \frac{\alpha_{10} k_2}{\alpha_{20} k_1}}. \quad (F.12)$$

Annexe G

Théorie de Sturm - Théorie des sous-résultants

Pour l'étude de cette théorie, nous nous sommes fondés sur l'article de Marie-Françoise Roy *Basic algorithms in real algebraic geometry and their complexity : from Sturm theorem to the existential theory of reals*. Les notations utilisées dans cette annexe sont d'ailleurs issues de cet article.

1 Notion de sous-résultants

Définition 12 (Matrice de Sylvester). Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Notons $p = \deg P \vee (\deg Q - 1)$. On appelle la j -ième ($j < q$) matrice de Sylvester de $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^q b_i X^i$ la matrice suivante

$$\text{Sylv}_j(P, Q) = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{a_p \ \cdots \ a_0}^{p+q-j} & & & (0) \\ & \ddots & & \ddots \\ (0) & & a_p \ \cdots \ a_0 & \\ b_q \ \cdots \ b_0 & & & (0) \\ & \ddots & & \ddots \\ (0) & & b_q \ \cdots \ b_0 & \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} \overbrace{a_p \ \cdots \ a_0}^{p+q-j} \\ & \ddots \\ (0) & & a_p \ \cdots \ a_0 \\ b_q \ \cdots \ b_0 & & & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & b_q \ \cdots \ b_0 \end{array}} \right\} p+q-2j,$$

où les a_i sont répartis sur les $q-j$ premières colonnes et les b_i sur les $p-j$ dernières colonnes.

Définition 13 (Matrice $\text{Sylv}_{j,k}$). Pour $k \in \llbracket 0, p+q-j-1 \rrbracket$, on définit $\text{Sylv}_{j,k}(P, Q)$ la matrice carrée $(p-q-2j) \times (p-q-2j)$ constituée des $p+q-2j-1$ premières colonnes et de la $p+q-j-k$ -ième colonne de $\text{Sylv}_j(P, Q)$.

Définition 14 (Sous-résultants). On appelle suite des sous-résultants la suite $\text{Sres}_j(P, Q)$ définie par :

- $\text{Sres}_p(P, Q) = P$

- $Sres_{p-1}(P, Q) = Q$
- $Sres_j(P, Q) = 0$ si $q < j < p - 1$.
- $Sres_q(P, Q) = cf_q Q^{p-q-1} Q$.
- $Sres_j(P, Q) = \sum_{k=0}^j \det(\text{Sylv}_{j,k}(P, Q)) X^k$

On appelle suite des coefficients principaux des sous-résultants :

- $sr_p(P, Q) = 1$
- $sr_p(P, Q) = cf_j(Sres_j(P, Q))$ si $j < p$,

où l'on a posé $cf_j(P)$ le coefficient de degré j du polynôme P .

2 Séquence de Sylvester-Habicht

Définition 15. On définit la séquence de Sylvester-Habicht par la suite de polynômes suivante :

$$\text{SyHa}_j = \delta_{p-j} Sres_j(P, Q)$$

avec $\delta_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Nous définissons, de plus, le j -ème coefficient principal de Sylvester-Habicht par :

$$\text{syha}_j(P, Q) = cf_j(\text{SyHa}(P, Q)).$$

Par convention, nous posons : $\text{syha}_p(P, Q) = 1$.

Définition 16 (Compteur de signe W). Soit la séquence de polynômes : $\mathcal{P} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$, on définit $W(\mathcal{P}; a)$ le nombre de changements de signe de cette séquence en a de la manière suivante :

- on enlève de la séquence les polynômes P_i identiquement nuls
- on compte le nombre de changements de signe dans la séquence de réels $[P_0(a), P_1(a), \dots, P_n(a)]$, en comptant +1 dans les cas $[+, 0, 0-]$ et $[-, 0, 0, +]$, et +2 pour $[+, 0, 0, +]$ et $[-, 0, 0, -]$.

Théorème 3 (Racine de polynôme). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors :

$$W(\text{SyHa}(P, P'); -\infty) - W(\text{SyHa}(P, P'); \infty) = I(P'/P),$$

où $I(P'/P)$ est l'indice de Cauchy (i.e. le nombre de sauts de P'/P de $-\infty$ à $+\infty$ auquel on soustrait le nombre de sauts de $+\infty$ à $-\infty$).

Corollaire 2 (Corollaire fondateur). $I(P'/P) = c(P)$, où $c(P)$ correspond au nombre de racines réelles distinctes du polynôme P .

3 Programmes Maple

3.1 Programme de Sturm

Nous avons implémenté en Maple un premier programme déterminant le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme à partir de la théorie de Sturm (i.e. à partir de divisions euclidiennes successives).

```

coeffdom := proc (P)
  local deg;
  deg := degree(P, X);
  coeff(P, X, deg)
end proc;

sturm3 := proc (P)
  local deg, coeffd, P0, P1, Pn, Pn0, Pn1, l, Coeffl, j, d, degcourant;
  d := 0;
  deg := degree(P, X);
  coeffd := coeffdom(P);

  Coeffl := CoefficientList(P, X);
  P0 := sum(Coeffl[j]*X^(j-1)/coeffd, j = 1 .. deg+1);
  P1 := diff(P0, X);
  Pn0 := P0;
  Pn1 := P1;
  l := [];
  degcourant := deg-2;

  while 0 < degree(Pn1, X) and d = 0 do Pn := -rem(Pn0, Pn1, X);
    if degree(Pn, X) <> degcourant then d := 2 else Pn0 := Pn1;
      Pn1 := Pn;
    end if;
    if not type(evalf(coeffdom(Pn1)), numeric)
      then l := [op(l), coeffdom(Pn1)]
    else if evalf(coeffdom(Pn1)) < 0 then d := 1
      end if
    end if;
    degcourant := degcourant-1
  end do;

  if d = 0 then if nops(l) <> 0 then print(l)
    else print(tous les coefficients dominants sont réels et positifs)
    end if
  elif d = 1 then print(un coefficient dominant est négatif)
  else print(un coefficient dominant est nul)
  end if

end proc;

```

4 Programme des sous-résultants

Nous avons ensuite implémenté en Maple un second algorithme qui se base sur la théorie des sous-résultants.

4.1 Calcul de $Sylv_j$

```
Sylvj := proc (P, j)
  local Pcoeffs, Qcoeffs, p, q, Sj, Q, k, l;
  Q := diff(P, X);
  Pcoeffs := CoefficientList(P, X);
  Qcoeffs := CoefficientList(Q, X);
  p := degree(P, X);
  q := degree(Q, X);
  Sj := Matrix(1 .. p+q-2*j, 1 .. p+q-j);

  for k to q-j do for l to p+1 do
    Sj[k, l+k-1] := Pcoeffs[p+2-l]
  end do;
end do;
for k to p-j do for l to q+1 do
  Sj[k+q-j, l+k-1] := Qcoeffs[q+2-l]
end do;
end do;
Sj
end proc;
```

4.2 Calcul de $Sylv_{j,k}$

```
Sylvjk := proc (P, j, k)
  local Syl, m, n, p, q, Sjk, Q;
  Q := diff(P, X);
  p := degree(P, X);
  q := degree(Q, X);
  Syl := Sylvj(P, j);
  Sjk := Matrix(1 .. p+q-2*j, 1 .. p+q-2*j);

  for m to p+q-2*j do for n to p+q-2*j-1 do
    Sjk[m, n] := Syl[m, n]
  end do;
end do;
for m to p+q-2*j do Sjk[m, p+q-2*j] := Syl[m, p+q-j-k]
end do;
```



```

    Sjk
end proc;

```

4.3 Calcul de S_{res_j}

```

Sres := proc (P)
  local p, q, detaux, Q, j, S, r, l, m;
  Q := diff(P, X);
  p := degree(P, X);
  q := degree(Q, X);
  detaux := Matrix(1 .. q, 1 .. q);

  for l to q do for m to q do
    detaux[l, m] := det(Sylvjk(P, l-1, m-1))
  end do

  end do;
  S := Vector(p+1);
  S[p+1] := P;
  S[p] := Q;

  for j to q do S[j] := add(detaux[j, r]*X^(r-1), r = 1 .. j)
  end do;
  S
end proc;

```

4.4 Calcul de W_{SyHa}

4.4.1 Programme qui fonctionne uniquement avec des coefficients numériques

```

Wsyha := proc (P, a)
  local S, compt, i, avant, zero;
  S := Signe(P, a);
  compt := 0;
  zero := 0;
  avant := 0;
  i := 1;
  if vectdim(S) <> 1 then
    while i <= vectdim(S)-1 do
      if S[i] = 0 then
        zero := zero+1; i := i+1;
        while S[i] = 0 do
          zero := zero+1;
          i := i+1
        end while
      end if
    end while
  end if

```

```

end do;
if zero = 2 then
  if avant = S[i] then
    compt := compt+2;
    zero := 0
  else if avant <> 0 then
    compt := compt+1;
    zero := 0
  end if
end if;
avant := S[i]
else if avant*S[i] = -1 then compt := compt+1
end if;
avant := S[i];
zero := 0
end if
else avant := S[i];
if S[i]*S[i+1] = -1 then compt := compt+1
end if;
i := i+1
end if
end do
end if;
compt
end proc;

```

4.4.2 Programme fonctionnant aussi avec des symboles

```

Wsyha := proc (P, a)
local S, compt, i, avant, zero;
S := Signe(P, a);
compt := 0;
zero := 0;
avant := 0;
i := 1;
testnumerique := 0;
if vectdim(S) <> 1
then
while i <= vectdim(S)-1 and testnumerique = 0 do
  if not type(evalf(S[i]), numeric)
  then testnumerique := 1
  else
  if S[i] = 0

```

```
then
  zero := zero+1; i := i+1;
  while S[i] = 0 do
    zero := zero+1; i := i+1
  end do;
  if zero = 2
  then
    if avant = S[i]
    then
      compt := compt+2;
      zero := 0
    else
      if avant <> 0
      then
        compt := compt+1; zero := 0
      end if
    end if;
  avant := S[i]
else
  if
    avant*S[i] = -1
  then
    compt := compt+1 end if;
    avant := S[i];
    zero := 0
  end if
  else
    avant := S[i]; if S[i]*S[i+1] = -1
  then compt := compt+1 end if;
    i := i+1
  end if
end if
end do
end if;
if testnumerique = 1
  then S
  else compt
end if
end proc;#marche avec les symboles
```


Annexe H

Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne de $f(v)$

Nous allons chercher à déterminer les éléments caractéristiques associés à différents systèmes. Pour chacun de ces systèmes, nous définirons v et $f(v)$ de la même manière qu'au chapitre 2. Nous exprimons ici les vecteurs propres et valeurs propres des matrices qui interviennent dans la forme quasi-linéaire : $\frac{\partial v}{\partial t} + A(v)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ où $A(v) = df(v)$.

