

# L'Empirical Mode Decomposition, algorithmes et utilisations

Maud Kerebel, Luc Pellissier, Daniel Stan  
sous la direction de Corinne Vachier-Mammar

Juin 2011

## Résumé

La méthode EMD est une méthode de traitement du signal introduite en 1996 par Norden Huang (National Central University, Taïwan). L'EMD cherche à décomposer tout signal oscillant en un nombre fini de parties, aux oscillations de plus en plus lentes. L'originalité de la méthode, par rapport à une transformation en ondelettes par exemple, est de ne pas reposer sur un choix de filtres fréquentiels fixés a priori, mais d'être directement pilotée par les données, l'identification de la composante rapide se faisant localement et relativement à une échelle de temps fixée par l'intervalle entre extrema successifs.

Ce mémoire concentre quatre mois et demi de travail sur les motivations et l'efficacité de l'EMD. Nous nous sommes notamment attachés à questionner et justifier les choix amenant à cette méthode, pour en proposer une évaluation globale au vu de ses promesses.

## Abstract

The EMD method is a signal processing tool introduced in 1996 by Norden Huang (National Central University, Taïwan). The EMD decomposes any oscillating signal in finitely many parts, of decreasing instantaneous frequency. The originality of the method, compared for instance to a wavelet transform, is to be independent of fixed frequential filters : the signal decomposition is directly derived from the data. The identification of the fast component is made locally and relatively to a time scale linked to the distance between successive extrema.

This report includes four and an half months of work. The goal of the study was first to improve the foundations of the decomposition paradigm. We then focused on the question of its efficiency in signal processing applications.

Maud Kerebel  
maud.kerebel@ens-cachan.fr  
Luc Pellissier  
luc.pellissier@ens-cachan.fr  
Daniel Stan  
daniel.stan@ens-cachan.fr

Encadrés par :  
Corinne Vachier-Mammar  
corinne.vachier@cmla.ens-cachan.fr

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>A La représentation du signal</b>	<b>3</b>
<b>1 Transformée de Fourier</b>	<b>4</b>
a) Définition . . . . .	4
b) Non-localité . . . . .	4
c) Uniformité de l'information . . . . .	4
d) Parcimonie de l'information . . . . .	4
<b>2 Fondements d'une nouvelle base</b>	<b>5</b>
a) Idée . . . . .	5
b) Sinusoïde à amplitude et fréquence variables . . . . .	5
<b>3 La transformée de Hilbert</b>	<b>6</b>
a) Définition . . . . .	6
b) Exemple . . . . .	6
c) Sinusoïde généralisée . . . . .	7
<b>B L'Empirical Mode Decomposition</b>	<b>8</b>
<b>1 Intrinsic Mode Function</b>	<b>8</b>
a) Principe . . . . .	8
b) Moyenne locale . . . . .	8
<b>2 Le Sifting Process</b>	<b>8</b>
a) L'algorithme . . . . .	8
b) Exemple . . . . .	10
<b>3 L'Empirical Mode Decomposition</b>	<b>12</b>
a) La décomposition . . . . .	12
b) Convergence . . . . .	12
<b>4 Exemples de décomposition</b>	<b>12</b>
a) IMFs . . . . .	12
b) Fréquence cardiaque . . . . .	12
c) Bourse . . . . .	15
<b>C Implémentation de l'EMD</b>	<b>18</b>
<b>1 Interpolation des extrema</b>	<b>18</b>
a) Le choix de la méthode d'interpolation . . . . .	18
b) Interpolation par splines cubiques . . . . .	18
c) Interpolation par B-splines . . . . .	18
<b>2 Critère d'arrêt du sifting process</b>	<b>19</b>
a) Nécessité de s'arrêter avant une IMF parfaite . . . . .	19
b) Critère de Cauchy en norme $L^2$ . . . . .	19
c) Le double pas d'arrêt . . . . .	19

<b>3</b>	<b>Equation aux dérivées partielles</b>	<b>20</b>
a)	Principe . . . . .	20
b)	Avantage . . . . .	20
<b>D</b>	<b>Que penser de l'EMD ?</b>	<b>22</b>
<b>1</b>	<b>Orthogonalité</b>	<b>22</b>
a)	Motivations . . . . .	22
b)	Quasi-orthogonalité . . . . .	22
c)	Conclusions . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Comparaison avec les ondelettes</b>	<b>23</b>
a)	Banc de filtre . . . . .	23
b)	Asymétrie de l'EMD . . . . .	23
c)	Critère d'arrêt et adaptivité . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Défauts</b>	<b>24</b>
a)	Robustesse . . . . .	24
b)	Critères d'arrêt . . . . .	26
c)	Effets de bord . . . . .	26
d)	Absence d'expression analytique . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Application : le débruitage</b>	<b>27</b>
a)	Première approche . . . . .	27
b)	Débruitage naïf . . . . .	28
c)	Débruitage par seuillage . . . . .	29
d)	Débruitage grâce à <code>imreconstruct.m</code> . . . . .	31
e)	Débruitage dégressif . . . . .	33
f)	Evaluation du débruitage . . . . .	34
g)	Remarques . . . . .	34
	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
<b>E</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

## Introduction

L'EMD est une méthode de décomposition du signal récente (initée en 1998 par Norden Huang [8]) consistant à décomposer un signal en une somme finie de différents signaux, dits modes, oscillant de moins en moins vite. Cette méthode est réputée adaptative et ne dépendre que du signal de départ et non de choix arbitraires d'une banque fréquentielle. Cette transformation permet de séparer des modes du signal, fonctions centrées en zéro oscillant chacune dans une gamme de fréquence limitée. Pour les inventeurs de cette décomposition, cela permet de mieux comprendre des signaux en ne s'intéressant qu'à ceux ayant un sens lié au problème. Ainsi, pour étudier les fluctuations de température d'un océan en vue de conclure à un réchauffement, on peut ignorer les modes ayant une fréquence de l'ordre de l'heure, du jour, ou même du mois pour ne s'intéresser qu'à ceux dont la fréquence est de l'ordre de la dizaine d'années.

Il est plus facile de comprendre la transformation en regardant les sommes partielles des modes en commençant par le dernier. On voit que le dernier mode est le signal vu à une échelle très grossière, et qu'en rajouter revient principalement à augmenter la résolution de la reconstruction.

L'EMD est souvent considérée dans la littérature sous le nom de transformée de Hilbert-Huang. Il s'agit, une fois les modes extraits, de les écrire sous la forme  $a(t) \cos(\omega(t))$ , ce qui permet de représenter le signal de départ comme la fonction  $(t, \omega) \mapsto a$ , où l'un des modes du signal vaut en  $t$  :  $a \cos(\omega)$ . Cette représentation est donc en temps, fréquence et amplitude, là où la représentation induite par la transformée de Fourier par exemple, est en fréquence et amplitude.

Nous nous sommes beaucoup intéressés durant notre stage à chercher les motivations derrière l'EMD, entraînant notamment la définition des modes, qui n'est jamais justifiée dans les articles présentant cette décomposition. Nous avons ensuite cherché à appliquer cette méthode à différents signaux réels (signaux financiers, où l'on sait que les économistes aiment voir des cycles de longueurs différentes se superposant ; signaux physiologiques, où l'on peut espérer voir l'influence du cycle respiratoire par dessus tout autre signal). Nous obtenons des décompositions extrêmement plaisantes mais dénuées d'interprétation, et cette absence d'interprétation est partagée par la communauté.

Nous avons aussi essayé de modifier des choix d'implémentation de l'EMD, sans toutefois obtenir de meilleurs résultats que ceux obtenus dans la littérature. En effet, la méthode telle que présentée par Huang repose sur l'utilisation d'algorithmes d'interpolation, et l'on sait que nombreux sont les algorithmes de ce genre (interpolation polynomiale, splines d'ordres plus ou moins élevés...). De plus, l'utilisation d'algorithmes numériques nécessite des adaptations : tout algorithme devant s'arrêter quand une quantité est nulle doit se voir adjoindre un autre critère d'arrêt, pour éviter qu'il tourne inutilement voire néfastement.

Nous avons également essayé de pousser la comparaison de l'EMD avec l'autre méthode de décomposition multi-échelle employée, qui est bien sûr celle des ondelettes. Nous avons remarqué lors de cette comparaison que, bien que basées sur la même idée d'analyser des signaux non-stationnaires, les deux le font de manière très différentes. L'EMD ne présente en particulier pas la symétrie habituelle des méthodes de décomposition.

Et enfin, nous avons tenté d'éprouver la méthode EMD sur un problème classique du traitement du signal : le débruitage. Les résultats obtenus sont encourageants, mais nécessiteraient une étude plus approfondie, notamment en ce qui concerne le choix des paramètres introduits.

## Première partie

# La représentation du signal

## 1 Transformée de Fourier

### a) Définition

La transformée de Fourier est, depuis son invention, devenue le standard pour la décomposition de signaux. Elle décompose un signal dans la base des fonctions trigonométriques à toutes les fréquences. Étant linéaire, et sa base de projection étant extrêmement régulière (composée de fonctions entières), elle est particulièrement adaptée à la résolution d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, il suffit de se limiter à la recherche de solutions trigonométriques pour obtenir ensuite par linéarité l'ensemble des solutions. Elle permet, de plus, de comparer différents signaux : la transformée de Fourier d'un signal informe sur la répartition de l'énergie dans le domaine fréquentiel.

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Sa transformée de Fourier est définie par :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

Et le signal se retrouve par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{-i\xi x} d\xi$$

Ainsi, toute l'information contenue dans le signal se retrouve contenue dans la transformée de Fourier, mais présentée différemment.

Cependant, la transformée de Fourier présente un certain nombre d'inconvénients que voici.

### b) Non-localité

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Soit  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Supposons que l'on ne connaisse que  $\hat{f}$  et que l'on souhaite reconstruire  $f$  uniquement sur un intervalle, par exemple,  $[0; 1]$ . L'information sur le comportement du signal dans cet intervalle n'est pas localisée dans sa transformée : il n'existe pas de valeurs de  $\xi$  pour lesquelles a priori  $\hat{f}(\xi)$  ne contiendrait aucune information sur le comportement de  $f$  sur un intervalle donné. Il n'y a donc aucune chance de pouvoir restreindre l'intégrale permettant de retrouver  $f$  à une partie de  $\mathbf{R}$  et de récupérer une information pertinente.

### c) Uniformité de l'information

Ce défaut se conjugue à un autre : dans une transformée de Fourier, les harmoniques de rang élevé contiennent énormément d'informations, par exemple, toute l'information sur la discontinuité se trouve dans les fréquences élevées. Tronquer un signal en ne prenant en compte que de la transformée de Fourier sur une bande de fréquences prédéfinies ne peut pas être fait. Des artefacts (phénomène de Gibbs) naissent d'une telle troncature. Ainsi, la donnée de la transformée de Fourier sur tout le spectre fréquentiel est nécessaire pour reconstruire le signal, même en un seul point, ou à une faible précision.

### d) Parcimonie de l'information

Dans certains cas, la transformée de Fourier d'un signal simple est exagérément compliquée. Prenons par exemple une distribution de Dirac en 0, ci-après notée fonctionnellement

$$\delta_0(x) : \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Sa transformée de Fourier  $\hat{\delta}$  n'est autre que la fonction constante égale à 1. Ainsi, la transformation n'a pas capturé la simplicité du signal, en ayant un support non-compact.

Le problème est encore plus prégnant pour, par exemple un créneau. Un créneau est un motif extrêmement simple, et proche d'une fonction trigonométrique, et pourtant, sa transformation ne rend pas compte de sa grande simplicité.

Enfin, on peut se demander pourquoi un signal ne pourrait se faire représenter que par une somme infinie de signaux plus simples.

## 2 Fondements d'une nouvelle base

### a) Idée

On désire donc pouvoir projeter nos signaux sur un ensemble plus vaste de fonctions susceptible de contenir des fonctions simples, utiles en pratique (comme un créneau par exemple), et pour lesquelles l'analyse de Fourier ne donne pas de transformation simple. Parallèlement à cette contrainte, la diversité des signaux réels engage à concevoir une méthode de projection sur une base de fonctions ayant un sens physique pour le signal traité. Enfin, dernière contrainte, l'ensemble des fonctions de référence doit être suffisamment riche pour que la décomposition de tout signal soit finie.

Si l'on veut que la décomposition du signal ait un sens physique, c'est-à-dire qu'elle ait du sens par rapport au signal traité, il faut une méthode ad-hoc. Autant dire que la famille des fonctions de référence qui serviront à la décomposition doit être construite en fonction du signal lui-même. On s'oriente ainsi vers une méthode que l'on peut qualifier d'adaptative, puisque le paradigme de décomposition va s'adapter aux données.

Les contraintes précédentes ont cependant un revers : si la base de projection dépend de la fonction étudiée, alors il n'y a aucune raison pour que la somme de deux décompositions corresponde à la décomposition de la somme des fonctions d'entrée. Autrement dit, on perd a priori la linéarité de la décomposition. Ce point sera discuté, dans le cas de la méthode EMD, dans la quatrième partie de ce rapport.

### b) Sinusoïde à amplitude et fréquence variables

Pour représenter les fonctions, l'analyse de Fourier utilise les sinusoïdes et la combinaison linéaire : la décomposition d'une fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  périodique de période suffisamment régulière s'écrit :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Si le signal à décomposer est non stationnaire, tout se passe comme si l'échelle des temps n'était pas constante mais était tantôt dilatée, tantôt resserrée : une sirène de police qui s'éloigne petit à petit, par exemple. Une autre façon de modéliser la non-stationnarité est de considérer des sinusoïdes dont l'amplitude et la fréquences varient au cours du temps : dans le cas de la sirène de police, l'amplitude décroît avec le temps, la fréquence également.

Dans le cas de signaux non stationnaires, on a donc intérêt à remplacer les sinusoïdes de Fourier  $\{c_n e^{in\omega t}\}$  par des sinusoïdes à amplitude et phase variable  $\{a(t)e^{i\phi(t)}\}$ , où  $\frac{d\phi}{dt}$  correspond à la fréquence à l'instant  $t$ . C'est ce qu'on appelle une fréquence instantanée.

Cette piste a été à l'origine de l'introduction de la transformation en ondelette. Nous allons voir que la méthode EMD propose une alternative originale aux ondelettes.

### 3 La transformée de Hilbert

#### a) Définition

La transformée de Hilbert d'un signal  $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  est la convolée de celui-ci avec la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$ . Ainsi, en notant  $\mathcal{H}(s)$  ladite transformée,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathcal{H}(s)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \right)$$

Un calcul rapide indique que  $\mathcal{H}(\sin) = -\cos$  et  $\mathcal{H}(\cos) = \sin$ .

Ainsi, si  $s(t) = a \cos(\omega t)$ , on a alors :

$$\forall t \in \mathbf{R}, a = \sqrt{s(t)^2 + \mathcal{H}(s)(t)^2}.$$

Il est donc possible de retrouver l'amplitude, et donc la phase, d'un signal sinusoïdal par la transformée de Hilbert.

On va donc chercher à se servir de la transformée de Hilbert pour définir la fréquence et la phase instantanées des éléments de notre décomposition.

L'amplitude instantanée d'un signal  $s$  quelconque en  $t$  sera définie par :

$$a(t) = \sqrt{\mathcal{H}(s)(t)^2 + s(t)^2}$$

et la phase  $\phi$  de manière à ce que  $\phi$  soit positive et à ce que :

$$s + i\mathcal{H}(s) = a(t)e^{i\phi(t)} = m_k + \sum_{i=1}^k a_i(t) \cos(\omega_i(t))$$

On remarque la grande similitude de notre dernière expression avec celle traditionnelle de décomposition en série de Fourier. On voit qu'assouplir la définition de la fréquence et de la phase permet de n'avoir à traiter que des sommes finies.

#### b) Exemple

Voici en figure 1 un exemple de la transformée de Hilbert.

