

Ecole Normale Supérieure de Cachan
Rapport de stage

Maîtres de stage : Laurent DESVILLETES(Laurent.Desvilletes@cmla.ens-cachan.fr) et
Francesco SALVARANI(francesco.salvarani@unipv.it)

Modèle de Black-Scholes

WARLOP Romain (romain.warlop@ens-cachan.fr)

Cachan, le 29 juin 2011

Table des matières

1	Introduction	4
I	Mathématiques financières	4
2	Quelques notions élémentaires de mathématiques financières	4
2.1	Options, couverture et problème de pricing	4
2.1.1	Options	4
2.1.2	Couverture	4
2.1.3	Problème de pricing	4
2.2	Stratégie auto-finançante, conséquence de l'A.O.A et marché complet	5
3	Parité Put-Call	5
II	L'EDP de Black-Scholes	6
4	Présentation du modèle	6
4.1	Définitions et Propriétés	7
4.2	Application	7
III	Résolution analytique de l'équation de Black-Scholes dans le cas d'un Call et d'un Put européen	8
5	Résolution de l'équation de la chaleur sans second membre	8
5.1	Solution fondamentale	8
5.2	Résolution générale de l'équation de la chaleur avec conditions initiales	9
6	Cas d'une option Call européenne	10
6.1	Evaluation du prix de l'option	12
7	Cas d'une option Put européenne	13
IV	Estimation de la volatilité	14
8	Volatilité	14
8.1	Présentation	14
8.2	Calcul	14
8.2.1	Volatilité implicite	14
8.2.2	Volatilité historique	17
V	Tracés obtenus avec Matlab	17
9	Tracé de la solution explicite obtenue	17
9.1	Application de la formule de Black-Scholes pour matlab	17
9.2	Résultats graphiques	18

10	Résolution numérique par différences finies	18
10.1	Mise en équation	18
10.2	Résultats graphiques	19
VI	Application à un cas réel	19
VII	Critique du modèle	21
10.3	Les hypothèses sont discutables	21
10.4	Et les crises?	22
VIII	Annexes	22
10.5	Fonction BScall	22
10.6	Tracé de la solution en 2D	22
10.7	Tracé de la solution en 3D	23
10.8	Fonctions matlab pour Euler implicite	23
10.9	Calcul de la volatilité implicite par dichotomie	24

1 Introduction

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue un rôle des plus importants et est parfois à l'origine de crises mondiales. Il apparaît alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix. De cette nécessité, le modèle et la formule de Black-Scholes s'est imposée comme référence depuis 1973, dans le calcul d'option. Malgré ses défauts, ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formule, son importante utilisation par les opérateurs du marché mais aussi et surtout parce qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information cruciale sur le risque.

Première partie

Mathématiques financières

2 Quelques notions élémentaires de mathématiques financières

Pour arriver à l'EDP de Black-Scholes, nous allons commencer par présenter quelques bases des modèles financiers.

2.1 Options, couverture et problème de pricing

2.1.1 Options

Définition 1 (Call Européen) Une option d'achat européenne, *call*, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date future, appelée maturité, noté T , et à un prix fixé dans le contrat, noté E , appelé *strike*. L'acheteur ayant donc le droit et non le devoir d'exercer l'option à la maturité, il va exercer son option si $S_T > E$ sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le "pay-off" de l'option, est donc $(S_T - E)^+ = \max(S_T - E, 0)$.

Définition 2 (Put Européen) Une option de vente européenne, *put*, donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent à une date future et à un prix fixé dans le contrat. Avec les mêmes notations que pour le *call*, on obtient que le pay-off du put est $(E - S_T)^+ = \max(E - S_T, 0)$.

Ce sont les deux types d'options qui sont alors échangées sur le marché.

2.1.2 Couverture

Le problème de couverture d'une option consiste à trouver une stratégie financière basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au pay-off de l'option.

2.1.3 Problème de pricing

Pour des options *call* et *put* un problème majeur apparaît. Par exemple dans le cas d'un *call* l'acheteur est toujours protégé car il choisit l'exercice de l'option donc il ne craint rien. En revanche pour le vendeur le risque est maximal car sa perte est possiblement infinie. Il est donc naturel qu'en mathématiques financières le problème de pricing d'une option, c'est-à-dire de détermination de la valeur de l'option à toute date, soit très important, ainsi que le problème de couverture de l'option.