1 Système Euler mono-fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right.$$

La matrice $A(v)$ a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Les vecteurs propres à droite de cette matrice jacobienne sont :

$$\begin{aligned} r_1(v) &= (1, u - c, H - uc), \\ r_2(v) &= (1, u, H - \frac{c^2}{k}), \\ r_3(v) &= (1, u + c, H + uc). \end{aligned}$$

Les vecteurs propres à gauche sont :

$$\begin{aligned} l_1(v) &= \frac{1}{2c^2}(K + uc, -ku - c, k), \\ l_2(v) &= \frac{k}{2}(H - u^2, u, 1), \\ l_3(v) &= \frac{1}{2c^2}(K - uc, -ku + c, k). \end{aligned}$$

Nous avons normé ces vecteurs propres pour qu'ils vérifient $r_j(v) \cdot l_k(v) = \delta_{j,k}$.

2 Système deux fluides, une vitesse isentropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = 0, \\ p = \mathcal{P}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{P}_2(\rho_2, e_2), \\ T = \mathcal{T}_1(\rho_1, e_1) = \mathcal{T}_2(\rho_2, e_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{array} \right.$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Les vecteurs propres à droite sont :

$$\begin{aligned} r_1(v) &= \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2}, 1, (u - c) \frac{\rho}{\rho_2 \alpha_2} \right), \\ r_2(v) &= \left(-\frac{\rho_1}{\rho_2}, 1, -u \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \right), \\ r_3(v) &= \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2}, 1, (u + c) \frac{\rho}{\rho_2 \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Les valeurs propres à gauche sont :

$$\begin{aligned}l_1(v) &= \left(\frac{-\rho c - \rho_1 u}{\rho_1}, \frac{-\rho c - \rho_2 u}{\rho_2}, 1 \right), \\l_2(v) &= \left(-\frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2}, 1, 0 \right), \\l_3(v) &= \left(\frac{\rho c - \rho_1 u}{\rho_1}, \frac{\rho c - \rho_2 u}{\rho_2}, 1 \right).\end{aligned}$$

Ici encore, nous avons choisi les vecteurs propres à droite et à gauche de sorte que :

$$l_j(v) \cdot r_k(v) = \delta_{j,k}.$$

Annexe I

Vitesse du son dans des mélanges liquide-gaz de Susan Kieffer

Notes de traduction et contribution à notre stage

La connaissance de la vitesse du son dans les bi-fluides peut constituer un atout essentiel dans la prédiction de certains phénomènes climatiques. En effet, la vitesse du son dans le bi-fluide (ou multi-fluide) formé lors de manifestations éruptives peut par exemple donner des informations capitales sur les caractéristiques d'une éruption volcanique comme sur la hauteur à laquelle l'eau d'un geyser s'élève. Ainsi, Susan Kieffer a écrit un article *Sounds speed in liquid gaz mixtures* qu'elle qualifie elle-même comme : « la phase initiale d'une tentative de développer un modèle quantitatif des éruptions volcaniques et de relier les paramètres thermodynamiques [...] aux paramètres de flux observés lors d'une éruption. » Nous avons traduit cette article intégralement. Il nous a permis de découvrir une utilisation concrète de la vitesse du son. De plus, il constitue également une bonne ouverture sur notre travail. En effet, nous n'avons pas étudié la vitesse du son dans les mélanges bi-phasiques (un seul élément présent sous plusieurs phases comme l'eau et sa vapeur). Elle présente, quant à elle, quelques résultats sur ce type de mélange où il faut considérer les échanges de masse entre les deux phases du même élément. Celles-ci étaient absentes dans les mélanges bi-fluides.

Traduction

Résumé

La vitesse du son dans des bi-fluides, comme un mélange gaz-magma, air-eau ou eau-vapeur, est totalement différente de la vitesse du son dans un des composants du mélange pris à l'état pur. Dans de nombreuses situations géologiques, la vitesse du son dans de tels bi-fluides peut être source d'intérêt : dans la recherche de réservoirs magmatiques, dans la recherche sismique de zones géothermiques, dans la prédiction de la décroissance de la vitesse des ondes P avant les tremblements de terre et dans l'inversion des enregistrements sismiques de la croûte et du

manteau supérieur. De manière probablement plus spectaculaire, les caractéristiques du flux magmatique lors d'éruptions volcaniques ou du flux d'eau et de vapeur dans les geysers sont fortement dépendantes de la vitesse du son du bi-fluide (ou multi-fluide) formée lors de l'éruption. Dans cet article, les vitesses du son de l'eau, de l'air et de la vapeur sont calculées mais aussi celles des mélanges air-eau et air-vapeur. On montre que la vitesse du son calculée à partir des analyses de l'acoustique classique et de la dynamique des fluides concorde avec les résultats obtenus dans la théorie des ondes de « vaporisation » d'amplitude finie. Dans la mesure où l'air et la vapeur sont considérés comme des gaz parfaits avec un coefficient adiabatique γ , indépendant de la température, leur vitesse du son s'exprime de manière simple en fonction de la racine carrée de T . La vitesse du son dans l'eau liquide pure est une fonction complexe de la pression et de la température. Elle est donnée ici à 8 kbar à 900°C. Dans l'eau pure à toutes les pressions, la vitesse du son atteint un maximum près de 100°C et décroît pour des températures plus hautes. À haute pression, la décroissance est continue mais pour des pressions inférieures à 1kbar, la vitesse du son atteint une valeur minimale au voisinage de 500°C et 600°C, après laquelle elle recommence à croître. La vitesse du son d'un mélange air-eau dépend de la pression, de la fraction volumique ou massique de l'air, de la fréquence des ondes sonores et si l'on prend en compte les effets de la tension superficielle dans le modèle, la vitesse du son dépend également du rayon de la bulle. L'ajout de petites fractions volumiques d'air cause une baisse spectaculaire de la vitesse du son d'environ 3 ordres de grandeur. Les vitesses du son d'un liquide pur et d'un gaz, pris séparément, sont presque indépendantes de la pression, mais la vitesse du son du mélange dépend fortement de la pression. Les valeurs calculées pour les mélanges air-eau sont en accord avec les valeurs mesurées. La vitesse du son dans un système diphasique (même élément présent sous 2 phases différentes), comme un mélange eau-vapeur, dépend du fait que l'équilibre entre les phases sur la courbe de saturation est maintenu ou non. Des transferts de chaleur et de masse surviennent lorsque l'équilibre est maintenu, ce qui rend la vitesse du son beaucoup plus faible que si l'on considère que l'équilibre n'est pas maintenu et qu'il n'y a donc pas de transferts de chaleur ou de masse. La vitesse du son dans un mélange eau-vapeur peut être inférieure à $1m.s^{-1}$.

Introduction

La présence de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide diminue spectaculairement la vitesse du son dans le liquide [Mallock, 1910 ; Karplus, 1958, 1961 ; Barclay et al., 1969 ; McWilliams et Duggins, 1969]. En particulier, la vitesse du son est beaucoup plus faible dans un mélange liquide-gaz que dans l'une ou l'autre des composantes gazeuse ou liquide. Par exemple, elle est d'environ $1440-1480 m.s^{-1}$ dans l'eau et d'environ $340 m.s^{-1}$ dans l'air, alors que, dans un mélange eau-air, elle tombe à, approximativement, $20 m.s^{-1}$ [McWilliams et Duggins, 1969]. Même de très faibles concentrations de gaz réduisent énormément la vitesse du son : 1% de volume d'air dans l'eau réduit la vitesse de 95% pour finalement atteindre $100 m.s^{-1}$ [McWilliams et Duggins, 1969]. Ce phénomène spectaculaire se produit parce que le système bi-fluide a la densité d'un liquide mais la compressibilité d'un gaz. La vitesse du son est même plus petite dans un mélange eau-vapeur que dans un mélange eau-air où elle peut atteindre quelques mètres par seconde [Barclay et al., 1969]. Les cas liquide-gaz et liquide-vapeur