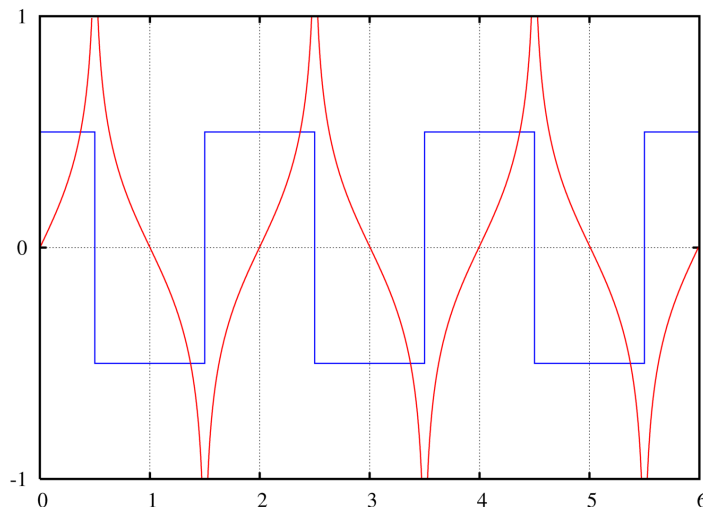


FIGURE 1 – En bleu, un signal créneau. En rouge sa transformée de Hilbert  
Image issue de Wikipedia, sous licence Creative Commons

### c) Sinusoïde généralisée

Pour que cette amplitude et cette phase instantanées aient un sens, il faut toutefois que le signal dont on fait la transformée de Hilbert ressemble à une sinusoïde, pour que l'analyse faite ci-dessus reste justifiée. On va isoler certaines propriétés des sinusoïdes permettant d'obtenir une amplitude définie comme ci-dessus ayant du sens. Il semble naturel de chercher des quasi-sinusoïdes, dont la décomposition phase/amplitude locales fasse sens pour décomposer notre signal de départ.

On remarque qu'entre un maximum et un minimum d'une sinusoïde, il y a un zéro. On peut donc imposer à nos quasi-sinusoïdes d'avoir tous leurs maxima positifs et tous leurs minima négatifs. De plus, ce sont des fonctions centrées sur 0. On va donc imposer à nos quasi-sinusoïdes d'être d'une manière ou d'une autre, centrées sur 0.



## Deuxième partie

# L'Empirical Mode Decomposition

## 1 Intrinsic Mode Function

### a) Principe

On veut décomposer le signal en plusieurs fonctions ( $d_k$ ), proches des sinusoides, pour lesquelles une définition de la fréquence instantanée sera possible. On introduit ainsi la notion de *fonction de mode intrinsèque* ou *intrinsic mode function* (IMF), classe de fonctions vérifiant deux conditions de symétrie, nécessairement vérifiées par les sinusoides, mais plus faibles :

- Le nombre de zéros et le nombre d'extrema diffèrent d'au plus un.
- La moyenne *locale* est nulle.

La seconde condition est la plus importante. En effet, pour un signal de moyenne locale (en un sens discuté dans le paragraphe suivant), la condition sur le nombre de zéros et d'extrema est directement vérifiée. Ainsi, algorithmiquement, seule la deuxième condition sera recherchée.

### b) Moyenne locale

La notion de localité dans cette définition n'est pas bien définie, et est sujette à discussions : selon [8], une notion d'échelle locale temporelle ne peut être définie en général pour des signaux non stationnaires, ce qui rend le choix d'une moyenne locale subjectif. Cependant, [8] propose une première approche où l'on moyenne l'enveloppe supérieure, interpolant les maxima locaux, et l'enveloppe inférieure, des minima locaux. L'idée sous-jacente est que lors d'une analyse *visuelle*, l'échelle de temps des variations apparaissant naturellement est définie par les positions des extrema. De plus, une telle définition assure que les sinusoides sont bien des IMFs parfaites.

## 2 Le Sifting Process

### a) L'algorithme

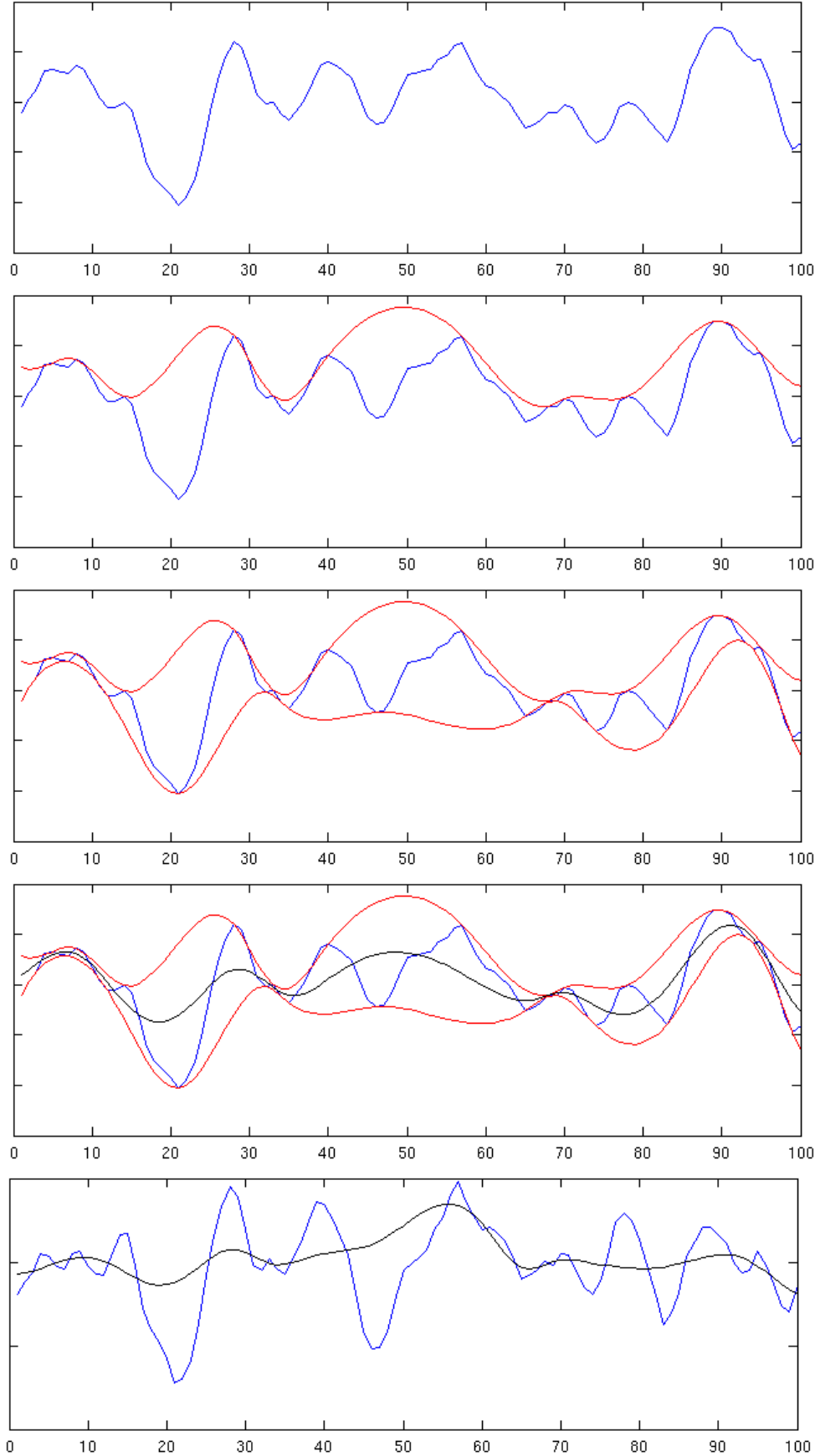
Le *sifting process*, que l'on pourrait traduire par *processus de tamisage*, correspond à l'extraction d'une IMF, à partir d'un signal donné. La fonction de mode intrinsèque, ou IMF, ainsi obtenue peut être vue comme les détails du signal, de variation rapide. Pour cela, on extrait de façon itérative ces détails, jusqu'à conserver une IMF :

1. Calculer par interpolation  $E_{\min}$  (resp.  $E_{\max}$ ), enveloppe des minima (resp. maxima) de  $x(t)$ .
2. Calculer la moyenne locale  $m(t) = \frac{E_{\min}(t) + E_{\max}(t)}{2}$
3. Si  $m \equiv 0$ ,  $x$  est déjà une IMF.
4. Sinon, itérer le processus sur les détails  $c(t) = x(t) - m(t)$ .

Bien que l'opération de calcul de la moyenne ne soit pas linéaire, l'algorithme tend, par construction, vers un signal de moyenne nulle. Cependant, la conservation du nombre d'extrema n'est pas assurée, et certaines itérations du processus peuvent faire apparaître des extrema supplémentaires.

On travaille ainsi à petite échelle, et on lisse les variations globales en retirant la moyenne locale. On voit de plus que la moyenne choisie, et donc l'interpolation, doivent être régulières, afin de conserver dans l'IMF les irrégularités initiales. On peut observer toutes les étapes du *sifting process* dans la figure 2 : en rouge les deux enveloppes d'interpolation, en noir la moyenne locale, et enfin la dernière courbe qui est la différence de la courbe bleue précédente avec sa moyenne locale. En noir la nouvelle moyenne locale.

FIGURE 2 – Exemple d’une itération du sifting process : en rouge les deux enveloppes et en noir la moyenne locale