diffèrent du fait des échanges de masses et de chaleur latente qui peuvent accompagner le passage de l'onde sonore dans un système liquide-vapeur mais qui sont absents dans un système liquide-gaz. Nombreuses sont les situations géologiques où les propriétés de la vitesse du son de systèmes bi-fluides liquide-gaz peuvent être importantes. Sur la surface de la Terre à pression et température ambiantes, la propagation de signaux acoustiques à travers des corps constitués d'eau dépend de sa teneur en air [Carstensen et Foldy, 1947 ; Hsieh et Plesset, 1961 ; Grouse et Brown, 1964 ; Laird et Kendig, 1952 ; MacPherson, 1957]. White [1976] a suggéré que les bulles de gaz qui sortent de la solution dans l'eau confinée durant la dilatation peuvent causer la diminution des ondes P antérieures aux tremblements de terre. Dans les zones géothermales, de l'eau chaude et un mélange de gaz peuvent être présents jusqu'à des profondeurs assez considérables dans la croûte terrestre. Récemment, les techniques sismologiques des « points chauds » ont été développées dans des sources locales d'énergie géothermale. Un modèle détaillé pour la vitesse du son des ondes et des magmas, chacun des deux pouvant contenir des phases gazeuses, est requis pour procéder à l'inversion des données sismiques lors de l'utilisation de ces techniques. On considère que les éléments et composants volatiles (CO_2 , H_2O , S) sont présents dans la croûte inférieure et le manteau sous de nombreuses formes possibles [Irving et Wyllie, 1973] telles que les vapeurs libres [Irving et Wyllie, 1975 ; Egger], des vapeurs dissoutes dans les magmas silicatés [Green, 1972 ; Egger, 1976], des constituants cristallins [Newton et Sharp, 1975 ; Egger, 1976] et des complexes de remplacement ou des complexes structurellement limités. La connaissance de ces différentes formes possibles est indispensable pour tester leur présence par les méthodes sismologiques. Cependant, la manifestation la plus spectaculaire des effets de la vitesse du son dans un système gaz-liquide est peut-être le contrôle exercé par la vitesse du son sur le flux de magma lors d'éruptions volcaniques et sur le flux d'eau et de vapeur dans les geysers. Le rôle du flux du bi-fluide lors des éruptions volcaniques a été développé qualitativement par Bennett [1971, 1974]. Ses considérations sur les processus des flux dans les systèmes bi-fluides conduisent à différentes conclusions à propos des mécanismes de vésiculation de magma et de formation de cendres volcaniques qui proviennent de considérations pétrographiques [Verhoogen, 1951 ; McBirney, 1963 ; McBirney et Murase, 1970]. Des modèles sur la mécanique des éruptions volcaniques [McGetchin, 1974 ; Sanford et al., 1975] et des geysers [Kieffer, 1975] montrent une forte dépendance des manifestations éruptives à la vitesse du son dans le fluide le long de la cheminée. Par exemple, la hauteur à laquelle un geyser s'élève durant une éruption dépend fortement de la vitesse du son dans le fluide le long de la cheminée du geyser. Puisque la vitesse du son dépend de la température et de l'état de l'eau dans la cheminée du geyser, il est possible de déduire les états du fluide dans le geyser à partir des observations du comportement de sa surface [Kieffer, 1975 et aussi manuscrit en préparation, 1977]. Il est évident qu'il reste beaucoup à apprendre sur la relation entre le flux pendant une éruption et les propriétés de la matière pendant ce flux. Les calculs présentés ici sur la vitesse du son dans un milieu bi-fluide constituent la phase initiale d'une tentative de développer un modèle quantitatif des éruptions volcaniques et de relier les paramètres thermodynamiques de la vapeur d'eau et des systèmes gaz-magma aux paramètres du flux observé lors d'une éruption.

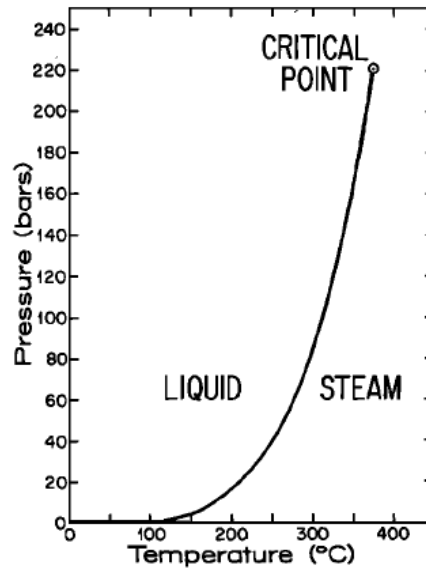


FIGURE I.1: Pression et température de l'eau à saturation

Bien que seules quelques théories sur la vitesse du son dans les mélanges gaz-liquide existent, elles sont plus abondantes que les données expérimentales extrêmement rares. Une grande partie de la théorie a été développée lors des études de confinement des réacteurs nucléaires dont le principal modérateur est l'eau. L'objectif de cet article est de revisiter et de synthétiser les concepts requis pour les calculs de la vitesse du son dans les mélanges liquide-gaz et liquide-vapeur et d'examiner les effets des composants volatiles sur la vitesse du son pour les systèmes eau-air et eau-vapeur. Actuellement, des études sont faites pour étendre ce travail aux mélanges magma-gaz.

ÉQUATION D'ÉTAT ET VITESSE DU SON DE L'EAU, DE L'AIR ET DE LA VAPEUR

On représente sur la figure I.1, un diagramme de phases simplifié de l'eau et de sa courbe de saturation. Les grandes différences de volume entre les phases liquide et gazeuse et le phénomène du point critique compliquent l'expression analytique de l'équation d'état de l'eau sur une vaste plage de pressions et de températures (par exemple, voir les analyses de Burnham et al. [1969] et de Helgeson et Kirkham [1974]). Vu ces difficultés, la vitesse du son des mélanges eau-vapeur d'eau ne peut être calculée à toute température et pression à partir d'une seule équation d'état. Donc, dans cet article, différentes expressions de l'équation d'état de l'eau et de l'air et des composantes vapeur sont considérées, chaque expression étant relativement simple et appropriée à certaines conditions de température et de pression.

1. Pour l'eau liquide à 25°C, on considère l'équation d'état adiabatique :

$$\rho_L = \rho_{LA} \exp\left(\frac{P - P_A}{K}\right), \quad (1)$$

où ρ_L est la densité de la phase liquide et ρ_{LA} la densité de la phase liquide dans l'état de

référence, P_A est la pression de référence (1bar) et K est le module de compressibilité (2,2bar). La vitesse du son associée à cette expression est :

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (2)$$

2. Pour l'eau, sur la courbe de saturation, à la pression de 8kbar et à une température comprise entre 25 et 900°C, les données cohérentes de Helgeson et Kirkham [1974] sont utilisées. Les compressibilités isothermes κ_T tabulées sont converties en compressibilités adiabatiques et la vitesse du son est calculée à partir de :

$$c = \sqrt{\kappa_S \rho}.$$

3. Pour l'eau, sur la courbe de saturation, une équation d'état de la forme $P(T)$ est exigée par la théorie développée dans cet article. Deux expressions sont utilisées [Keenan et al., 1969 ; Helgeson et Kirkham, 1974, p.1102] :

$$P_{sat} = P_c \exp \left(10^{-6} \tau (t - t_c) \sum_{i=1}^{\infty} F_i (0.65 - 0.01t)^{i-1} \right). \quad (3a)$$

Dans cette équation, P_c est la pression critique (220,38bar), T la température absolue, τ est $\frac{1000}{T}$, t est la température en Celsius, t_c est la température critique (374,136 °C) et les F_i sont les coefficients utilisés : $F_1 = -741,9242$, $F_2 = -29,7210$, $F_3 = -11,5529$, $F_4 = -0,8686$, $F_5 = 0,1094$, $F_6 = 0,4406$, $F_7 = 0,2521$ et $F_8 = 0,0522$. La seconde hypothèse, plus simple, est :

$$P_{sat} = AT^\alpha \exp \left(\frac{\Delta H}{RT} \right). \quad (3b)$$

($\alpha = 0$ est une hypothèse courante). Cette forme plus simple est couramment utilisée pour les courbes de vaporisation. Elle est en relation directe avec l'équation de Celsius-Clapeyron où l'on fait les hypothèses simplificatrices suivantes : la phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits, le volume de la phase gazeuse est beaucoup plus grand que celui de la phase liquide et la chaleur latente de vaporisation est constante. Pour l'eau, le coefficient A est $2,6 \times 10^{11} \text{dyn.cm}^{-2}$ et le ratio $\Delta H/R$ est $4,6 \times 10^8 \text{K}$.

4. Pour la vapeur, l'équation d'état d'un gaz idéal est utilisée :

$$PV^\gamma = \text{cste} = G_{st}, \quad (4)$$

où $G_{st} = \frac{T_0 R_0}{M \rho_0^{\gamma-1}}$, T_0 est la température de référence (100 °C à 1bar), V le volume et R la constante des gaz parfaits ($8,32 \text{ergs.}^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$), M est la masse molaire ($18,02 \text{g.mol}^{-1}$ pour la vapeur),

ρ_0 est la densité de l'état de référence ($0,96\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$) et γ est le coefficient isentropique (1,31 pour la vapeur). Pour un gaz idéal,

$$c = \sqrt{\gamma RT}, \quad (5)$$

où $R = R_0/M$.

5. Pour l'air, on a l'équation d'état des gaz idéaux suivante :

$$PV^\gamma = \text{cste} = G_{air}, \quad (6)$$

où $G_{air} = \frac{T_0 R_0}{M \rho_0^{\gamma-1}}$, $M = 20,98$ pour l'air et $\gamma = 1,40$ pour un processus adiabatique. Dans la mesure où l'eau et sa vapeur sont représentées comme des gaz parfaits avec γ indépendant de la température, la vitesse du son varie directement avec la racine de la température absolue (Figure 2). La vitesse du son d'un gaz parfait est indépendante de la pression à une température fixée. Les données mesurées montrent une dépendance ténue avec la pression [Hitsenrath et al., 1953], mais on peut l'ignorer. Comme la constante R dépend de la masse molaire, la vitesse du son de la vapeur est plus élevée que celle de l'air ($\alpha \propto \sqrt{M}$).

Le comportement de la vitesse du son dans l'air est plus complexe et dépend à la fois de la température et de la pression (figure I.2). Les valeurs de la vitesse du son calculées à partir des données de compressibilités statiques augmentent systématiquement avec la pression, mais, à cause d'une compressibilité anormale, sont une fonction compliquée de la température. Les valeurs haute-pression haute-température obtenues à partir des compressibilités statiques sont systématiquement 5 à 10% plus basses que celles obtenues à partir des expériences dynamiques sur les ultrasons [Smith et Lawson, 1954] mais montrent la même tendance. La vitesse du son augmente initialement avec la température sur la plage 25 – 100 °C. La vapeur maximale est atteinte à 100 °C et, pour des températures plus élevées, la vitesse du son décroît rapidement. Le maximum de la vitesse du son est toujours atteint à des températures un peu plus grandes que celles correspondant au minimum de compressibilité. (Comparer la figure 2 de ce travail avec la figure 7 de Helgeson et Kirkham [1974]). Les vitesses du son obtenues à partir des compressibilités tabulées montrent que la direction selon laquelle ce maximum bouge, quand la température augmente, est discutée. Les résultats expérimentaux sont contradictoires. Les plus récentes et apparemment les plus fiables des données de Smith et Lawson [1954] montrent la même tendance que les données statiques, mais des données moins récentes montrent une tendance opposée. La température à laquelle le maximum est atteint, décroît quand la pression augmente.

En plus de ces points d'inflexion à basse température, il y a des points d'inflexion haute-température de la vitesse du son à 0,5 et 1 kbar. Les minima sur les courbes de vitesse du son à 0,5 et 1 kbar correspondent à des minima des courbes de compressibilité à 0,5 et 1 kbar de Helgeson et Kirkham [1974, p. 1112]. Vraisemblablement, il n'y a pas de données expérimentales ultrasoniques haute pression haute température à comparer avec les courbes calculées.

VITESSE DU SON DANS UN SYSTÈME À DEUX COMPOSANTES.

Dans cette section, le mot « gaz » fera référence à une phase gazeuse de composition différente de la phase liquide. Les systèmes géologiques les plus évidents faisant intervenir les mélanges eau-gaz sont par exemple, à basse pression et à basse température, les systèmes d'eau de surface avec de l'air mélangé ou l'eau de la croûte terrestre avec les gaz dissous. Pour éviter les fastidieuses complexités algébriques (associées à l'équation d'état de l'eau) qui ne nous fournissent aucun éclairage supplémentaire, on illustre les propriétés générales de la vitesse du son dans de tels systèmes en considérant un système eau-air à 25 °C et à des pressions de 1 à 500 bar.

Mallock [1910], dans une étude du son dans les liquides mousseux fournit une première analyse quantitative sur l'effet des bulles de gaz sur la vitesse du son. Mc Williams et Duggins [1969] ont fourni un calcul plus élégant et son traitement est donné ici. Les suppositions inhérentes à leur modèle sont les suivantes. 1. Les phases liquide et gazeuse sont à l'équilibre et le transfert de masse entre les phases à effectuer pour dissoudre ou liquéfier le gaz est négligeable. 2. Il n'y a pas de décollement entre les phases liquide et gazeuse. 3. La longueur d'onde du son est beaucoup plus grande que la longueur caractéristique de non uniformité du mélange. et 4. le gaz est compressible et a la loi des gaz parfaits (équation (6)) et le liquide est élastique avec un module d'élasticité constant.

Deux cas sont considérés :

1. Les bulles de gaz sont suffisamment larges pour que la tension superficielle soit négligée.

2. Les bulles de gaz sont petites de telle sorte que la tension superficielle est non négligeable. Il est supposé que les bulles sont sphériques et de taille uniforme et que la théorie classique de la tension superficielle s'applique.

Bien que le cas 1 soit un cas particulier du cas 2, il est instructif de le considérer en premier pour illustrer la dépendance de la vitesse du son avec la pression et le titre en vapeur.

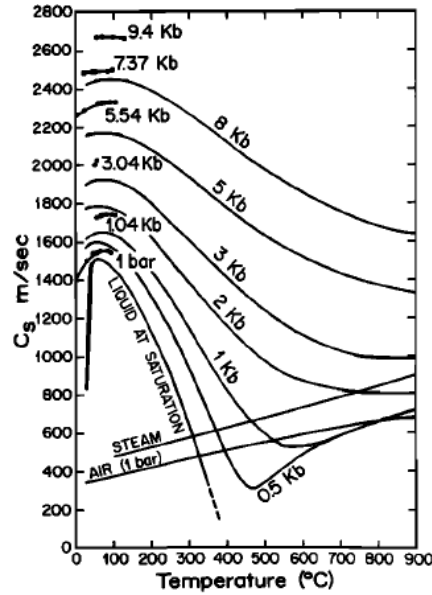


FIGURE I.2: Vitesse du son dans les fluides purs dont on fait référence ci-dessous : eau, vapeur et air. Les courbes en trait plein pour l'eau ont été calculées à partir des données de volume et de compressibilité tabulées par Hegelson et Kirkham [1974]. Les compressibilités isothermes ont été converties en compressibilités adiabatiques en utilisant leur outil de calculs. Les courbes pointillées des vitesses du son mesurées pour l'eau [Smith and Lawson 1954] sont données en comparaison. Les données pour l'air sont celles de Hilsenrath et al [1955], et les données pour la vapeur sont celles de Hogman et al. [1958, p.2320]

Cas 1 : effets de la tension superficielle négligés. En l'absence de tension superficielle (i.e. sous l'hypothèse que les bulles ont un rayon plus grand que 10^{-4} cm), la pression dans les bulles de gaz P_G dans le liquide est la même que la pression dans le liquide P_L :

$$P_L = P_G = P. \quad (7)$$

À partir de (1) et (6), les densités du liquide ρ_L et de gaz ρ_G sont données respectivement par :

$$\rho_L = \rho_{LA} \exp\left(\frac{P - P_A}{K}\right), \quad (8)$$

et

$$\rho_G = \sqrt{\frac{P}{G_{air}}}. \quad (9)$$

La densité ρ du mélange à deux phases ayant un titre en gaz $\eta = \frac{M_G}{M_L}$ est donnée implicitement par :

$$\frac{1 + \eta}{\rho} = \frac{\eta}{\rho_G} + \frac{1}{\rho_L}. \quad (10)$$

La fraction volumique est simplement liée au titre par :

$$x = \left(1 + \frac{\rho_G}{\eta\rho_L}\right)^{-1}. \quad (11)$$

La substitution de ρ_L et ρ_G dans les termes de P donne l'équation adiabatique de l'état du mélange :

$$\rho = (1 + \eta)\rho_{LA} \left[\frac{\eta\rho_{LA}G_{air}^{1/\gamma}}{P^{1/\gamma}} + \exp\left(\frac{P_A - P}{K}\right) \right]^{-1}, \quad (12)$$

de laquelle on obtient que la vitesse du son $c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$ est

$$c = \eta\rho_{LA} \left(\frac{G_{air}}{P}\right)^{1/\gamma} + \exp\left(\frac{P_A - P}{K}\right) \left\{ [(1 + \eta)\rho_{LA}]^{1/2} \left[\frac{\eta\rho_{LA}G_{air}^{1/\gamma}}{\gamma P^{(\gamma+1)/\gamma}} + \frac{1}{K} \exp\left(\frac{P_A - P}{K}\right) \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (13)$$

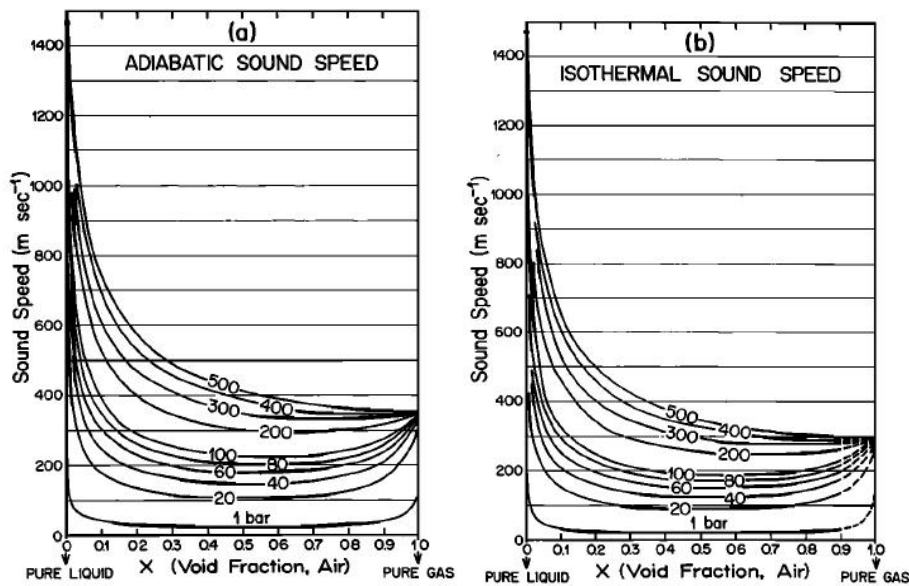


FIGURE I.3: Dépendance de la vitesse du son par rapport à la fraction volumique du gaz et par rapport à la pression d'un mélange air-eau calculée dans le cas adiabatique (a) et isotherme (b). La tension superficielle n'est pas prise en compte.