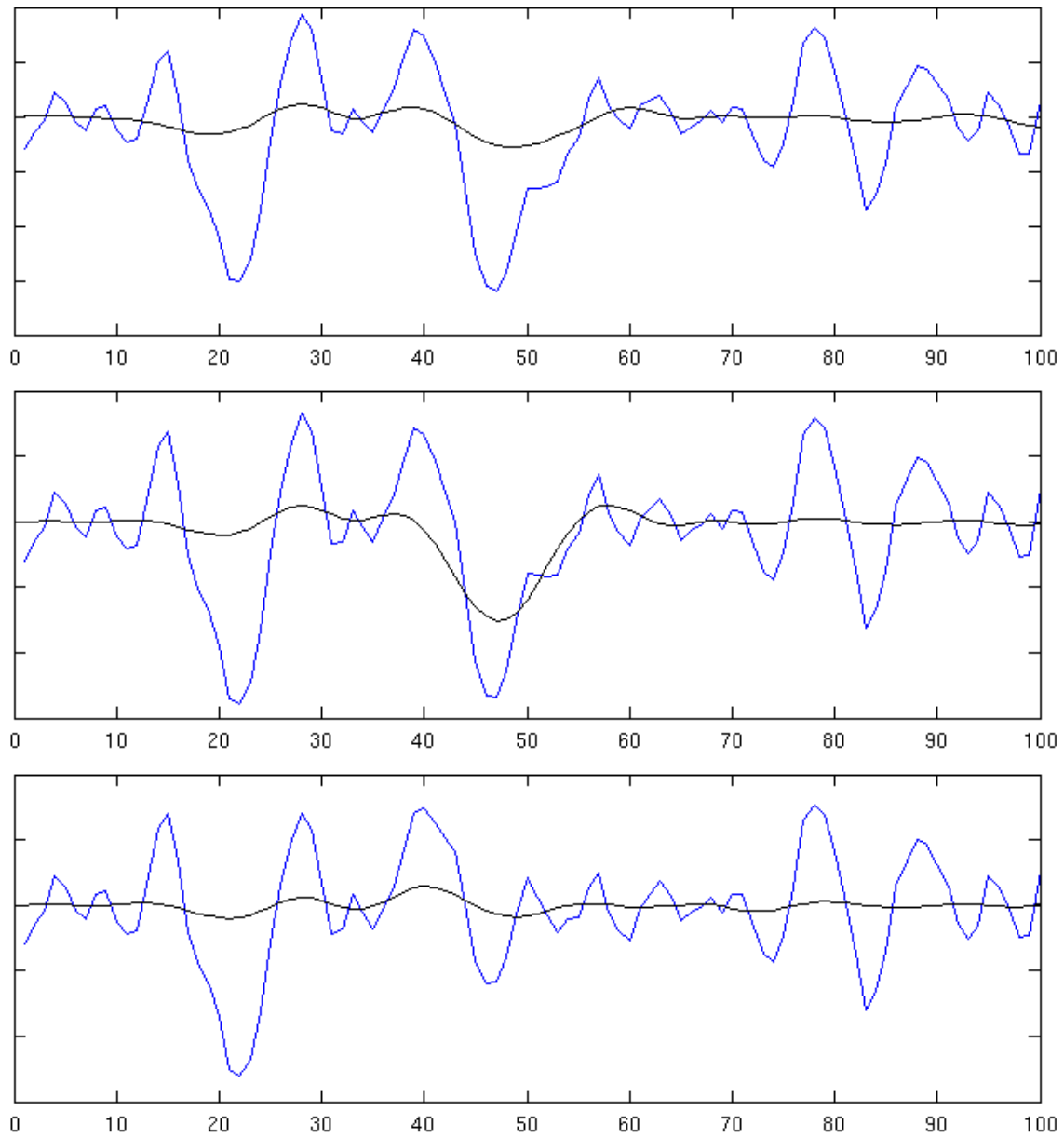


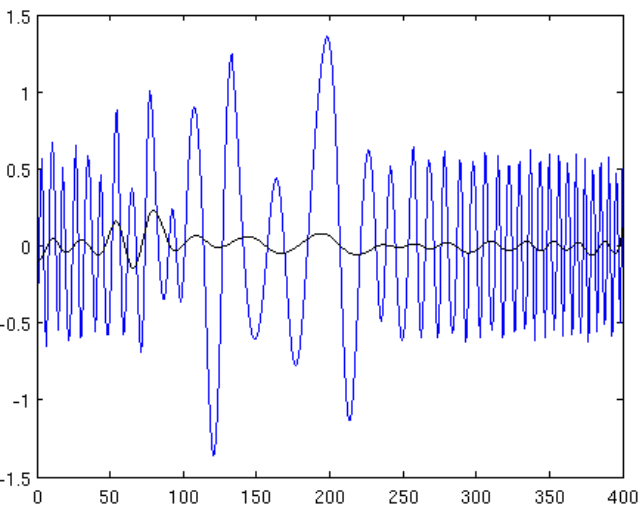
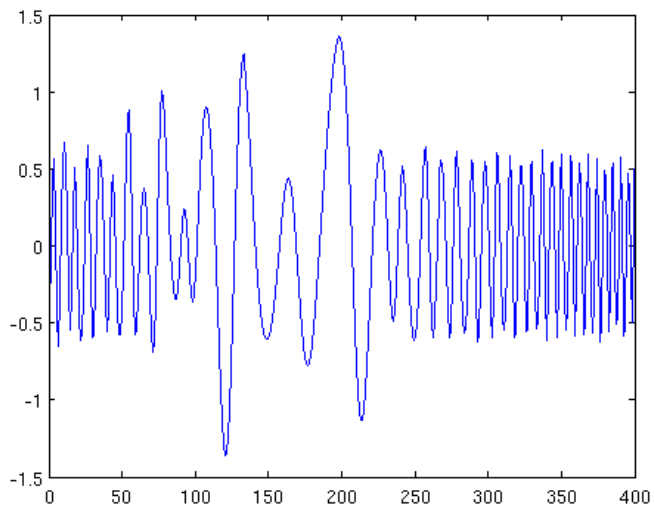
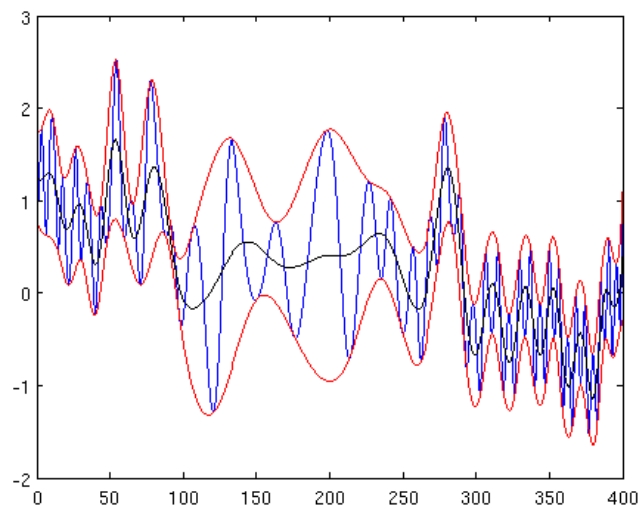
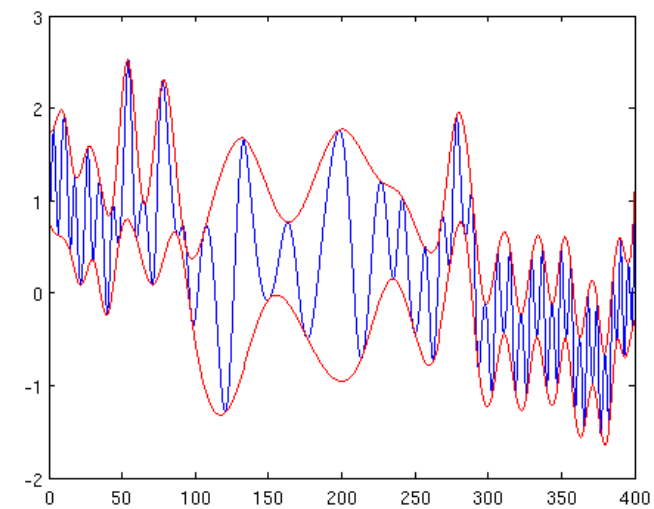
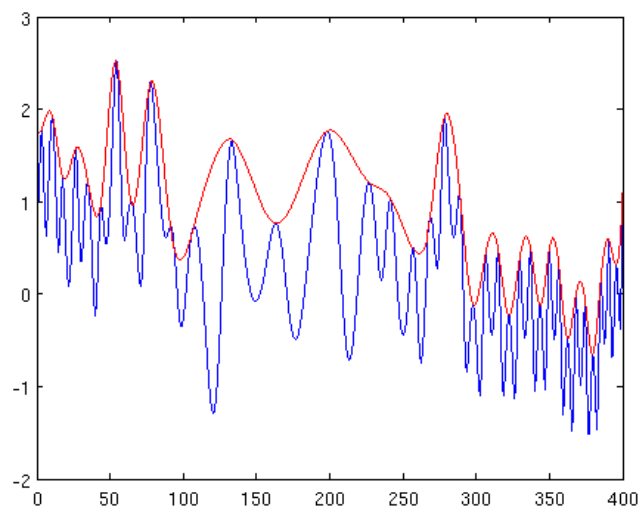
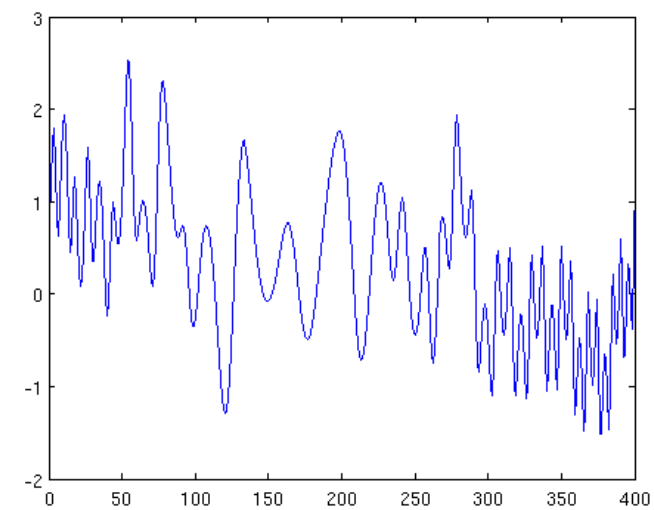
FIGURE 3 – Itérations suivantes du sifting process.

On peut voir dans la figure 3 les étapes d'itération suivantes du *sifting process* pour la même courbe que dans la figure 2. On observe que la moyenne locale, en noir, s'annule progressivement.

## b) Exemple

Voici en figure 4 un second exemple d'une itération du sifting process : on observe de même que la moyenne locale est plus proche de zéro après la première itération du *sifting process*.

FIGURE 4 – Exemple d’une itération du sifting process : en rouge les deux enveloppes et en noir la moyenne locale



### 3 L'Empirical Mode Decomposition

#### a) La décomposition

La décomposition en mode empirique, ou *empirical mode decomposition* (EMD), d'un signal  $x(t)$  consiste à itérer le *sifting process*.

- $k \leftarrow 0, m_0 \leftarrow x(t)$
- Tant que  $m_k$  n'est pas monotone :
  1. Extraire une IMF  $d_{k+1}$  du signal  $m_k$ .
  2.  $m_{k+1} = m_k - d_{k+1}$  est le nouveau résidu.
  3.  $k \leftarrow k + 1$

Lorsqu'une IMF est extraite du signal, le signal résiduel est privé des variations les plus rapides, qui ont été capturées par la fonction de mode intrinsèque. On constate ainsi expérimentalement une diminution du nombre d'extrema et donc l'arrêt de l'algorithme. En particulier, le dernier résidu est une fonction monotone, qui traduit la tendance générale du signal.

On a au final, une décomposition de la forme :

$$x(t) = m_k + \sum_{i=1}^k d_i$$

#### b) Convergence

La boucle *Tant que  $m_k$  n'est pas monotone* de l'algorithme de l'EMD pose bien sûr la question de la terminaison de l'algorithme. Rien ne garantit en effet que le résidu finira par être monotone. Cependant, les observations expérimentales laissent penser que le nombre d'extrema diminue à chaque itération du processus. Et en pratique, le nombre d'IMFs extraites ne dépasse jamais la quinzaine.

L'absence d'expression analytique est donc un vrai manque pour l'EMD, car il n'est pas possible pour l'instant de s'assurer que cette décomposition soit finie, ni même converge.

### 4 Exemples de décomposition

#### a) IMFs

Sur la figure 5 est présentée la décomposition d'un signal par l'algorithme de l'EMD. Les IMFs vont de la plus oscillante à la moins oscillante. On remarque également que le nombre d'extrema diminue à chaque itération. De plus, l'amplitude des variations est aussi décroissante : on passe ainsi de 80 unités dans  $d_1$  à 3.2 dans  $d_{10}$ . Le dernier signal en rouge est la tendance, ou *trend*, qui est monotone.

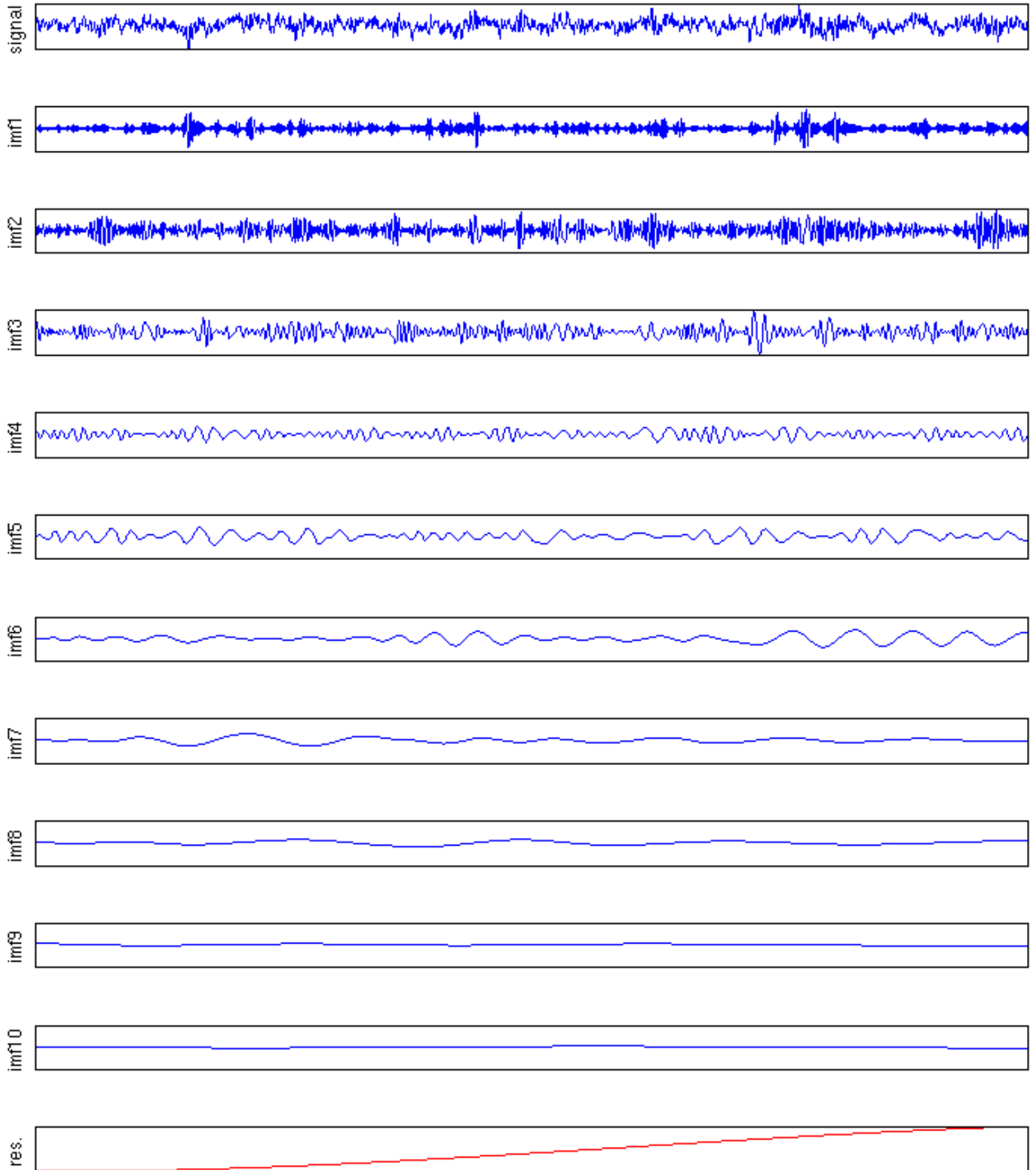
#### b) Fréquence cardiaque

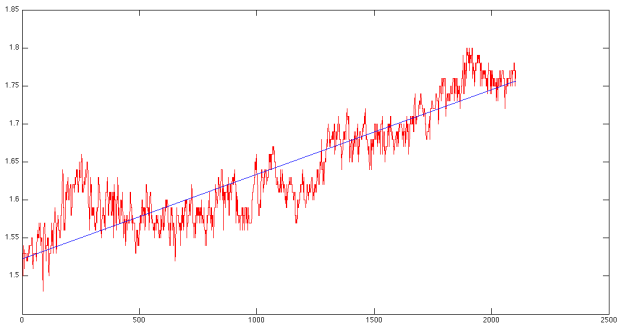
Voici en figures 6 et 7 un exemple de décomposition et de reconstruction d'un signal par l'EMD. Le signal de départ est la fréquence cardiaque d'un marathonien, présentée en rouge. Le signal bleu constitue la reconstruction progressive de cette fréquence cardiaque : on commence par la tendance, ou *trend* à laquelle on ajoute progressivement les différentes IMFs extraites. On observe donc les sommes partielles successives de la décomposition en IMFs.

Les trois premières reconstructions sont très proches : cela signifie que les oscillations de faible fréquence que l'algorithme a détecté ont une amplitude très petite devant la tendance, et ne sont pas significatives. On voit qu'ensuite, à chaque ajout d'IMF, la somme partielle épouse les pics du signal de manière de plus en plus convaincante. On peut même voir dans les figures (h) ou (i) une représentation du signal plus fidèle que sa mesure, car les variations importantes et rapides, qui se situent dans les premières IMFs et qui pourraient n'être que du bruit, n'y sont pas incorporées.

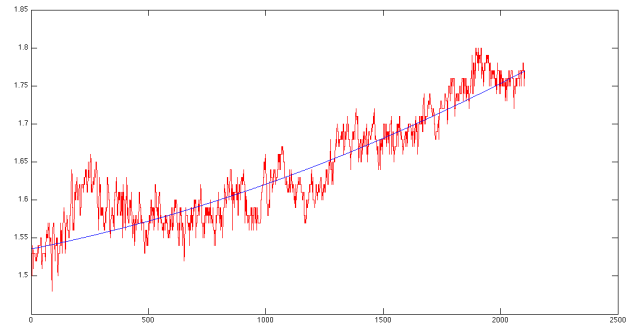
FIGURE 5 – Décomposition en IMFs

Empirical Mode Decomposition

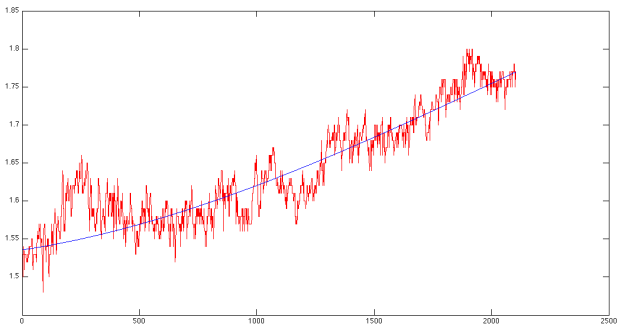




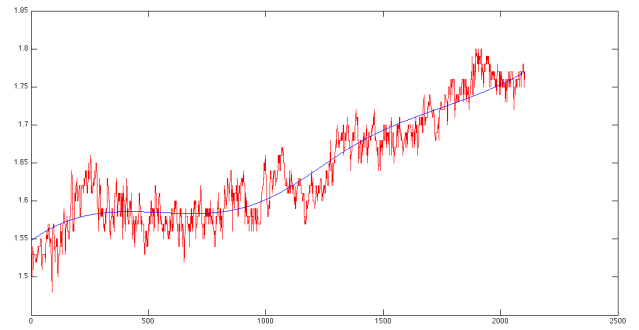
(a)



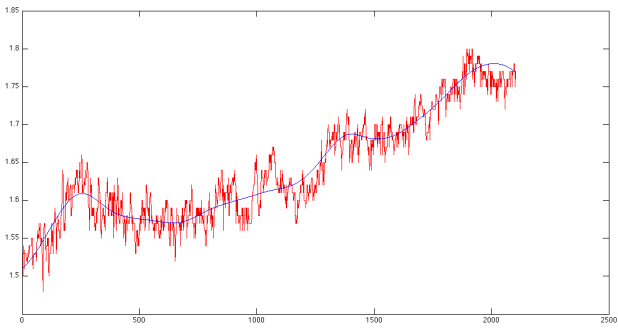
(b)



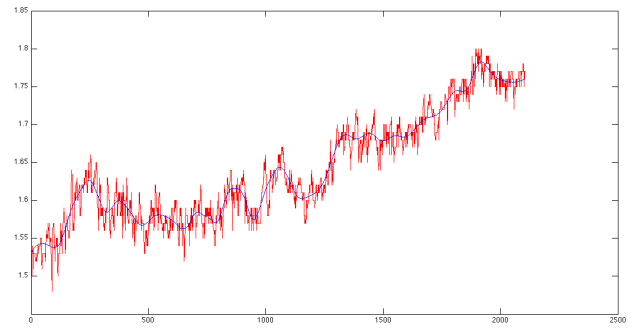
(c)



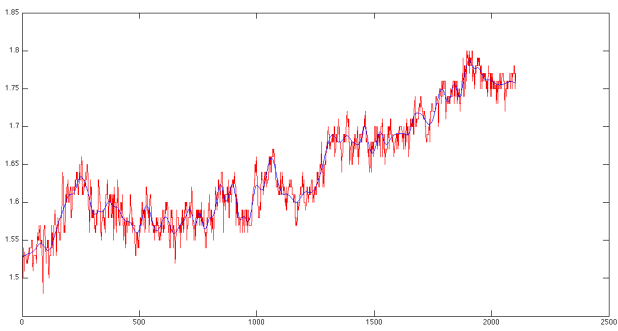
(d)