Les valeurs de la vitesse du son obtenues par ce modèle, sont tracées en figures I.3 et I.4. La vitesse du son est tracée respectivement en fonction de la fraction volumique et de la fraction massique. Considérons tout d'abord uniquement la figure (I.3a) qui montre la dépendance de la vitesse du son dans le cas adiabatique, à savoir $c = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s^{\frac{1}{2}}$ pour une fraction de gaz. L'effet le

plus spectaculaire lors de l'ajout d'une petite fraction volumique d'air est la baisse de la vitesse du son : par exemple, à une pression de 1 bar, la vitesse du son est diminuée par rapport à celle dans l'eau pure. Celle-ci passe de $1470\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $900\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. La baisse est plus spectaculaire à basse pression. À 1 bar, la vitesse du son atteint un minimum pour une fraction volumique d'air de $x = 0,5$. A plus hautes pressions, le minimum est atteint pour des fractions volumiques d'air plus élevées. Enfin, à 500 bar, le minimum tend vers 0 et la vitesse du son décroît de manière monotone vers la vitesse du son dans l'air pur. Pour des fractions volumiques d'air élevées ($x > 0,9$), la vitesse du son approche celle du gaz. La vitesse du son dans un mélange dépend fortement de la pression, alors que la vitesse du son dans un de ses composants pur est indépendante de la pression.

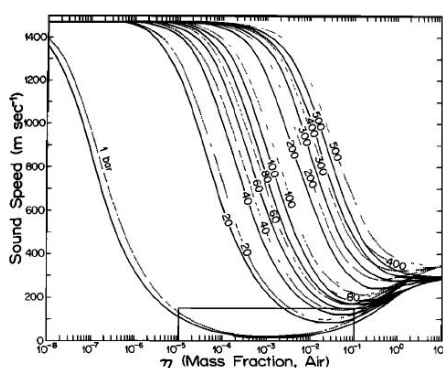


FIGURE I.4: Dépendance calculée de la vitesse du son par rapport à la fraction massique et à la pression d'un mélange air-eau tracée en semilog pour montrer l'effet d'une petite fraction volumique d'air. La tension superficielle est négligée. Les courbes en trait plein représentent les vitesses du son dans le cas isotherme et les courbes en pointillés représentent la vitesse du son dans le cas adiabatique. L'encart en bas est agrandi en figure I.5.

La variation de la vitesse du son en fonction de la fraction massique est donnée en figure I.4. L'échelle logarithmique est utilisée afin d'accentuer les effets de changement d'ordre pour des petites fractions volumiques d'air. Considérons tout d'abord la courbe en pointillés. Celle-ci nous présente la vitesse du son dans le cas adiabatique. À 1 bar, 1 ppm d'air provoque la chute de la vitesse du son à un quart de sa valeur. À pression plus élevée, de plus grandes fractions volumiques d'air sont nécessaires pour provoquer la même baisse. À 1 bar, le minimum de la vitesse vaut $24\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les données mesurées [Karplus, 1958] sont comparées avec les valeurs calculées en figure 5. Pour une fraction massique d'air de 10^{-5} , la vitesse du son est approximativement $100\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et pour une fraction massique de 10^{-3} , elle descend à $24\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On a défini une dépendance de la vitesse du son en fonction de la fréquence (considérée ci-dessous), mais, en général, les faits confirment la prédiction théorique selon laquelle l'ajout de gaz dans un liquide provoque une baisse considérable de la vitesse du son.

La propagation des ondes sonores à travers un bi-fluide, mélange liquide-gaz, peut être considérée comme un processus isotherme plutôt qu'adiabatique. La chaleur peut être conduite

entre les phases gazeuse et liquide, et de par la grande capacité thermique de l'eau, la variation de température dans l'eau peut être suffisamment faible pour être négligée [Karplus, 1958]. La vitesse d'un mélange peut donc dépendre de la fréquence ou de manière équivalente de la période des ondes sonores. Si la période des ondes est plus petite que le temps mis par la chaleur pour passer des bulles de gaz au liquide les avoisinant ou en dehors, les compressions et les raréfactions accompagnant le passage de l'onde sonore seront adiabatiques. Le comportement du gaz sera donné par le coefficient adiabatique ($\gamma = 1.4$ pour l'air). Si, au contraire, la période des ondes sonores est plus grande que le temps nécessaire à la conduction du flux de chaleur des bulles dans le liquide, le processus sera quasiment isotherme, et le comportement du gaz sera donné par le coefficient isotherme ($\gamma = 1$ pour l'air). En conséquence, le module de compressibilité du liquide devrait être utilisé.

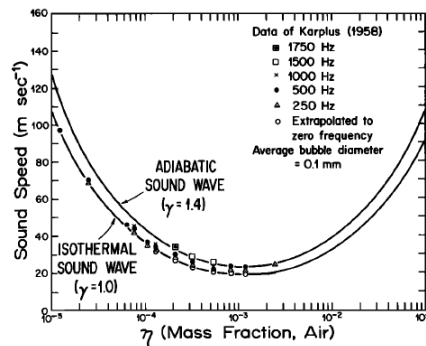


FIGURE I.5: Comparaison de la vitesse du son calculée avec les données de Karplus [1958]

La vitesse du son dans le cas isotherme d'un bi-fluide décroît lors de l'ajout d'une petite quantité d'air, comme le fait la vitesse du son dans le cas adiabatique (figures I.3 et I.4 courbes en traits pleins). Cependant, la vitesse du son de l'air comprimé de manière isotherme est plus petite que la vitesse du son de l'air comprimé de manière adiabatique. Ces deux vitesses diffèrent d'un facteur $\gamma^{1/2}$. Ainsi, les vitesses du son d'un bi-fluide isotherme sont plus faibles que les vitesses du son dans le cas adiabatique. L'hypothèse d'une propagation isotherme ne s'applique pas aux grandes fractions volumiques d'air, puisque la propagation dans l'air pur doit être adiabatique. Pour cette raison, les courbes de la vitesse du son dans le cas isotherme, montrées en figure I.3b sont faussées pour de grandes fractions volumiques d'air.

La fréquence à laquelle les effets de la conductivité peuvent devenir significatifs peut être estimée comme suit. La constante de temps caractéristique du refroidissement thermique de petites sphères est $\tau = \frac{0,05D^2}{K}$ où D est le diamètre de la sphère et K sa diffusivité thermique (cf. Karplus, 1961, p. H-1 ou Carslaw et Jaeger, 1959, chapitre 9). Pour une sphère d'air de $0,1\text{mm}$ de rayon de coefficient de diffusivité thermique $0,187\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$ [Carslaw and Jaeger, 1959, p.497] le temps caractéristique est de $2,5.10^{-5}\text{s}$. L'inverse de cette constante de temps donne une valeur de fréquence en dessous de laquelle l'approximation isotherme devrait être utilisée et au dessus de laquelle l'approximation adiabatique serait plus appropriée. Pour des bulles d'air de diamètre $0,1\text{mm}$, la fréquence caractéristique des transferts de chaleur est de 40000Hz .

Karplus [1958, p.11] obtient les valeurs expérimentales de la vitesse du son dans des mélanges air-eau qui ont des bulles de ce diamètre. Les données ont été mesurées pour des fréquences allant de 250 à 1750Hz et des fractions massiques en bulles de $1,2 \cdot 10^{-5}$ à $2,4 \cdot 10^{-3}$. Toutes les données ont été obtenues à basse fréquence comparativement à la fréquence caractéristique qui est de 40000Hz. La donnée mesurée avec la plus basse fréquence rejoint quasiment la courbe isotherme calculée (figure I.5), en soutenant l'idée que la propagation du son à basse fréquence dans un mélange air-eau est un processus isotherme. La vitesse du son augmente lorsque la fréquence augmente, comme on l'attendait d'après la discussion précédente. Mais la courbe adiabatique est approchée (et même dépassée par quelques points donnés) pour des fréquences beaucoup moins grandes que la fréquence calculée, à savoir 40000Hz. Karplus lui-même attribuait la dépendance en la fréquence à la présence d'un détergent dans le mélange expérimental. Mais ses expériences destinées à tester cette hypothèse furent infructueuses. Ainsi, même si la dépendance en la fréquence de la vitesse du son due à cet effet n'a pas été expérimentalement prouvée, il est important de garder à l'esprit qu'à basses fréquences, la vitesse du son d'un mélange air-eau semble être isotherme et que la vitesse du son d'un mélange bi-fluide est sensible à la fréquence. Des résultats totalement différents devraient être attendus dans des expériences en laboratoire à, disons, 1MHz et des expériences à l'air libre, disons, entre 1 et 10Hz.

La variation de la vitesse du son en fonction de la fraction volumique est donnée aux figures I.3a et I.3b, parce que la fraction volumique est la variable naturelle utilisée dans la théorie des mélanges et les études précédentes ont généralement adopté cette convention.

Dans de nombreux secteurs en ingénierie, il est préférable de considérer la fraction massique comme une teneur en gaz, plutôt que la fraction volumique, parce que la fraction massique ne dépend ni de la tension superficielle ni de la pression [McWilliam et Duggins, 1969, p.105]. Il y a beaucoup de situations géologiques dans lesquelles il est préférable de préciser la fraction massique. La montée du mélange liquide-gaz dans la cheminée d'un geyser ou le neck d'un volcan est un exemple d'une telle situation. Pendant la dilatation du mélange, il se peut que la fraction volumique varie beaucoup au moment où le fluide s'élève, ce qui n'est pas le cas de la fraction massique si les gaz ne sont ni condensés, ni dissous. Dans nos prochains calculs, on précisera la fraction massique. La section suivante a pour objectif d'examiner l'effet des petites bulles ayant une tension superficielle significative. McWilliam et Duggins ont développé ce modèle pour le cas précis d'une compression isotherme. La généralisation au cas d'une compression adiabatique nécessite une complexité algébrique considérable qui n'est pas justifiée actuellement du fait du manque de données expérimentales.

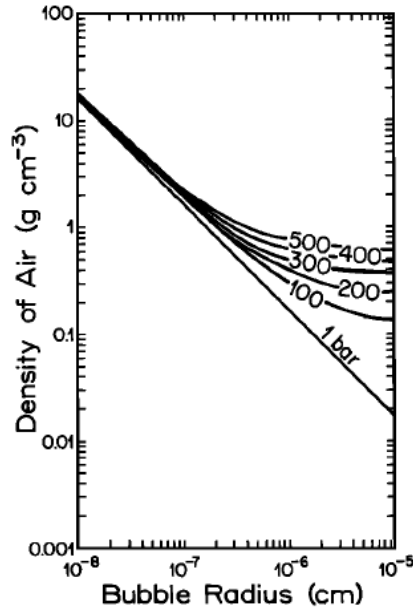


FIGURE I.6: Densité de l'air dans des bulles dans un mélange air-eau, considérée comme une fonction du rayon des bulles et de la pression.

Deuxième cas : lorsque l'on considère les effets de la tension superficielle. Quand la tension superficielle devient importante, la pression dans les bulles de gaz devient plus grande que celle dans le liquide alentour :

$$P_G = P_L + \left(2\frac{\sigma}{r}\right), \quad (14)$$

où r est le rayon de la bulle. Dans le cas d'une compression isotherme des bulles de gaz, la même méthode que celle utilisée à la section précédente fournit la vitesse du son suivante [McWilliams et Duggins, 1969, p. 104] :

$$c = \left(\frac{3\beta^2\gamma - \delta\varepsilon}{3\beta^2\theta - \delta\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\sigma}{r}, \\ \gamma &= \frac{(1+\eta)}{\rho^2\eta G} \left(\frac{2\sigma}{r} + P_L\right)^2, \\ \delta &= 32\frac{\pi\eta\sigma^2}{3r\eta}, \\ \varepsilon &= \frac{\gamma}{\eta G}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\theta - 1 = \frac{\exp\left[\frac{(P_A - P_L)}{K}\right] \left[\left(\frac{2\sigma}{r}\right) + P_L\right]^2}{K\rho_{L_A}\eta G},$$

$$\lambda = \frac{(\theta - 1)}{\eta G}.$$

Pour la tension superficielle de l'interface eau-air, on a pris la valeur de $72,2 \text{ dyn cm}^{-1}$.

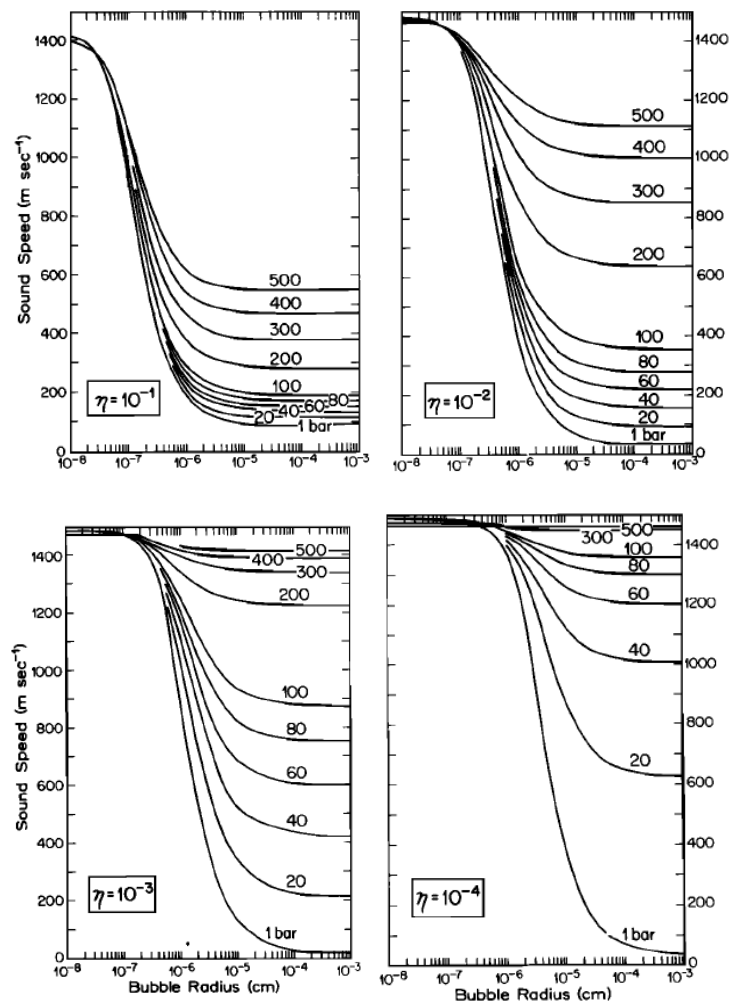


FIGURE I.7: Vitesse du son calculée dans un mélange eau-air, considérée comme une fonction du rayon des bulles et de la pression pour 4 fractions massiques de vapeur. $\eta = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

La densité de l'air dépend de la taille des bulles ainsi que de la pression, comme cela est montré figure I.6. Si la bulle est large, la densité du gaz ne dépend pas du rayon et devient égale à la valeur obtenue en l'absence de la tension surfacique. La densité du gaz augmente à cause

de la tension superficielle lorsque la taille de la bulle diminue. Pour des rayons compris entre 1.10^{-7} et 5.10^{-7} cm (soit entre 10 et 50 Å), la densité du gaz deviendrait aussi grande que la densité du liquide : vraisemblablement, les bulles sont donc instables pour de très petits rayons.

Quand la tension superficielle est prise en compte, la pression et la taille des bulles affectent toutes deux la vitesse du son dans le mélange bi-fluide, comme cela est montré à la figure 7 : considérons tout d'abord le cas où $\eta = 10^{-1}$, comme indiqué dans le coin supérieur gauche de cette figure. À une pression de 1 bar, la vitesse du son est proche de la vitesse du son dans le liquide pur si le rayon des bulles est plus petit que 3.10^{-8} cm environ (3 Å). Pour des rayons de bulles plus grands qu'environ 10^{-6} cm, la vitesse du son diminue rapidement et passe d'approximativement 3.10^{-8} à 10^{-6} cm. Puis la vitesse devient relativement constante, égale à la valeur obtenue avec le modèle où la tension superficielle n'était pas prise en compte. Avec l'augmentation de la pression, la vitesse du son diminue en suivant approximativement le calibrage des bulles. Mais l'ordre de grandeur de la diminution de la vitesse est plus petit que celui des bulles.

On distingue trois comportements distincts que l'on a délimités en différentes régions : une région (1) pour les petits rayons de bulles où la vitesse du son est à peu près indépendante de la taille des bulles et de la pression, une région (2) pour les rayons intermédiaires de bulles où la vitesse du son dépend sensiblement de la pression et du rayon des bulles et une région (3) pour les rayons plus grands où la vitesse du son est indépendante du rayon des bulles mais dépend de la pression.

Pour les fractions massiques plus petites, ($\eta = 10^{-2}$, 10^{-3} et 10^{-4} dans la figure 7), ces régions changent mais conservent leur ordre. La région (1) où la vitesse du son est indépendante de la pression et de la taille des bulles est agrandie. Avec la diminution de la fraction massique, la région où les deux effets sont importants (région (2)) se déplace progressivement vers les rayons de bulles plus grands.

VITESSE DU SON DANS UN SEUL COMPOSANT D'UN SYSTÈME BI-FLUIDE

Considérations générales : Le calcul de la vitesse du son dans les deux composants qui constituent un système bi-fluide est simple si les données de l'équation d'état adiabatique sont disponibles, car on peut considérer la pression et la température comme indépendants dans de tels systèmes. Le calcul de la vitesse du son dans un des deux composants d'un système bi-fluide est une question plus difficile car la pression et la température ne sont plus indépendantes mais sont liées par l'équation de Gibbs traduisant l'équilibre entre les phases.

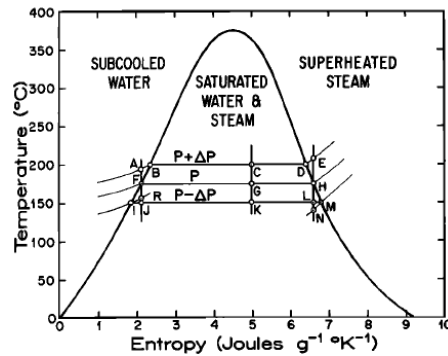


FIGURE I.8: Diagramme température-entropie de l'eau (données issues de *Keenan et al.* [1969]). Les courbes thermodynamiques qui illustrent l'effet d'une compression et d'une dilatation adiabatique du mélange sont expliquées dans le texte d'après *Davies*, [1965], l'échelle verticale des courbes est agrandie. Les lignes en traits fins dans les zones à une seule phase de A, F à I et de E, H à M sont les isobares.

Le processus physique qui a lieu pendant la propagation de l'onde sonore à travers un mélange bi-fluide comportant plusieurs phases est beaucoup plus complexe que pour un mélange bi-fluide à une phase. [par exemple *Davies*, 1965]. Considérons le diagramme température-entropie (TS) de l'eau correspondant à la figure 8. Un mélange d'eau saturée et de vapeur est représenté au point G, où la fraction des segments $\frac{FG}{FH}$ est la fraction massique η de la vapeur dans le mélange. Les changements de pression isentropiques, comme par exemple les compressions et les dilatations qui ont lieu pendant la propagation de l'onde sonore, sont représentés par le mouvement de haut en bas de la ligne d'entropie constante CGK . Si l'eau et la vapeur restent en équilibre thermique le long de cette ligne de saturation, il y a de fortes chances pour qu'il y ait des transferts de masse entre les deux phases, puisque la proportion de vapeur dans le mélange change ($\frac{BC}{BD} \neq \frac{FG}{FH} \neq \frac{IK}{IM}$). Cela suppose que la condensation ou l'évaporation aient lieu.