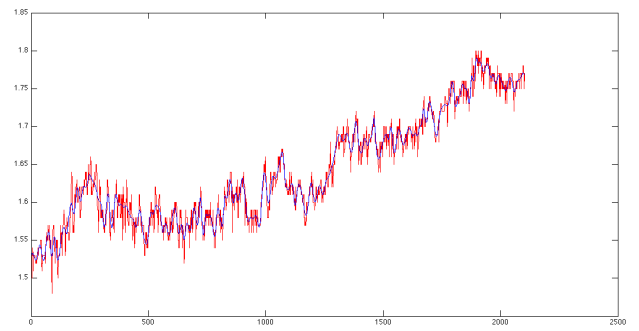
(e)



(f)

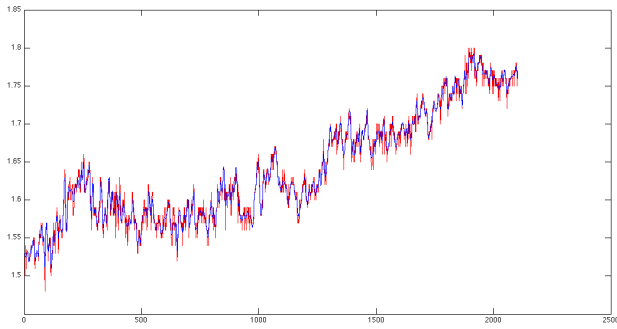


(g)

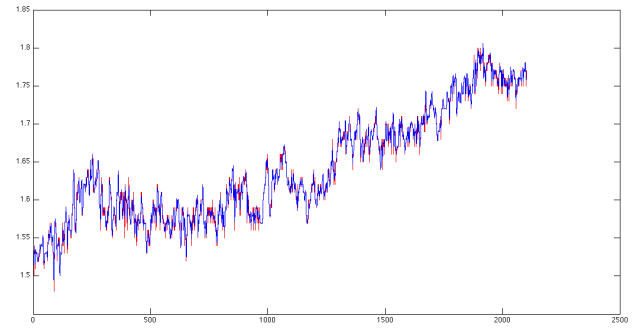


(h)

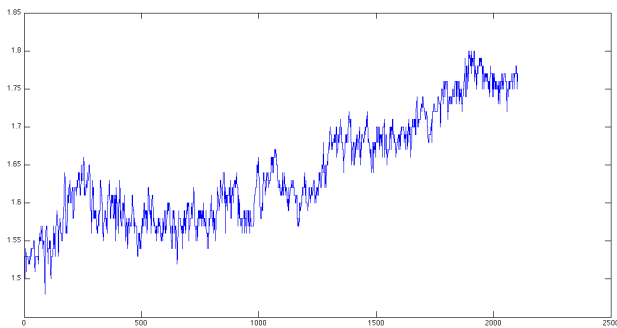
FIGURE 6 – Fréquence cardiaque (I)



(i)



(j)



(k)

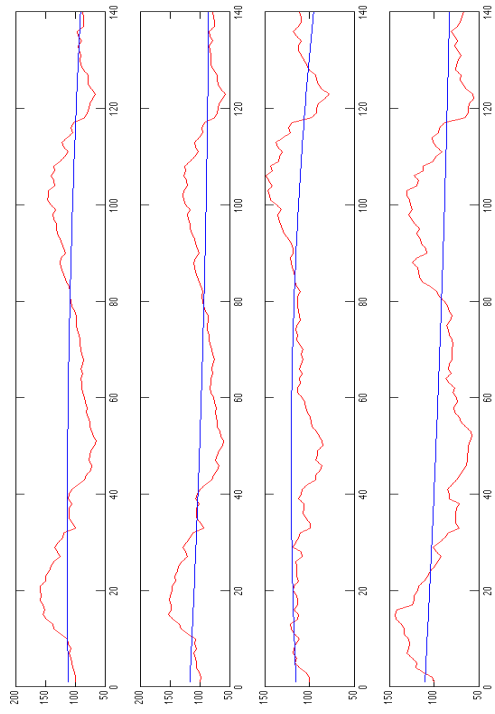
FIGURE 7 – Fréquence cardiaque (II)

### c) Bourse

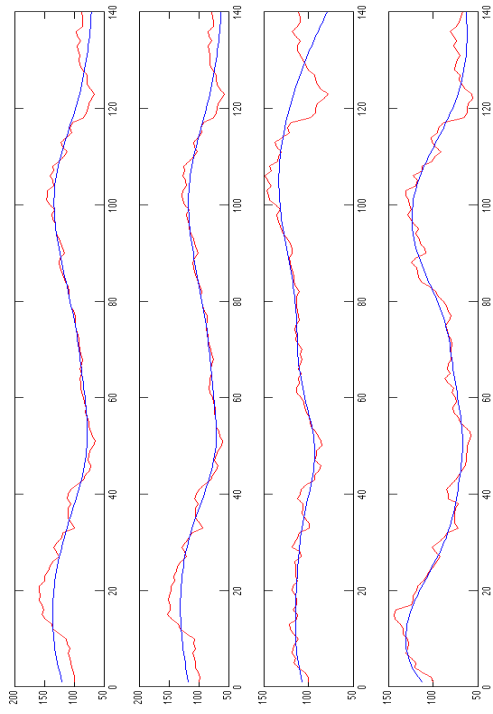
Les quatre signaux présentés en rouge dans les figures 8 et 9 sont des signaux boursiers : le CAC 40, l'Eurostoxx 80, le Dow Jones et le Nikkei, échantillonnés tous les mois de 1999 à fin 2010. On peut voir ici aussi le même effet de reconstruction, sans l'aspect de débruitage : comme chaque point est une moyenne sur un mois, le signal est déjà lissé.

On peut remarquer que les signaux d'origine sont déjà fortement corrélés, et que leurs différentes IMFs le sont aussi, dans les mêmes proportions.

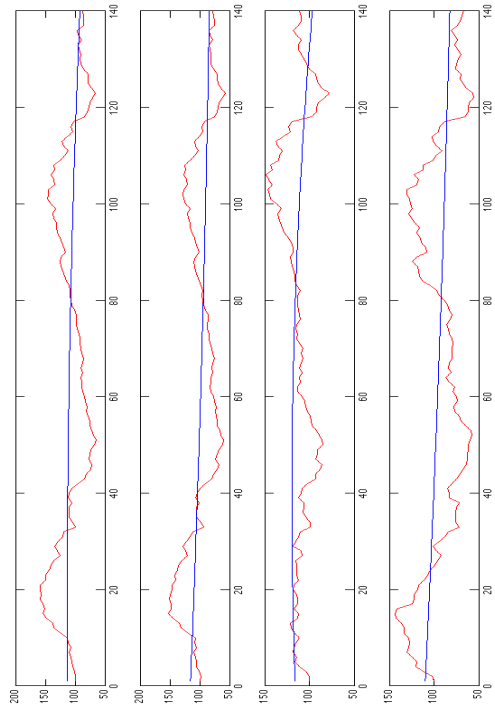




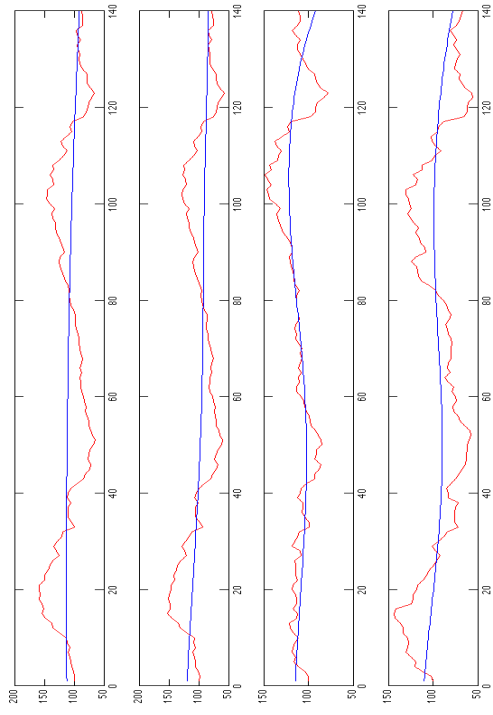
(a)



(b)

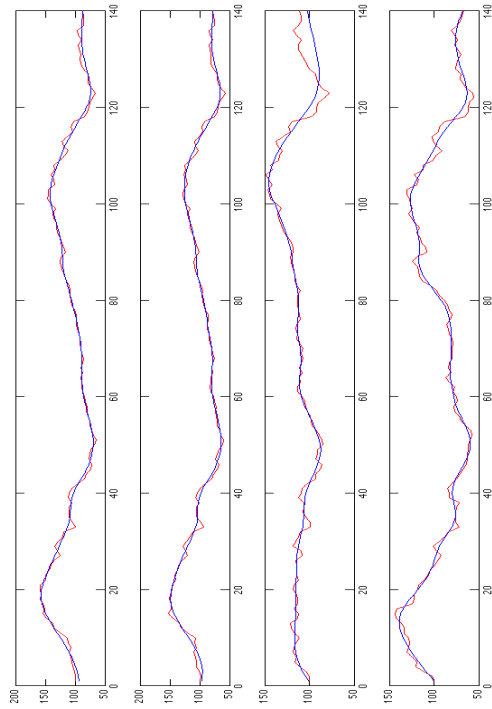


(c)

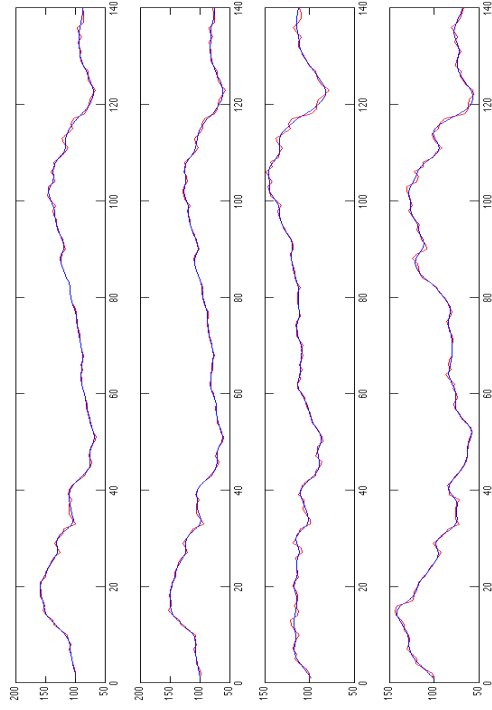


(d)

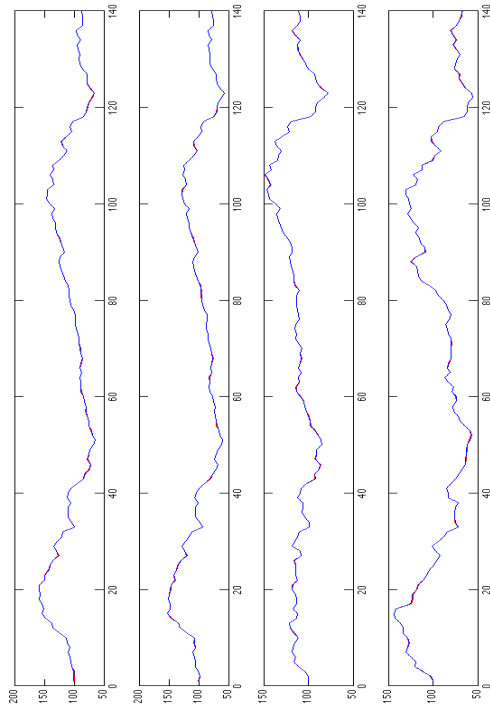
FIGURE 8 – Signaux boursiers (I)



(e)



(f)



(g)

FIGURE 9 – Signaux boursiers (II)

## Troisième partie

# Implémentation de l'EMD

## 1 Interpolation des extrema

### a) Le choix de la méthode d'interpolation

La méthode d'interpolation par splines cubiques est la méthode qui est le plus couramment retenue dans les différentes implémentations de l'algorithme de l'EMD. Comme il est expliqué dans [12], les autres types d'interpolation, linéaires ou polynomiales, ont tendance à faire augmenter significativement le nombre d'itérations du *sifting process* et à capturer des fréquences dans des IMFs où elles ne devraient pas se trouver. C'est pourquoi on choisit les splines cubiques, qui présentent un bon compromis entre les exigences de simplicité et de décomposition adéquate.

### b) Interpolation par splines cubiques

L'interpolation par splines cubiques est une méthode d'interpolation qui permet d'obtenir une courbe polynomiale de degré 3 par morceaux, de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Pour des points d'interpolation  $(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$ , on définit la spline cubique par morceaux :

$$f_i : \begin{cases} [x_{i-1}; x_i] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_i(x) \end{cases} \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que :}$$

- Les  $f_i$  soient des polynômes de degré 3 :

$$f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i^3 \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (1)$$

- Les  $f_i$  interpolent les points considérés :

$$f_i(x_i) = y_i \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2)$$

$$f_{i+1}(x_i) = y_i \quad \text{pour } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad (3)$$

- Les dérivées premières et secondes soient égales :

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad (4)$$

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad (5)$$

L'équation (1) donne  $4n$  inconnues, et l'on dispose de  $n$  relations dans les équations (2) et (3), et de  $n-1$  relations dans les équations (3) et (4). Ce qui fait un total de  $4n-2$  relations pour  $4n$  inconnues. Il reste donc deux degrés de liberté, qui sont souvent choisis de telle sorte que les deux dérivées secondes extrémales soient nulles.

### c) Interpolation par B-splines

Dans l'algorithme présenté dans [8], l'interpolation des extrema est réalisé à l'aide de splines cubiques. Dans l'article [3], il est proposé une autre méthode d'interpolation qui se base sur les B-splines. Sans rentrer dans les détails, les B-splines sont une généralisation des courbes de Bézier. Ce sont des combinaisons linéaires positives de fonctions polynomiales coefficientées par les points à interpoler. Le degré de la B-spline doit être fixée à l'avance.

Les tests effectués révèlent des résultats aussi bons, voire plus fins que pour l'algorithme classique proposé dans `emd.m`. Cependant, il faut définir un paramètre de plus, qui est le degré de la B-spline.

## 2 Critère d'arrêt du sifting process

### a) Nécessité de s'arrêter avant une IMF parfaite

Comme expliqué précédemment, l'objectif du *sifting process* est d'extraire une IMF du résidu laissé par l'itération précédente de l'algorithme de l'EMD. On a vu que la définition d'une IMF résidait en deux points : la différence d'au plus un entre le nombre de zéros et le nombre d'extrema, et la *moyenne locale nulle*. La première condition découle de la seconde, il faut donc se concentrer sur celle-ci pour trouver un critère d'arrêt adéquat. En effet, si l'on itère trop le sifting process, des fréquences trop basses vont être capturées dans les premières IMFs, tandis que si l'on n'itère pas assez, les fréquences hautes vont se propager dans toutes les IMFs. La décomposition manquerait alors d'intérêt.

### b) Critère de Cauchy en norme $L^2$

On rappelle ici l'algorithme du sifting process pour  $x(t)$  un signal donné :

- $m_1 = \text{moyenne}(E_{min}(x), E_{max}(x))$   
 $c_1 = X - m_1$
- Tant que  $c_k$  n'est pas une IMF, faire  
 $m_{k+1} = \text{moyenne}(E_{min}(c_k), E_{max}(c_k))$   
 $c_{k+1} = c_k - m_{k+1}$

Le critère retenu par [8] est un critère de Cauchy en norme  $L^2$  qui s'exprime de la façon suivante :

$$SD = \sum_{t=0}^T \left( \frac{c_k(t) - d_{k+1}(t)}{c_k(t)} \right)^2 \in [0.2; 0.3]$$

On cherche donc à rendre l'énergie entre deux itération successive presque nulle, mais pas complètement pour ne pas surdécomposer. Le choix des bornes 0.2 et 0.3 reste cependant empirique, et est justifié par [8] de la façon suivante :

A typical value for  $SD$  can be set between 0.2 and 0.3. As a comparison, the two Fourier spectra, computed by shifting only five out of 1024 points from the same data, can have an equivalent SD of 0.2 – 0.3 calculated point-by-point. Therefore, a  $SD$  value of 0.2 – 0.3 for the sifting procedure is a very rigorous limitation for the difference between siftings.