Une augmentation isentropique de la pression de P à $P + \Delta P$ correspond au mouvement du mélange de G à C dans le diagramme température-entropie de la figure I.8. L'augmentation de pression dans la phase de l'eau liquide correspond au mouvement de F à A : par conséquent, la phase de l'eau liquide devient sous-refroidie. L'augmentation de la pression dans la phase vapeur correspond au mouvement de H à E, où la vapeur devient surchauffée. La différence de température induite entre la vapeur et l'eau liquide conduit à des transferts de chaleur de la vapeur surchauffée à l'eau sous-refroidie. Si la composition initiale du mélange G se trouve à droite du pic de la courbe du système diphasé, comme cela est montré figure 8, de l'eau va s'évaporer et la fraction massique de la vapeur dans le mélange va augmenter pendant la compression adiabatique ($\frac{BC}{BD} > \frac{FG}{FH}$). (Ce phénomène a par exemple lieu en météorologie, quand l'air saturé est compressé de manière adiabatique lors de sa descente provoquant ainsi une augmentation de l'humidité relative). Si la composition initiale du mélange G se trouve à gauche du pic de la courbe du système diphasé (supposée être symétrique), de la vapeur va se condenser, et la fraction massique de la vapeur dans le mélange va diminuer pendant la compression adiabatique.

tique. Ainsi, par des transferts de chaleur et de masse, l'eau liquide et la vapeur sont ramenées sur la ligne de saturation, par l'intermédiaire du segment AB pour l'eau liquide et du segment ED pour la vapeur.

Une diminution isentropique de la pression de P à ΔP correspond au déplacement de G à K dans le diagramme TS. La baisse de la pression dans la phase eau-liquide correspond au mouvement de F à R. Par conséquent, l'eau devient surchauffée au-dessus de sa température de saturation, point I (le segment IR est une continuation de l'isobare de la zone eau-liquide). La baisse de la pression dans la phase vapeur seule correspond au mouvement de H à N dans le diagramme TS. La vapeur devient alors sous-refroidie ou sursaturée selon sa température de saturation, point M (le segment MN est une continuation de l'isobare de la zone eau surchauffée). Si la composition initiale du mélange G est à droite du pic de la courbe, de la vapeur va se condenser pour former un mélange d'eau saturée et de vapeur (pour L) et de la vapeur sous-refroidie peut alors se déplacer vers un état plus stable M. La fraction massique de la vapeur dans un tel mélange va diminuer ($\frac{IK}{IM} < \frac{FG}{FH}$). On trouve une application directe de ce phénomène dans la chambre à brouillard de Wilson. Si la composition initiale du mélange se situe à gauche du pic de la courbe (en admettant que c'est symétrique), la cavitation et la vaporisation du liquide sous-refroidi seront les processus dominants et la fraction massique de la vapeur dans le mélange va augmenter. La cavitation dans l'eau crée un mélange local de composition, celui du point J. L'eau surchauffée du point R se déplacera alors vers un état plus stable I, mélange d'eau et de vapeur.

En général, la condensation et l'évaporation ne peuvent avoir lieu instantanément, puisqu'elles impliquent des transports de chaleur et de masse qui sont à vitesse finie. Le temps caractéristique du flashing ou de la condensation de la vapeur en eau est important pour déterminer le degré d'équilibre obtenu pour l'onde sonore. Puisque la condensation et l'évaporation se déroulent généralement à différentes échelles, on devrait s'attendre à ce que les ondes de compression et de raréfaction se comportent différemment. Les expériences ont confirmé que les ondes de raréfaction d'amplitude finie dans des mélanges eau-vapeur ont des vitesses plus faibles que les ondes de compression. Ceci s'explique par le fait que les ondes de raréfaction ont tendance à maintenir un équilibre thermique continu.

En résumé, un mélange composé d'un liquide et de sa vapeur doit répondre sans doute aux perturbations de pression en suivant une réponse non équilibrée (équation (1)) (dans laquelle il n'y a pas de transfert de masse entre les phases, autrement dit, le liquide et la vapeur sont indépendamment isentropiques et les deux s'écartent de la ligne de saturation) ou en suivant une réponse équilibrée (dans laquelle il y a des transferts de masse entre le liquide et la vapeur). Le liquide et la vapeur restent sur la ligne de saturation. Les systèmes réels auront probablement un comportement intermédiaire entre ces 2 extrêmes.

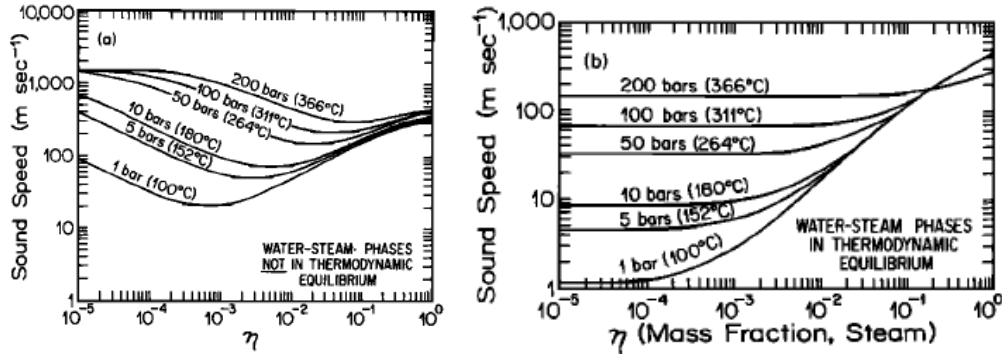


FIGURE I.9: Vitesse du son calculée d'un mélange air-eau, hors équilibre (a) et en équilibre (b) vue comme une fonction de la pression et de la fraction massique.

Cas 1 : réponse hors équilibre. S'il n'y a pas de transfert de masse entre la phase liquide et la phase gazeuse, la vitesse du son sera donnée par la théorie de la section précédente. Les effets de la tension superficielle ne doivent pas être trop importants pour les systèmes liquide-vapeur sur la courbe de saturation et la vitesse du son est par conséquent indépendante de la taille des bulles. La vitesse du son adiabatique dans ce cas est donnée par (13) ce qui pourrait être proche du cas des ondes haute-fréquence. Le cas de la propagation hors équilibre basse fréquence qui serait plus proche de l'isotherme, n'est pas considéré ici parce que les effets du transfert de masse peuvent devenir importants (cas 2 ci-dessous).

La vitesse du son d'un système eau-vapeur où les phases ne sont pas à l'équilibre thermodynamique est montrée sur la figure I.9. À 1 bar (100 °C), la vitesse du son décroît régulièrement avec l'ajout de petites masses de vapeur jusqu'à 24m.s⁻¹ à $\eta = 10^{-3}$ et ensuite croît jusqu'à 446m.s⁻¹, vitesse du son de la vapeur pure à 100°C. À haute pression, la décroissance est moins prononcée et la valeur minimum est atteinte pour les plus hautes fractions massiques de vapeur.

Cas 2 : réponse à l'équilibre. L'équilibre entre les phases liquides et vapeur peut être maintenu si le transfert de masse entre les phases liquide et vapeur est obtenu dans un temps court devant la période des ondes acoustiques. On peut calculer la vitesse du son à partir de l'équation d'état du système de la forme $V(P,S,X)$ [Davies, 1965]. La différentielle dans le volume du système à deux phases est donnée par :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{X,S} dP + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{X,P} dS + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_{P,S} d\eta. \quad (17)$$

Pour la propagation adiabatique du son, $dS = 0$:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{X,S} dP + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_{P,S} d\eta, \quad (18)$$

donnant

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,\eta} + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_{P,S} \frac{d\eta}{dP}. \quad (19)$$

Dans le cas limite $P \rightarrow 0$, $\frac{dx}{dP}$ devient $V_g - V_l$.

La dérivée du système

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,\eta}$$

peut être décrite comme la somme des dérivées des composées : $(1 - \eta) \left(\frac{\partial V_l}{\partial P}\right) + \eta \left(\frac{\partial V_g}{\partial P}\right)$ Donc (18) devient :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = (1 - \eta) \left(\frac{dV_l}{dP}\right)_{sat} + \eta \left(\frac{\partial V_g}{\partial P}\right)_{sat} + (V_g - V_l) \left(\frac{\partial \eta}{\partial P}\right)_S. \quad (20)$$

La dérivée $\left(\frac{\partial \eta}{\partial P}\right)_S$ peut être déterminée par la première loi de la thermodynamique

$$\delta Q = \delta E + P\delta V. \quad (21)$$

Pour un changement adiabatique ($\delta Q = 0$), la différentielle de l'énergie dans cette équation est plus souvent exprimée en termes d'enthalpie de réaction

$$\delta H = \delta E + P\delta V + V\delta P$$

donc la première loi devient :

$$\delta H - V\delta P = 0. \quad (22)$$

Pour un mélange liquide vapeur,

$$H = (1 - \eta)H_l + \eta H_g = H_l + L\delta\eta, \quad (23)$$

où L est la chaleur latente de changement d'état. Pour cela,

$$\delta H = \delta H_1 + \eta\delta L + L\delta\eta, \quad (24)$$

et, substitué dans (22), donne :

$$\delta H_1 + \eta\delta L + L\delta\eta - V\delta P. \quad (25)$$

En réarrangeant les termes, on a :

$$L\delta\eta = V\delta P - \delta H_1 - L\delta P. \quad (I.1)$$

Or

$$\left(\frac{\delta\eta}{\partial P}\right)_S \approx \left(\frac{\partial\eta}{\partial P}\right)_S = \frac{V}{L} - \frac{1}{L} \left(\frac{dH_1}{dP}\right)_{sat} - \frac{\eta}{L} \left(\frac{dL}{dP}\right). \quad (26b)$$

Finalement, alors la vitesse du son obtenue à partir de

$$c^2 = -V^2 \left(\frac{dV}{dP}\right)_S, \quad (27)$$

est

$$\frac{-c^2}{V^2} = (1 - \eta) \left(\frac{dV_l}{dP} \right)_{sat} + \eta \left(\frac{dV_g}{dP} \right)_{sat} + (V_g - V_l)^* \left[\frac{V}{L} - \frac{1}{L} \left(\frac{dH_l}{dP} \right)_{sat} - \frac{\eta}{L} \left(\frac{dL}{dP} \right) \right]. \quad (28)$$

On peut obtenir les quatre dérivées dans cette équation à partir des données thermodynamiques tabulées si les données existent pour le système liquide-gaz en question. Pour cette étude, les données peuvent être obtenues de Keenan et al. [1969].