### c) Le double pas d'arrêt

En amélioration du critère d'arrêt présenté dans [8], l'article [12] propose un critère plus subtil. Il s'agit de définir deux pas  $\theta_1$  et  $\theta_2$  : le premier limite les petites amplitudes et le second les grandes.

On définit la moyenne et l'amplitude du signal donné d'enveloppes  $E_{max}$  et  $E_{min}$  :

$$m(t) = \frac{E_{max}(t) + E_{min}(t)}{2} \quad \text{et} \quad a(t) = \frac{E_{max}(t) - E_{min}(t)}{2}$$

La fonction d'évaluation est :

$$\sigma(t) = \left| \frac{m(t)}{a(t)} \right|$$

On itère alors le *sifting process* jusqu'à ce que

$\sigma(t) < \theta_1$  pour  $(1 - \alpha)$  de la durée du signal,

$\sigma(t) < \theta_2$  pour  $\alpha$  du signal restant.

Usuellement, on choisit  $\alpha = 0.05$ ,  $\theta_1 = 0.05$  et  $\theta_2 = 10\theta_1$ . Ce sont les valeurs proposées par défaut dans l'algorithme `emd.m` de Patrick Flandrin. On peut récupérer tous les scripts correspondants à l'adresse [6].

### 3 Equation aux dérivées partielles

#### a) Principe

Il existe une autre approche de l'EMD, proposée dans [4] et reprise dans [10]. Cette approche prend en considération, non seulement les extrema du signal de départ, mais aussi tous les *turning points*, notamment les points d'inflexion. Sans rentrer dans les détails de la démarche, on aboutit alors à un système d'équations aux dérivées partielles. Pour un signal  $s(x, t)$  donné, dépendant à la fois du temps et de l'espace, on obtient :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0$$

La fonction  $g(x, t)$  est une fonction explicite dépendant du signe de  $s(x, t)$  et servant à distinguer les minima, les maxima, et le sens des points d'inflexion dans l'EDP.

L'implémentation de cette méthode grâce à des schémas numériques spécifiques aux EDP donne également de bons résultats, proche de la décomposition attendue d'après la définition d'une IMF. En outre, elle a le mérite de posséder des fondements mathématiques fiables, ce qui manque à l'algorithme de l'EMD présenté précédemment. Et elle s'applique en 2D de la même façon, ce qui n'est pas non plus pas le cas pour l'implémentation précédente.

#### b) Avantage

Un exemple qui illustre le choix préférentiel des *turning points* et non pas des extrema est le suivant. Dans la figure 10, on observe un signal composé de la somme d'une sinusoïde et d'une parabole, qui sont choisis de façon à ce que le signal soit strictement croissant, du moins sur les bords, comme on peut le voir sur la figure 11. Ce signal ne possède donc pas d'extrema, et l'implémentation classique de l'EMD passe complètement à de la décomposition attendue : une sinusoïde plus une parabole. Tandis que la méthode par EDP identifie parfaitement les maxima et minima de la sinusoïde comme étant des points clés dans la représentation de ce signal, et ne tombe pas dans cet écueil.

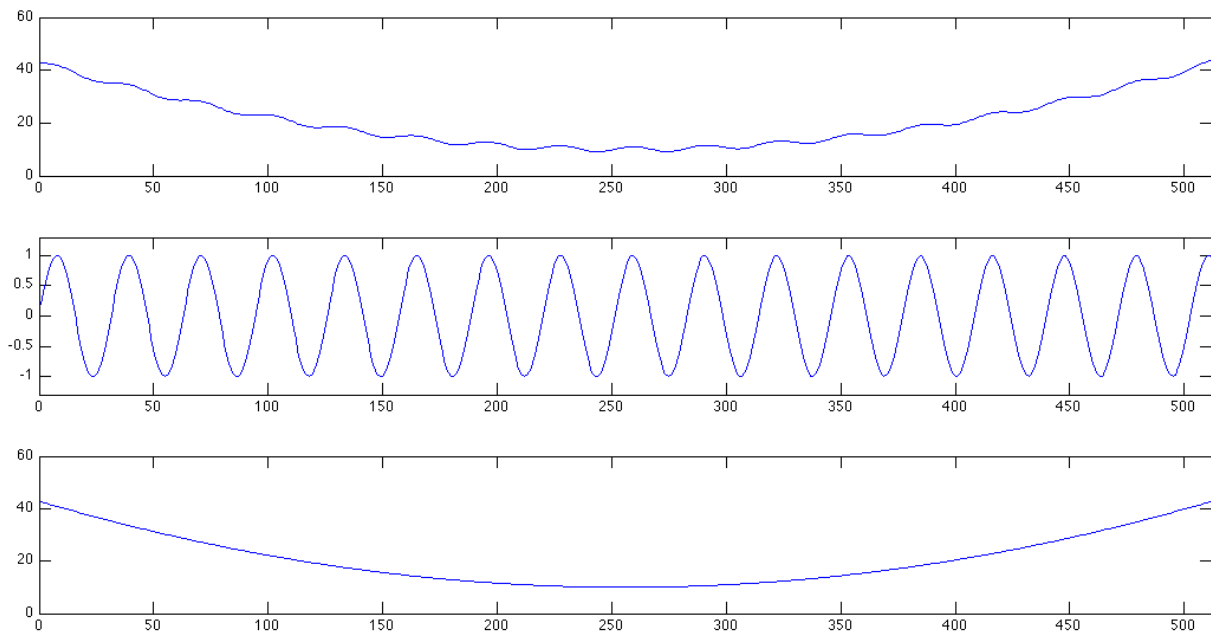


FIGURE 10 – Somme d'une sinusoïde et d'une parabole

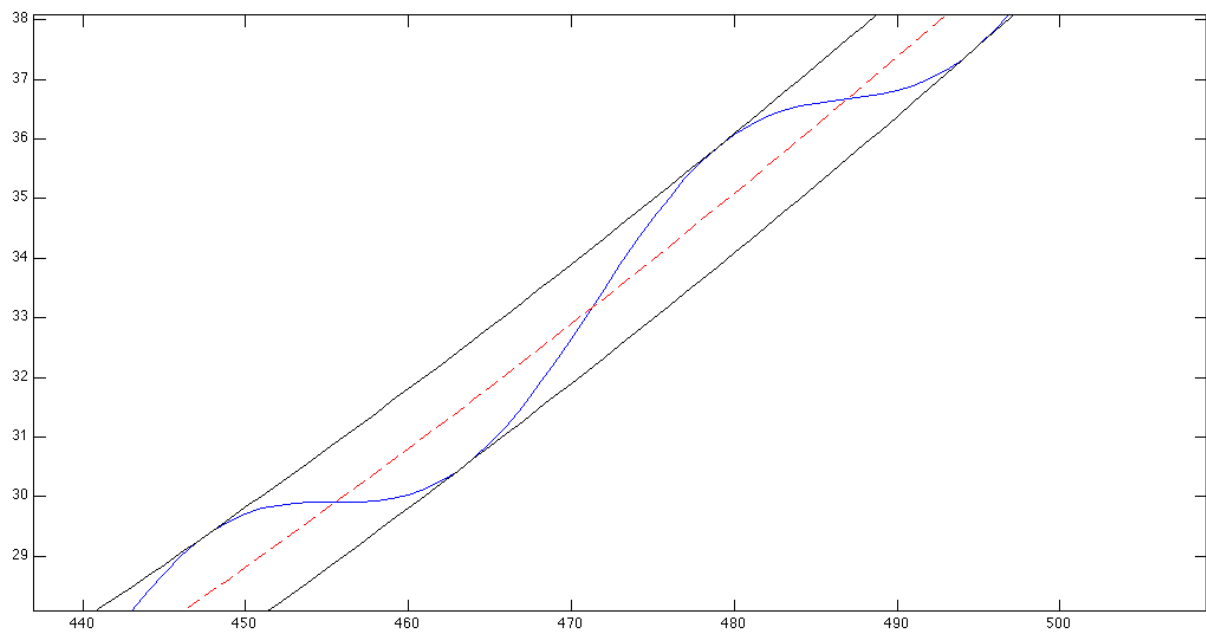


FIGURE 11 – Signal strictement croissant

## Quatrième partie

# Que penser de l'EMD ?

## 1 Orthogonalité

### a) Motivations

Bien que l'EMD présente une approche non linéaire, la décomposition finale s'exprime simplement comme une somme de modes et d'une tendance. On peut donc se demander l'influence de la suppression de certains modes, bien que cela ne conserve pas nécessairement la décomposition, du fait de la non-linéarité. La suppression d'un ensemble  $J$  de modes pourrait par exemple être utile à des fins de débruitage/compression. Un critère naturel de l'influence d'un mode sur le signal analysé serait la variation d'énergie causée par le retrait du mode.

Cependant, l'énergie totale du signal n'est a priori pas monotone en fonction de ces retraits comme en atteste l'identité :

$$\left\| \sum_{i \in J} d_i + m_k \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|d_i\|^2 + \|m_k\|^2 + 2 \sum_{i < j \in J} \langle d_i | d_j \rangle + 2 \sum_{i \in J} \langle d_i, m_k \rangle$$

On souhaiterait ainsi tester l'orthogonalité des modes afin de valider des méthode de sélections basée sur l'énergie.

### b) Quasi-orthogonalité

Selon [8], un certain type d'orthogonalité est approximativement atteint expérimentalement. La comparaison effectuée est globale à l'ensemble des modes et [8] introduit un indice d'orthogonalité  $IO$ , de l'ordre de  $10^{-3}$  pour les signaux étudiés, où  $IO$  est défini par :

$$IO = \int \frac{1}{X^2(t)} \left[ \sum_{i < j} d_i(t)d_j(t) + \sum_i d_i(t)m_k(t) \right]$$

Cependant, on recherche ici une monotonie dans le comportement de l'énergie, et on veut donc une orthogonalité des modes et de la tendance dans leur ensemble. De plus, plutôt que de regarder exactement le produit scalaire  $\langle d_i | d_j \rangle$ , ou  $\langle d_i, m_k \rangle$ , dont l'ordre de grandeur dépend de l'échelle choisie pour l'échantillon, on peut s'intéresser à l'angle géométrique  $\theta$  entre  $d_i$  et  $d_j$ , défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \times \|d_j\|}$$

L'amplitude relative des modes n'est donc pas prise en compte.

Pour les signaux de fréquences cardiaques étudiés précédemment, on obtient alors des angles variant autour de  $90$  à  $\pm 10$  degrés (avec un écart type de  $3.8$ ) ce qui montre une orthogonalité relativement bonne des modes malgré le caractère non linéaire de la décomposition. Toutefois, ce résultat doit être modéré : l'EMD est une analyse multi-échelle et a donc tendance à séparer les fréquences entre plusieurs modes ce qui rend ces derniers relativement orthogonaux. D'autre part, les résultats sont beaucoup moins prometteurs sur certains signaux synthétisés où des écarts de plus de  $30^\circ$  peuvent apparaître.

### c) Conclusions

Ces résultats n'enterrent pas le concept d'IMF lui-même, mais permettent de critiquer le procédé d'extraction initial, qui apporte peu de propriétés mathématiques aux modes. On peut, par exemple,

modifier l'algorithme afin de forcer l'orthogonalité en s'inspirant du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt comme présenté dans [9].

De plus les applications telles que le débruitage restent envisageable, mais nécessiteront de pousser les traitements directement sur les modes.

## 2 Comparaison avec les ondelettes

Un des buts de l'EMD est d'apporter une méthode d'analyse multi-échelle du signal et il est donc naturel de la comparer à des analyses du même type, éprouvées, comme l'analyse par ondelettes. Plus particulièrement, l'EMD étant fournie par un algorithme, on peut s'intéresser à l'équivalent algorithmique utilisé pour les ondelettes : la transformée en ondelettes discrète décrite dans [2].

### a) Banc de filtre

La décomposition en ondelette est un processus itératif qui décompose le signal  $x(t)$  à l'aide d'un filtre passe haut et d'un filtre passe bas en quadrature. Le filtre passe haut est réalisé à l'aide de la convolution du signal et de l'ondelette choisie.

L'ondelette choisie étant de moyenne nulle et oscillante, elle capture les variations rapides du signal  $h(t)$ , que l'on peut voir comme un analogue des détails. D'autre part, le deuxième signal  $g(t)$ , issu du filtre passe bas, est sous-échantillonné, et le traitement est appliqué récursivement, comme le montre la figure 12. D'un point de vue théorique, ce sous-échantillonnage, revient à diviser par 2 la fréquence de l'ondelette, donc à capturer des fréquences plus faibles. En ce sens, les algorithmes EMD et transformée en ondelettes discrète analysent tous les deux le signal en commençant par l'extraction des *détails* pour s'achever sur les composantes les plus grossières (basse fréquence).

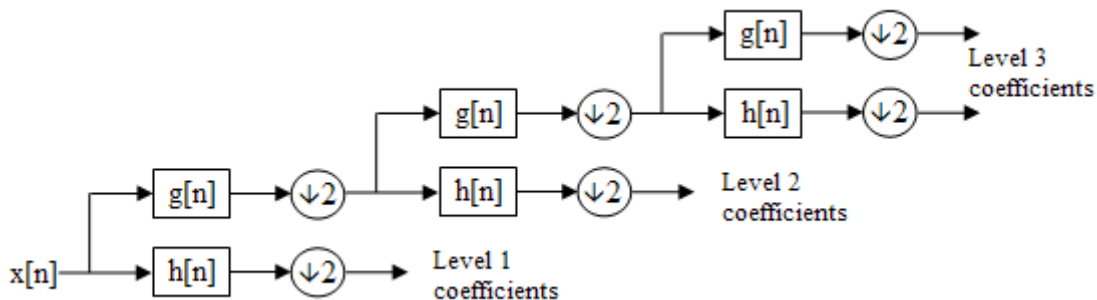


FIGURE 12 – Décomposition en ondelettes discrète et banque de filtres associée

### b) Asymétrie de l'EMD

La plupart des décompositions de signal possèdent une réciproque qui permet à partir de la décomposition de reconstituer le signal originel. Cette réciproque est une transformation souvent analogue à la décomposition comme c'est le cas dans la reconstruction par ondelette où les composantes doivent être traités par les filtres miroir dans l'ordre inverse de la décomposition, comme l'illustre la figure 13.

D'autre part, la décomposition en modes empirique réalise des extractions de signaux par soustraction successive d'IMF, ce qui rend la reconstruction rapide et visuelle puisqu'elle consiste en une simple sommation. En ce sens, l'EMD possède un caractère asymétrique atypique des décompositions de signal.



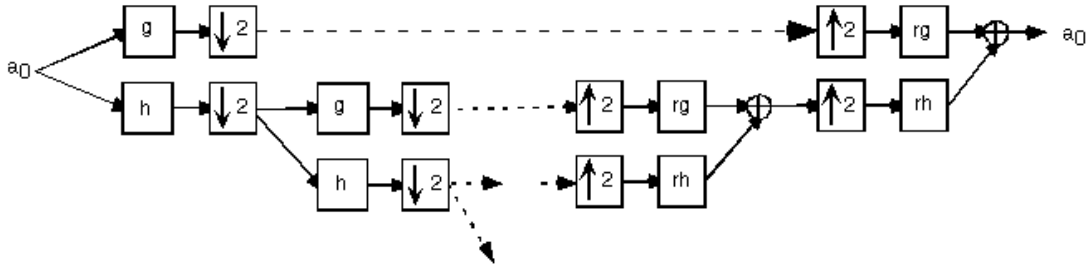


FIGURE 13 – Décomposition puis reconstruction du signal en utilisant les ondelettes : les deux opérations sont symétriques

### c) Critère d'arrêt et adaptivité

Lors de la transformée en ondelette, un sous-échantillonnage est réalisé. L'algorithme se termine du fait de la précision finie des données, mais la décomposition est théoriquement infinie. Ce critère d'arrêt a cependant des intérêts pratiques évidents puisque l'on peut connaître à l'avance le nombre de composantes qu'il sera nécessaire de calculer.

Au contraire, l'EMD se base sur les variations du signal pour l'extraction des modes, et on ne peut donc prévoir, *a priori*, leur nombre. Ceci est à la fois un inconvénient pratique et une force de l'algorithme, puisqu'on pourrait ainsi penser qu'il y a une meilleure correspondance entre un mode et les origines de ses oscillations. Comme cela a déjà été relevé précédemment, l'EMD s'adapte donc mieux aux données en entrée, et ceci sans le choix de paramètres pour la décomposition (type d'ondelette, nombre de sous-échantillonnage à effectuer etc.)

## 3 Défauts

### a) Robustesse

Un défaut de l'EMD est son manque de robustesse face à une petite perturbation. On peut l'observer dans l'exemple suivant. La figure 14 représente un signal quelconque, et le même auquel on a ajouté une petite perturbation. Les figures 15 et 16 sont leurs IMFs respectives. La première chose que l'on observe est leur nombre : 4 IMFs pour le premier, 11 pour le second. De plus, aucune courbe de la figure 15 ne se retrouve dans la figure 16.

Cet exemple illustre tout à fait le manque de robustesse de l'EMD, dans l'implémentation choisie, qui est celle de [6].

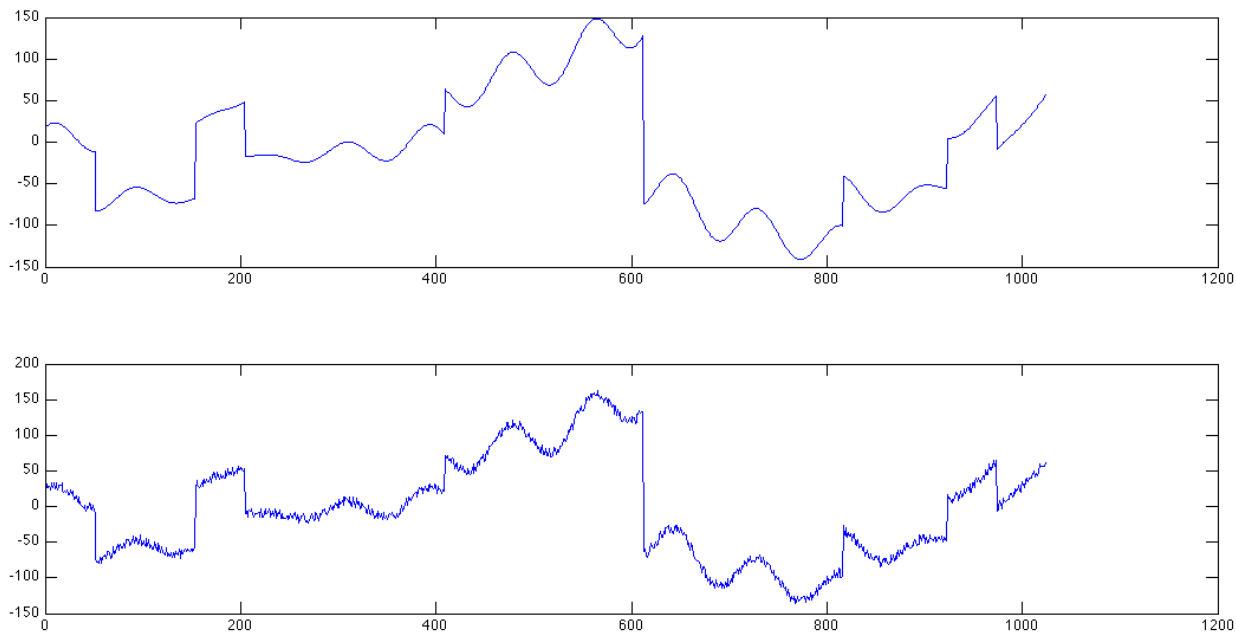


FIGURE 14 – Signal de référence et signal perturbé

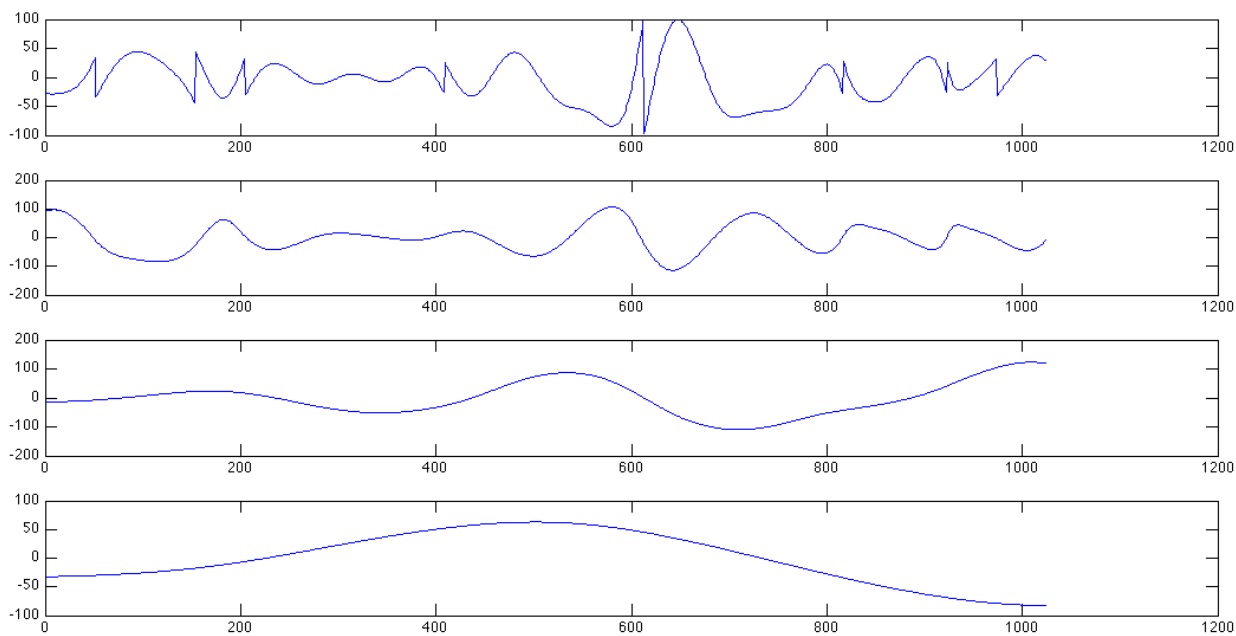


FIGURE 15 – IMFs du signal de référence

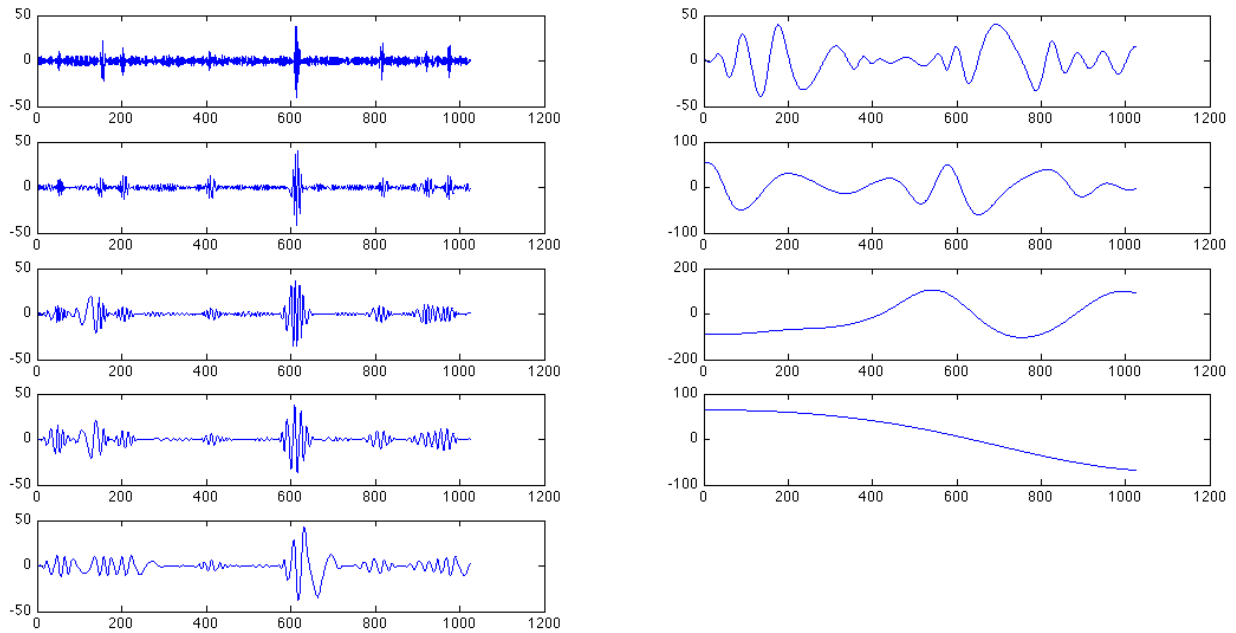


FIGURE 16 – IMFs du signal perturbé

## b) Critères d'arrêt

Comme on a pu le voir dans les sections précédentes, implémenter l'EMD nécessite de faire des choix, notamment en ce qui concerne le critère d'arrêt du *sifting process*, ce qui est profondément relié à la libre interprétation de la moyenne locale nulle dans la définition d'une IMF. Ces choix faussent donc en partie la légitimité de la méthode, car ils ne se basent que sur des constatations empiriques et pas sur des preuves mathématiques. Le critère d'arrêt est cependant nécessaire pour que l'algorithme termine en un nombre fini d'étapes. En l'état actuel des connaissances, il ne semble pas se dégager de consensus sur le critère à privilégier, comme le prouve les différents choix effectués en [8], en [6] et en [12].

## c) Effets de bord

Un autre point négatif est le fait que l'EMD est très sensible aux effets de bord. Cela est en partie lié au choix usuel des splines cubiques, dont deux degrés de liberté sont laissés au programmeur : les choix effectués peuvent améliorer le traitement d'un signal particulier, mais il n'existe pas de méthode systématique pour les diminuer. Des tentatives classiques de symétrisation, d'effet miroir, d'extrapolation ont été effectuées, et sont développées en [8], en [10] et en [3].

## d) Absence d'expression analytique

Le dernier défaut de l'EMD présenté ici, et non des moindres, est son absence d'expression analytique. L'EMD étant un algorithme, il n'y a pas de fondement mathématiques sous-jacent à cette décomposition, comme pour Fourier ou les ondelettes. Les papiers les plus prometteurs dans la recherche des fondements mathématiques ne sont pas tellement avancés sur la question : [3] parvient à prouver une partie de la convergence de l'algorithme grâce aux B-splines ; [10] est cependant plus

prometteur en introduisant une EDP qui repense tout l'EMD pour se baser sur la notion de *turning point* et pas d'extrema. Mais de là à extraire un algorithme de décomposition proche de la méthode initiale, dont on connaîtrait par avance la convergence et les paramètres à privilégier, il y a un grand pas qui n'est pas encore franchi.

## 4 Application : le débruitage

### a) Première approche

On teste ici les applications potentielles de l'EMD pour le débruitage. Comme chaque IMF est sensée avoir un sens physique en capturant une certaine gamme de fréquences, on peut supposer que le bruit est contenu dans les premières IMFs, qui contiennent les fréquences les plus élevées.

On a donc bruité artificiellement le signal **Piece-Regular**, comme on peut le voir dans la figure 17. La décomposition en IMFs est présentée dans la figure 18. A l'oeil, on a effectivement la confirmation que le bruit supplémentaire est contenu dans les cinq premières IMFs, mais pas dans les cinq dernières. Il faudrait donc supprimer le bruit qui semble présent dans les premières IMFs.

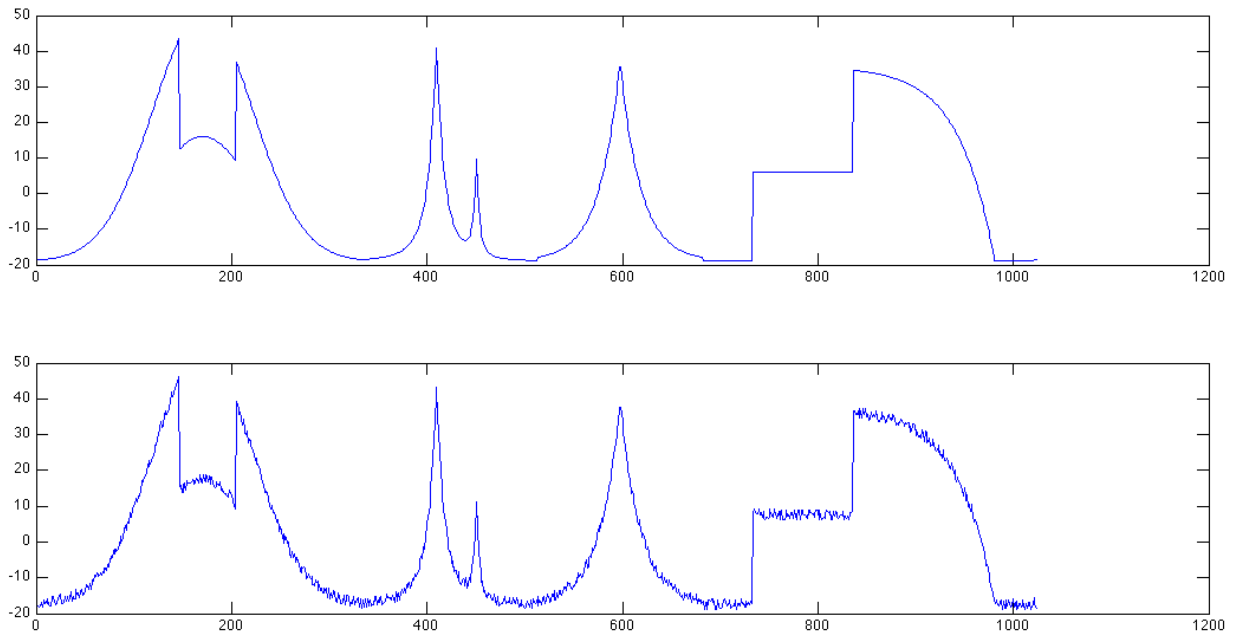


FIGURE 17 – Signal d'origine et signal bruité

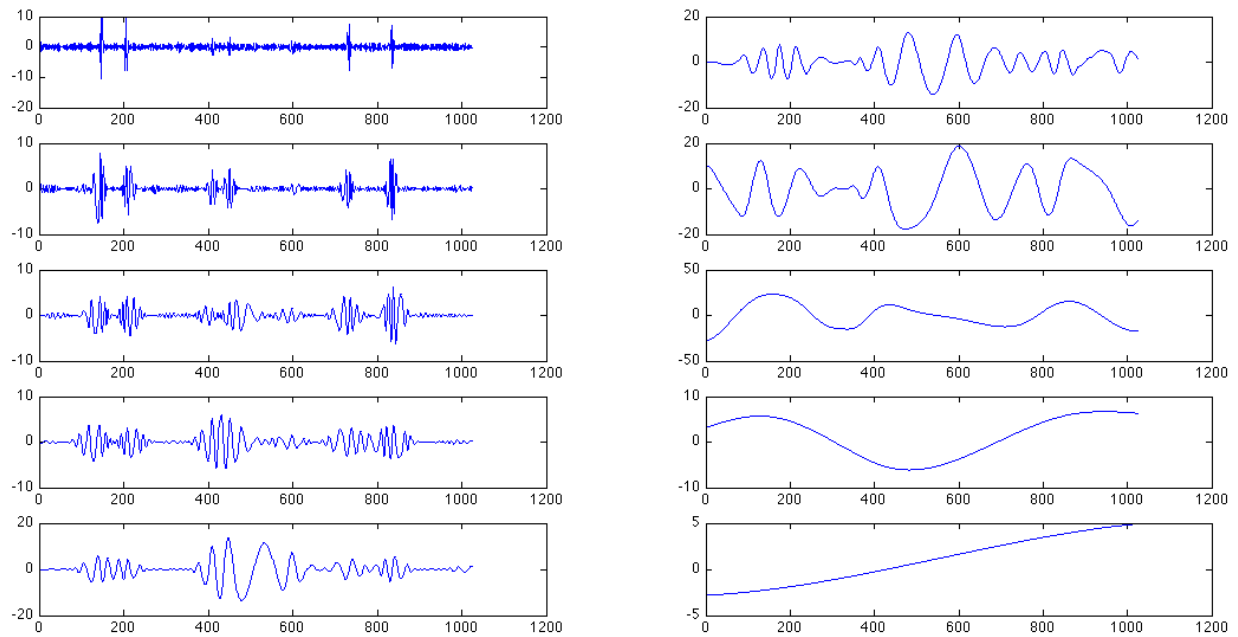


FIGURE 18 – IMFs du signal bruité

### b) Débruitage naïf

Pour cela, une première idée a été de tout simplement supprimer les premières IMFs. Le résultat est présenté dans la figure 19. Dans l'ordre, chaque courbe représente la somme partielle des IMFs du signal bruité, où l'on enlève 4, puis 3, puis 2, puis 1 IMF, en partant toujours de la plus oscillante. Le résultat est clairement mauvais : trop d'information essentielle s'est perdue dans le retrait des IMFs les plus oscillantes.