La vitesse du son d'un mélange eau-gaz où l'équilibre thermodynamique entre les phases est maintenu est présentée dans la figure I.9b. Le comportement est assez différent du cas hors équilibre présenté sur la figure I.9a. À 1 bar la vitesse du son chute de manière discontinue à 1 m.s^{-1} en ajoutant de petites quantités de vapeur et se maintient aux basses valeurs de fraction massique. Avec la formation de plus grandes quantités de vapeur dans le mélange, la vitesse croît lentement mais n'atteint pas celle de la vapeur pure. À des plus hautes pressions, la décroissance de la vitesse du son est moins spectaculaire. L'effet le plus prononcé du comportement à l'équilibre par rapport au comportement hors équilibre est l'ordre de grandeur de la décroissance : à 1 bar, elle chute à 1 m.s^{-1} , valeur beaucoup plus faible que la vitesse du son minimale de 24 m.s^{-1} obtenue pour le cas hors équilibre.

La vitesse du son d'un mélange diphasique liquide-vapeur n'approche pas de manière lisse la vélocité à $\eta = 0$ et $\eta = 1$ qui peut être vue en écrivant (28) sous la forme [Davies, 1965, p.5]

$$\frac{-c^2}{V^2} = (1 - \eta) \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s + \left[(1 - \eta) \left(\frac{\partial V_l}{\partial P} \right) \right] \quad (29)$$

Le terme entre crochets représente la différence entre l'équilibre et le non-équilibre. Le cas hors équilibre donne une convergence correcte pour $\eta = 0$ et $\eta = 1$. Comme le terme entre crochets n'est pas nul à $\eta = 0$ et à $\eta = 1$, on observe des discontinuités mathématiques avec la formation de quantités infinitésimales de vapeur dans le liquide ou de gouttelettes dans la vapeur.

Les approximations de (29) peuvent être faites pour des quantités très faibles ($\eta \ll 1$) ou très grandes ($1 - \eta \ll 1$) de fractions massiques de gaz [Landou et Lifschitz, 1959, p.249]. Pour $\eta \ll 1$ (liquide contenant quelques bulles de vapeur), la vélocité est :

$$c = \frac{LMPV_l}{PT(C_{pl}T)^{1/2}}. \quad (30)$$

La vitesse est très faible (environ 1 m.s^{-1} pour l'eau). Pour $1 - \eta \ll 1$ (vapeur contenant quelques gouttelettes de liquide), la vitesse du son est donnée par :

$$\frac{1}{c^2} \approx \frac{M}{RT} - \frac{2}{L} + \frac{c_{pl}T}{L^2}. \quad (31)$$

La vitesse du son est alors plus basse que celle dans le gaz pur (390 m.s^{-1} pour la vapeur avec des gouttelettes d'eau, versus 446 m.s^{-1} pour la vapeur d'eau). La discontinuité de la vitesse du son d'une vapeur à laquelle on a ajouté quelques gouttes de liquide n'est pas aussi prononcée que celle d'un liquide où quelques bulles sont formées.

Benett et al. [1964] a obtenu des résultats similaires avec des modèles et des hypothèses assez différentes. Dans une étude sur la vitesse à laquelle les « ondes de vaporisation » (ondes

d'expansion à travers lesquelles un liquide est converti en vapeur) se propagent dans les fils détonants, ils ont analysé le problème de la vitesse du son d'un système liquide-vapeur. La vitesse du son d'une onde dans le liquide à la courbe de saturation (correspondant à $\eta \ll 1$ ci-dessous) est

$$c = (1/\rho) \left(\frac{dP}{dT} \right) \left(\frac{T}{C_{vl}T} \right)^{-1/2}. \quad (32)$$

Sur la courbe de saturation, la pression P est juste la pression de vapeur saturante $P(T)$ indépendante de la densité. Bennett et al. [1964, p.84] a utilisé (3b) pour la pression de vapeur saturante :

$$P_{sat} = AT^\alpha \exp(\Delta H/RT). \quad (33)$$

Quand la dérivée de cette équation d'état est combinée avec (32), la vitesse du son est :

$$c = \frac{1}{\rho_L} \left(\frac{T}{C_{vl}} \right)^{1/2} \left[\frac{A\Delta H \exp(-\Delta H/RT)}{RT^2} \right]. \quad (34)$$

Cette équation donne des valeurs qui s'accordent bien avec celle de Landau et Lifschitz [1959] et de l'équation rigoureuse (28).

Conclusion

La théorie de la vitesse du son dans un fluide biphasique démontre que plusieurs variables s'ajoutant à l'équation d'état peuvent affecter la vitesse du son de tels systèmes. La vitesse du son du système le plus simple considéré eau-air dépend de la quantité de gaz présent, de la pression, de la température, de la fréquence de l'onde sonore et des bulles de petit rayon. Les vitesses du son calculées sont en accord avec les données brutes qui existent. La vitesse du son d'un liquide initialement en équilibre est maintenue durant le passage de l'onde sonore. Pour maintenir l'équilibre, la vapeur doit se condenser et les bulles doivent s'atomiser ou augmenter en masse pour transférer la masse ou l'énergie d'une phase à l'autre. La vitesse du son dépend de la quantité de gaz présent et de la pression sur la courbe de saturation mais pas de la taille des bulles car les effets de la tension superficielle sont peu importants dans les liquides saturés. La vitesse du son est plus appréciable si le transfert de masse ou de chaleur se produit entre les phases pour maintenir l'équilibre thermique.

Glossaire

E_i	Énergie interne du fluide i
H_i	Enthalpie du fluide i
T	Température
α_i	Fraction volumique du fluide i
ρ_i	Masse volumique du fluide i
c_i	Vitesse du son dans le mono-fluide i
e_i	Énergie interne volumique du fluide i
h_i	Enthalpie volumique du fluide i
p	Pression
s_i	Entropie du fluide i
u_i	Vitesse du fluide i

Admissibilité

Un système $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ défini sur G est fortement admissible s'il est faiblement admissible et régulièrement hyperbolique.

Admissibilité faible

Un système $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ défini sur G est faiblement admissible si le spectre de la matrice jacobienne $A(v)$ de $f(v)$ est inclus $\{0, c, -c\}$.

Bi-fluide à deux phases

Mélange de deux fluides sous deux phases différentes (exemple : eau-air).

Diphastique

Mélange d'un même élément présent sous deux phases distinctes (exemple : eau-vapeur).

Hyperbolicité

Un système $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ défini sur G est hyperbolique si :

1. La matrice jacobienne $A(v)$ de $f(v)$ est \mathbb{R} -diagonalisable de matrice de passage inversible $P(v)$ telle que $A = P(v)\Lambda(v)P^{-1}(v)$,
2. $P(v)$ est bornée sur tout compact.

Hyperbolicité régulière

Un système est dit régulièrement hyperbolique si

1. il est hyperbolique,
2. la matrice de passage est C^∞ .

Onde de choc

Onde de forte amplitude se propageant de manière discontinue.

Vitesse du son mathématique (c_m)

Pour un système $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ défini sur G supposé admissible ou faiblement admissible, la vitesse du son est définie comme la valeur propre strictement positive de la matrice jacobienne de $f(v)$.

Vitesse du son mécanique (ou physique) (c_p)

Vitesse de propagation d'une onde sonore.

Vitesse du son thermodynamique (c_t)

Racine carrée de la dérivée partielle de p par rapport à la masse volumique à entropie fixée dans le cas des mono-fluides, à entropie et titre massique fixés dans le cas des bi-fluides.

Bibliographie

- [Britan *et al.*, 2011] BRITAN, A., LIVERTS, M. et BEN-DOR, G. (2011). Shock wave propagation through wet particulate foam. *Elsevier*.
- [Coulouvrat et Marchiano, 2009] COULOUVRAT, F. et MARCHIANO, R. (2009). Propagation atmosphérique-notes de cours.
- [Dias *et al.*, 2009] DIAS, F., DUTYKH, D. et GHIDAGLIA, J.-M. (2009). A two-fluid model for violent aerated flows. *Elsevier*.
- [Ghidaglia, 2008] GHIDAGLIA, J.-M. (2008). On the sound speed in two fluid flows.
- [Ghidaglia *et al.*, 2001] GHIDAGLIA, J.-M., KUMBERO, A. et LE COQ, G. (2001). On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method. *Elsevier*.
- [Halaoua, 1998] HALAOUA, K. (1998). *Quelques solveurs pour les opérateurs de convection et leur application à la mécanique des fluides diphasiques*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Kieffer, 1977] KIEFFER, S. W. (1977). Sound speed in liquid-gas mixtures : Water-air and water-steam. *Journal of geophysical research*.
- [Löfqvist *et al.*,] LÖFQVIST, T., SOKAS, K. et DELSING, J. Speed of sound measurements in gas-mixtures at varying composition using an ultrasonic gas flow meter with silicon based transducers.
- [Mc William et Duggins, 1969] MC WILLIAM, D. et DUGGINS, R. (1969). Speed of sound in bubbly liquids. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*.
- [Roy, 1996] ROY, M.-F. (1996). *Basic algorithms in real algebraic geometry and their complexity : from Sturm theorem to the existential theory of reals*.