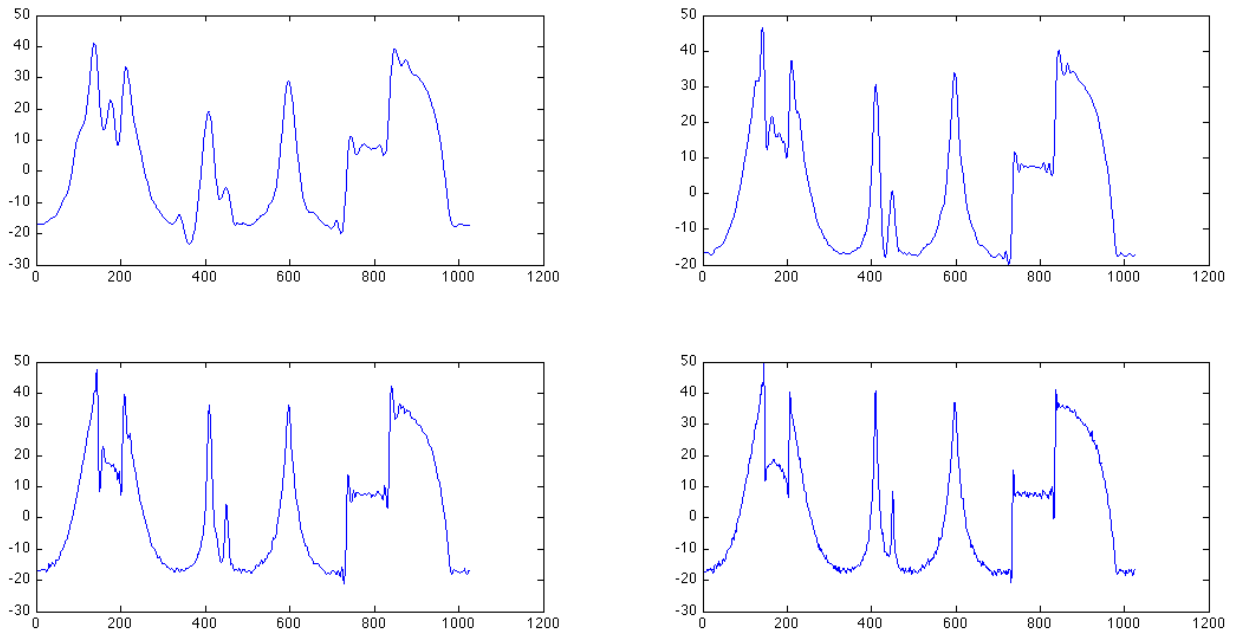


FIGURE 19 – Reconstructions partielles successives du signal bruité

### c) Débruitage par seuillage

Il faut donc tenter d'employer une méthode plus fine. Comme on peut l'observer dans la figure 18, les premières IMFs présentent la caractéristique d'avoir deux ordres de grandeur dans leurs oscillations : de nombreuses oscillations de faible amplitude et quelques oscillations de grande amplitude. On peut donc penser que l'information perdue précédemment se trouve dans les pics de grande amplitude et le bruit dans les pics de faible amplitude. Il semble donc naturel de seuiller les premières IMFs. On choisit la variance comme seuil d'annulation de l'IMF, et on choisit de traiter les quatre premières IMFs, qui semblent contenir à elles seules la majorité du bruit ajouté.

La figure 20 représente les quatre premières IMFs du signal : à gauche sans seuillage, et à droite avec un seuillage à la variance de l'IMF concernée, représentée en rouge. La figure 22 nous montre le résultat obtenu en sommant les quatre IMFs de gauche de la figure 20 ainsi que les IMFs restantes non seuillées, présentées en figure 21.

Le débruitage obtenu est clairement mauvais, et l'on observe même de fortes irrégularités qui n'étaient pas présentes dans le signal bruité. Le seuillage est donc une méthode trop brusque.

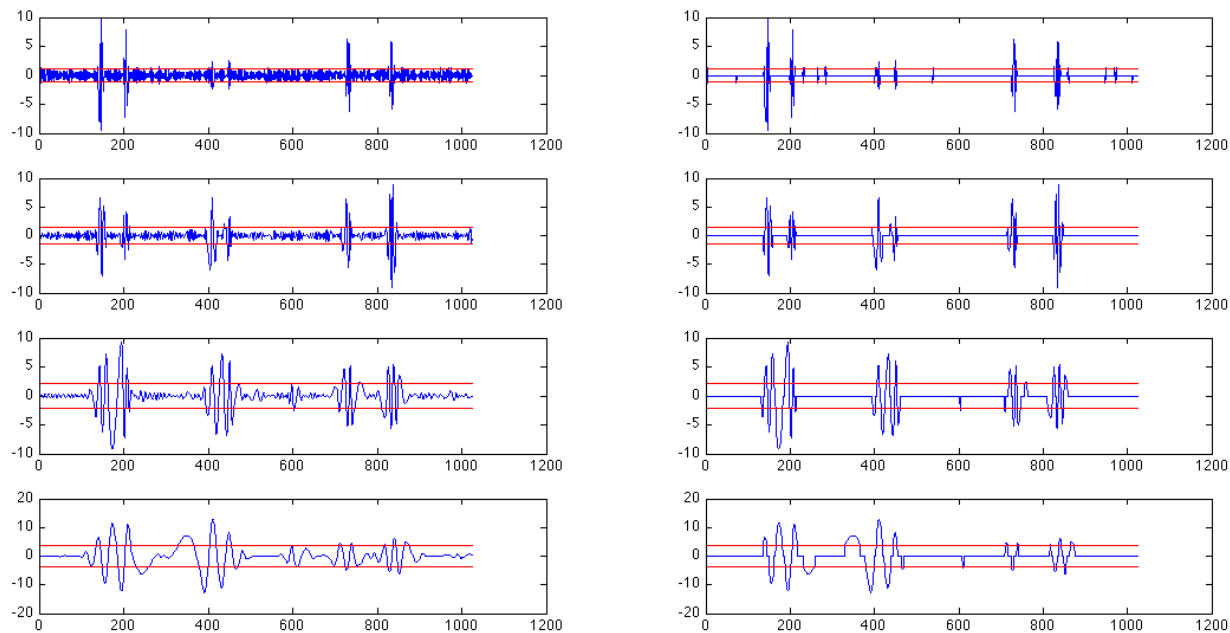


FIGURE 20 – A gauche les IMFs. A droite les IMFs tronquées à la variance. En rouge la variance de chaque IMF.

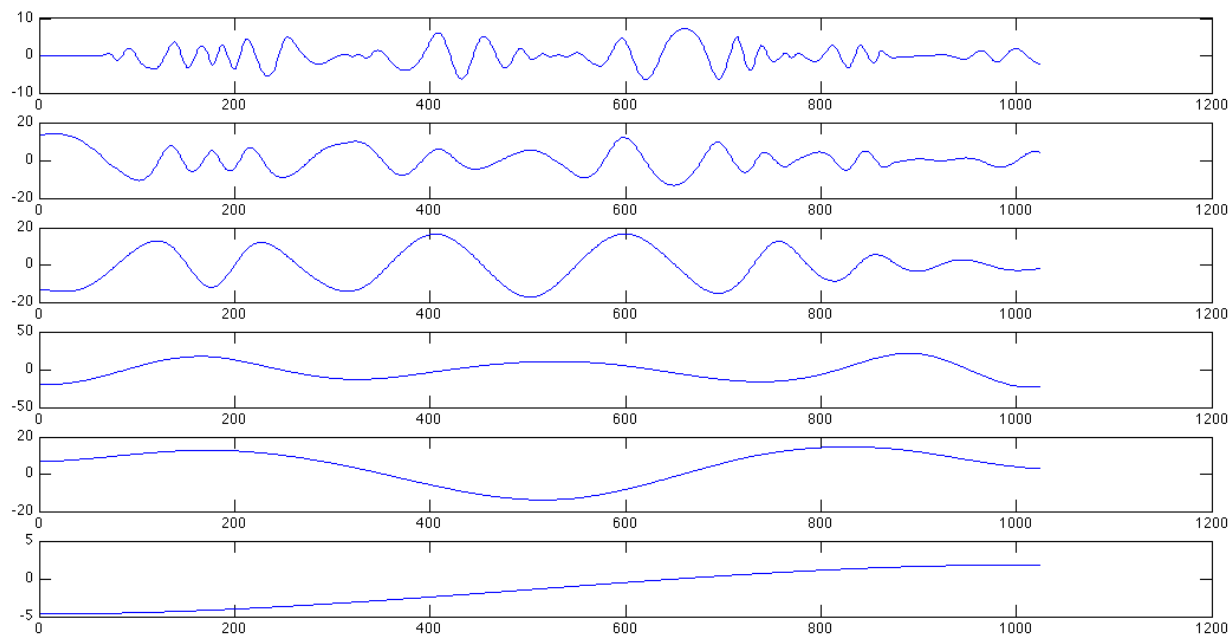


FIGURE 21 – IMFs non concernées par le seuillage

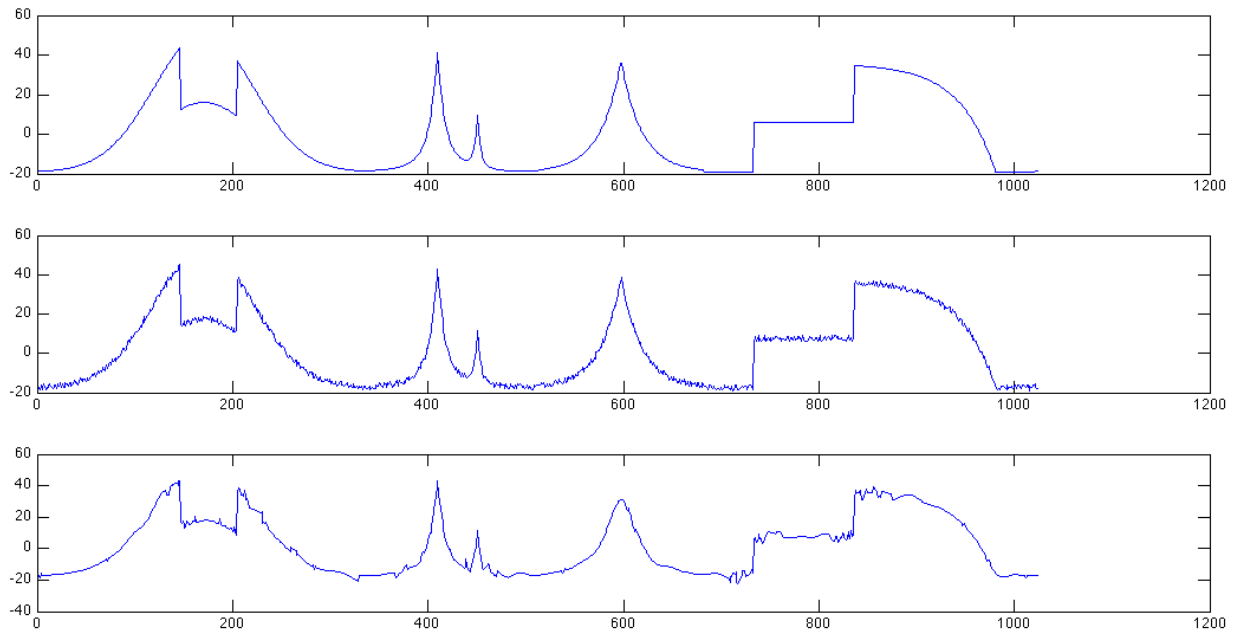


FIGURE 22 – Signal de référence, signal bruité et signal débruité par seuillage

#### d) Débruitage grâce à `imreconstruct.m`

Pour supprimer les irrégularités qui apparaissent, une solution serait de ne pas strictement tronquer à la variance, mais de conserver l'ensemble des oscillations dont l'extrema est supérieur à la variance. En d'autres termes, on garde tout ce qui dépasse des lignes rouges, et on suit la pente jusqu'à ce que la fonction s'annule avant de supprimer les autres oscillations.

Pour cela, on fait appel à la fonction `imreconstruct.m`. Il s'agit de la fonction de reconstruction disponible dans Matlab qui est, à l'origine, proposée pour le traitement d'image, et qui réalise ce que l'on appelle une reconstruction par dilatation géodésique (cf. [13]). Sans entrer dans les détails, dans le cas d'une oscillation positive, les points retenus dans l'étape précédente servent de marqueurs pour reconstruire toute la partie du signal connectée aux marqueurs et de plus faible amplitude. Les oscillations négatives reçoivent le même traitement dans l'autre sens.

Le seuillage amélioré ainsi obtenu est présenté dans la figure 23, où l'on peut voir que les IMFs traitées présentent beaucoup moins d'irrégularités que dans le traitement précédent (cf. figure 20).

Le résultat obtenu, présenté en figure 24, est bien meilleur que les précédents. Il est cependant encore possible d'améliorer le débruitage.



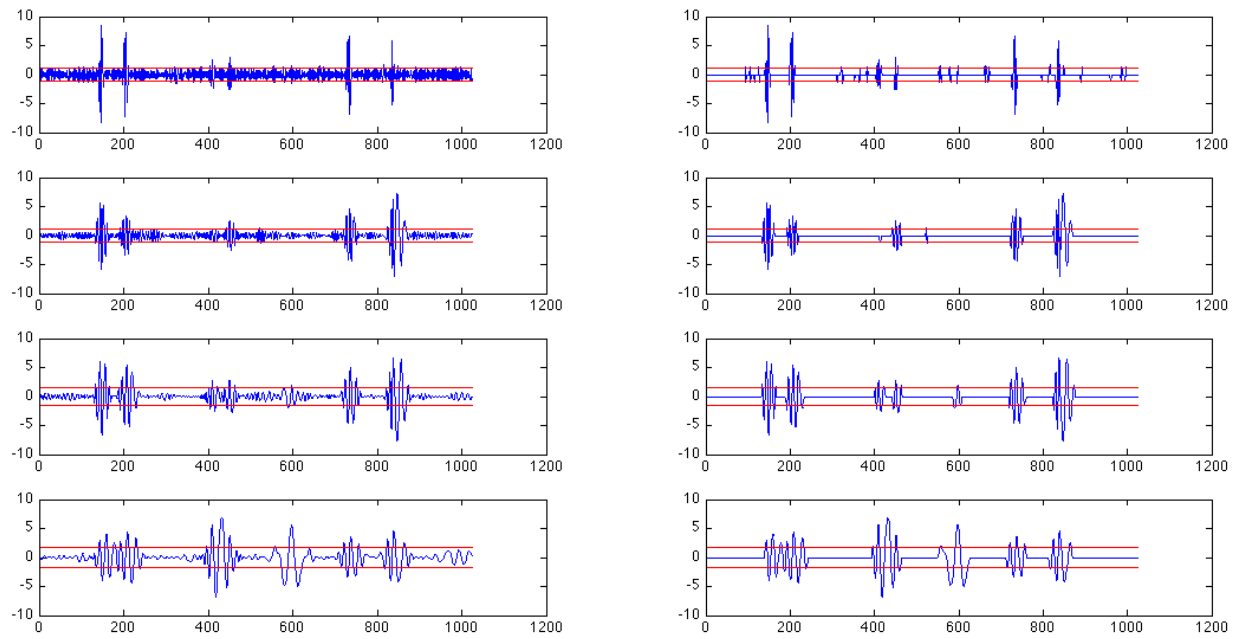


FIGURE 23 – A gauche les IMFs du signal bruité. A droite les IMFs seuillées grâce à la fonction `imreconstruct.m`

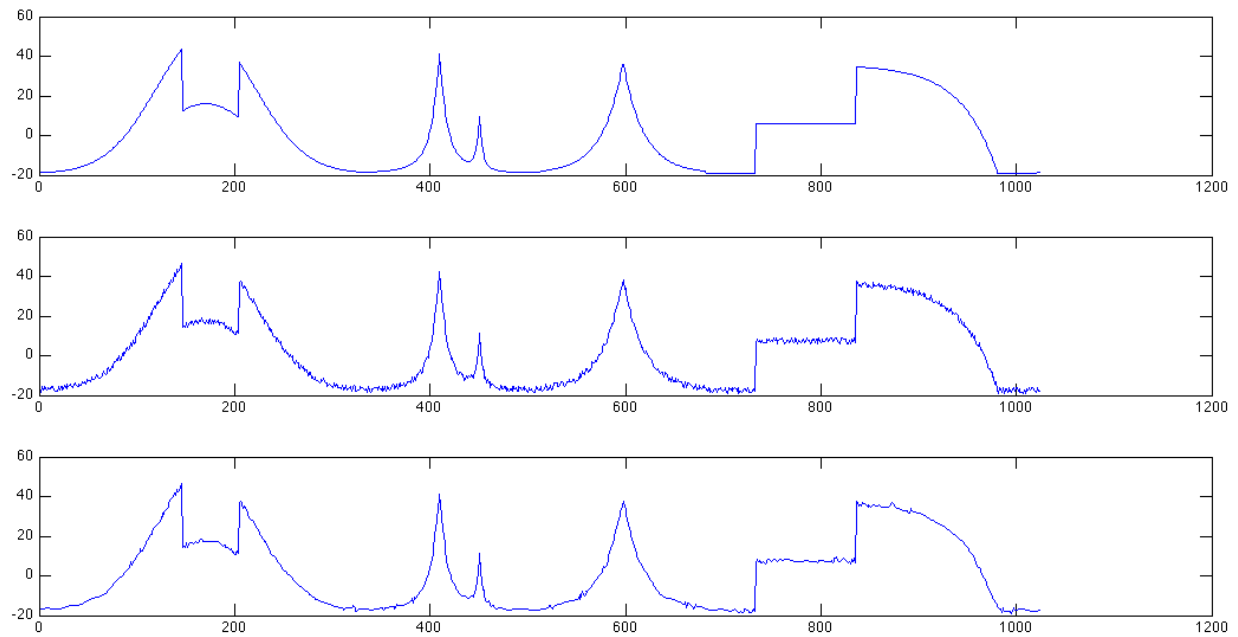


FIGURE 24 – Signal de référence, signal bruité et signal débruité par `imreconstruct.m`

### e) Débruitage dégressif

Pour pouvoir améliorer le débruitage, il faut observer en détail les IMFs de la figure 23. Sur la première IMF, on observe quatre (ou six, c'est selon) zones principales dont les oscillations seraient à conserver. Cependant, la troncature proposée conserve bien plus de zones qui dépassent la variance (de l'ordre de la vingtaine). Il faudrait donc prendre un seuil plus élevé.

Et au contraire, quand on regarde la quatrième IMF, on observe que les toutes dernières oscillations ne sont pas conservées par la méthode de seuillage améliorée, alors qu'elles ne représentent visiblement pas du bruit, qui est pourtant clairement présent à d'autres endroits de l'IMF. Il faudrait donc prendre un seuil plus bas.

La bonne solution consisterait donc en une fonction de seuil proportionnelle à la variance, multipliée par une fonction décroissante du numéro de l'IMF. Par simplicité, on choisit une fonction affine : la première IMF est tronquée à 1.5 fois la variance et la dernière IMF débruitée est tronquée à 0.5 fois la variance, toujours bien sûr à l'aide de `imreconstruct.m`.

Le résultat obtenu sur les IMFs est présenté en figure 25. Sur la partie gauche de l'image, le trait rouge correspond à la variance. Sur la partie droite de l'image, le trait rouge correspond à la variance coefficientée selon un coefficient décroissant avec le numéro de l'IMF.

Le débruitage obtenu est présenté en figure 26. Comme on peut le voir, le résultat est plutôt encourageant. Les seuls vrais défauts que l'on observe sont les petits artefacts autour des décrochages présents de part et d'autre de l'abscisse  $n = 800$ , ainsi que quelques lentes oscillations superflues. Mais le signal a globalement retrouvé son aspect lisse du départ.

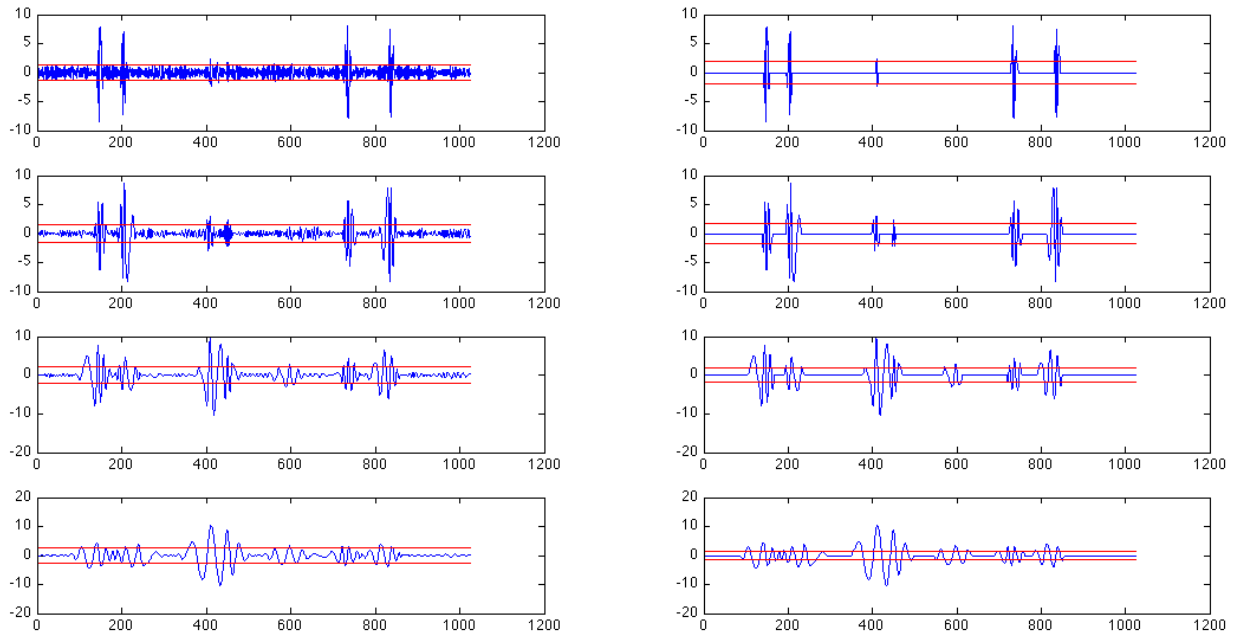


FIGURE 25 – A gauche les IMFs et la variance. A droite les IMFs seuillées et la pseudo-variance

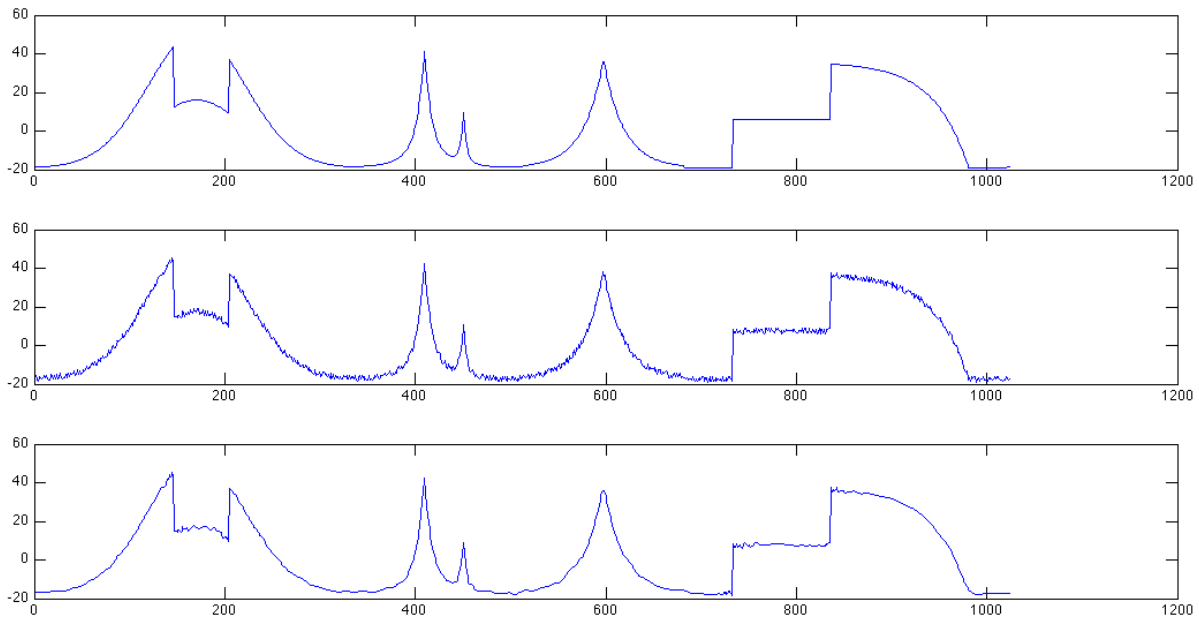


FIGURE 26 – Signal de référence, signal bruité et signal débruité selon un seuillage à la variance coefficientée

### f) Evaluation du débruitage

Le critère d'appréciation du débruitage choisi est le critère psychovisuel, c'est-à-dire l'appréciation subjective. Le choix de cette méthode repose sur plusieurs raisons.

En premier lieu, bien qu'il soit nécessaire d'avoir un critère objectif pour juger de la bonne qualité d'un débruitage, on n'en a pas besoin pour montrer qu'un débruitage est mauvais. Cela se voit aisément dans la figure 19 par exemple. Et pour les derniers, et *a priori* meilleurs, résultats des derniers essais, ils sont encore très perfectibles, notamment en ce qui concerne les oscillations visibles près des discontinuités dans la figure 26.

La deuxième raison est due à une inadéquation entre les résultats observés et le calcul du rapport signal sur bruit. Dans les exemples proposés précédemment, le rapport signal sur bruit est du même ordre de grandeur pour le signal bruité que pour le signal débruité. Et cela est valable pour le débruitage de la figure 22 comme pour celui de la figure 26, alors que le second résultat est clairement meilleur que le premier.

Il n'a donc pas semblé nécessaire de mesurer précisément, avec un autre critère que le rapport signal sur bruit, les qualités de ces débruitages, car les résultats sont pour l'instant suffisamment grossiers pour être évalués directement

### g) Remarques

Les choix des paramètres 1.5 et 0.5 pour les coefficients de seuillage et de 4 pour le nombre d'IMFs tronquées est totalement expérimental. Il sont ressortis par tâtonnement expérimental. Quelques essais de systématisation de ces choix suivant la donnée de départ ont été effectués, mais n'ont rien donné de concluant.

Les courbes présentées ici peuvent différer d'un paragraphe à l'autre : cela est dû aux nombreuses manipulations Matlab nécessaires pour obtenir ces résultats. Les courbes restent cependant cohérentes au sein d'un même paragraphe

## Conclusion

Comme on l'a vu, l'EMD part d'une idée simple et séduisante : isoler d'une courbe sa partie oscillant rapidement en traçant une approximation grossière et répéter le processus. Cette démarche est motivée par la recherche d'une bonne interprétation de la notion de fréquence instantanée, tout comme l'a été la démarche menant à la transformée de Hilbert, ainsi que des ondelettes. Il s'agit de savoir extirper du signal un ensemble de fréquences instantanées qui auraient un sens physique.

Cependant, le défaut de cette méthode est d'être totalement paramétrique, et d'autant plus que toute décomposition dépend d'un grand nombre de paramètres : choix de la méthode d'interpolation, du critère d'arrêt du *sifting process*... Et il s'agit là d'une faiblesse, car l'EMD devient alors une méthode excessivement dépendante des données, dans le sens où des signaux similaires peuvent être traités très différemment, dès lors que les paramètres choisis soient trop sensibles aux données.

Le second grand problème de l'EMD est son absence de fondements mathématiques, bien que des progrès soient à envisager du côté des équations aux dérivées partielles dans les années à venir. L'impossibilité de savoir quelles sont les données exploitables par l'EMD, de s'assurer que l'algorithme converge en un nombre fini de décomposition rend cette méthode un peu trop jeune pour pouvoir l'utiliser à bon escient actuellement.

Cependant, des résultats encourageants ont été montrés, notamment en ce qui concerne la quasi-orthogonalité des modes, c'est-à-dire la présence sous-jacente d'une base intéressante, et les applications potentielles comme le débruitage ou la recherche de corrélations dans des données apparemment dissociées.

# Cinquième partie

## Bibliographie

### Références

- [1] T. Auberlin, S. Meignen, and V. Perrier. An alternative formulation for the empirical mode decomposition.
- [2] F. Chaplais. Initiation à matlab et aux ondelettes. Available from : [http://cas.ensmp.fr/~chaplais/TP\\_Ondelettes/index.html](http://cas.ensmp.fr/~chaplais/TP_Ondelettes/index.html).
- [3] Q. Chen, N. Huang, S. Riemenschneider, and Y.Xu. A b-spline approach for empirical mode decompositions. *Advances in Computational Mathematics*, 2003.
- [4] E. Deléclle, J. Lemoine, and O. Niang. Empirical mode decomposition : An analytical approach for sifting process. *IEEE Signal Processing letters*, 12(11), November 2005.
- [5] El Hadji S. Diop, R. Alexandre, and A.-O. Boudraa. A pde model for 2d intrinsic mode functions. *ICIP*, 2009.
- [6] P. Flandrin. Empirical mode decomposition. Available from : <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.
- [7] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves. Empirical mode decomposition as a filter bank. *IEEE signal processing letters*, 11(2), February 2004.
- [8] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C., Yen C.C., Tung, and H.H. Liu. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454 :903–995, 1998.
- [9] T. Huang, W. Ren, and M. Lou. The orthogonal hilbert-huang transform and its application in earthquake motion recordings analysis. *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, October 2008.
- [10] O. Niang, E. Deléclle, and J. Lemoine. A spectral approach for sifting process in empirical mode decomposition. *IEEE transactions on signal processing*, 58(11), November 2010.
- [11] J.-C. Nunes and E. Deléclle. Empirical mode decomposition : Applications on signal and image processing. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1), 2009.
- [12] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalves. On empirical mode decomposition and its algorithms.
- [13] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume II. Academic Press, London, 1988.

### Commentaires bibliographiques

[8] constitue l'article principal introduisant la notion d'*intrinsic mode function* et l'algorithme initial de l'EMD. Des approches basées sur d'autres interpolations sont disponibles, comme dans [3] où des B-spline sont utilisés mais d'autres améliorations algorithmiques sont proposées, et discutées dans ce rapport, dans [12]. Des extensions en dimension 2 sont proposées par [11] où la discussion porte sur la généralisation du calcul des enveloppe et/ou de la moyenne locale.

Des approches différentes, non développées ici, par EDP sont proposées dans [3], [5] et [4] ou par analyse spectrale dans [10].