Pour répondre à ces problèmes, on a besoin d'une hypothèse fondamentale appelée *Absence d'Opportunité d'Arbitrage* (A.O.A), qui suppose qu'il est impossible de gagner de l'argent sans prendre de risque à un instant donné.

2.2 Stratégie auto-finançante, conséquence de l'A.O.A et marché complet

Définition 3 Une stratégie auto-finançante est une stratégie dans laquelle il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argent dans le portefeuille entre le temps t et $t+1$.

★ Considérons un marché dans lequel l'hypothèse d'A.O.A est vérifiée. On peut en déduire deux résultats : 1°) Si deux actifs financiers X et Y ont le même flux terminal $X_T = Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t = Y_t$.

2°) Si $X_T \leq Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t \leq Y_t$.

Définition 4 Un produit financier est dit répliquable, ou atteignable, s'il existe une stratégie auto-finançante de couverture de ce produit. En d'autres termes, le produit financier S est dit répliquable si on peut construire un portefeuille qui dépend des autres produits du marché et qui à chaque instant t vaut S_t . Pour construire ce portefeuille on achète une certaine quantité de différents produits et on vend une certaine quantité d'autres produits dans le but d'avoir une valeur de portefeuille égale à S .

Définition 5 Considérons un marché dans lequel l'hypothèse d'A.O.A est vérifiée. Ce marché est dit complet si tout produit financier est répliquable. Dans la suite le marché sera supposé complet.

3 Parité Put-Call

Définition 6 (zéro-coupon) Un bond zéro-coupon est un actif qui paie à la maturité T 1€. On désigne par $B(t, T)$ son prix à la date t .

Considérons le cas où le taux d'intérêt est une constante r , par exemple le taux d'intérêt d'une banque.

Si on place 1€ à l'instant t , à l'instant $t + \Delta t$ on possède $(1 + r\Delta t)$ €.

Si maintenant on place S_t à l'instant t , à l'instant $t + \Delta t$ on a $S_{t+\Delta t} = S_t + rS_t\Delta t$. On a donc $dS_t = rS_t dt$. Soit donc $S_t = e^{rt}$.

On en déduit que le prix du zéro-coupon est donné par :

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)}.$$

Si le taux d'intérêt n'est pas constant, on obtient :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}.$$

Dans la suite on considérera le taux d'intérêt constant.

En mathématiques financières, il est possible de montrer une relation entre un Call européen et un Put européen, dans un marché sans arbitrage, appelée la parité Put-Call. Cette relation est très pratique pour déterminer le prix de l'un des deux dans le modèle de Black-Scholes. En effet, il suffit de calculer l'un des deux à partir du modèle de Black-Scholes, la seconde se déduit

immédiatement grâce à cette relation.

Considérons donc un call et un put européen basés sur le même actif sous-jacent S , de maturité T , et de strike E . Pour démontrer la relation de parité Put-Call, nous allons nous servir de la proposition 1. On va donc construire deux portefeuilles ayant même valeur à la maturité et grâce à cette proposition on pourra conclure à l'égalité de ces deux portefeuilles à tout instant.

On considère donc les deux stratégies suivantes :

1°/ On achète un call, et on vend un put. Dans la valeur du portefeuille, ce que l'on achète à un signe positif, ce que l'on possède, et ce que l'on vend à un signe négatif. La valeur du portefeuille à un instant t est donc : $C_t - P_t$. On obtient alors un flux terminal, égal au pay-off des options, valant :

$$(S_T - E)^+ - (E - S_T)^+ = S_T - E.$$

2°/ On achète S_t et on vend E quantité de zéro-coupon. La valeur du portefeuille à un instant t est donc : $S_t - EB(t, T)$. Le flux terminal de ce portefeuille est alors :

$$S_T - E.$$

Par la proposition précédente, on conclut que

$$\boxed{\forall t \in [0, T], \quad C_t - P_t = S_t - Ee^{-r(T-t)}} \quad (1)$$

car $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$.

Deuxième partie

L'EDP de Black-Scholes

4 Présentation du modèle

On va présenter une façon de résoudre le problème du pricing et de la couverture d'une option européenne, en passant par la dérivation d'une EDP.

On s'intéresse à une option européenne, qui rapporte à son détenteur $H = h(S(T))$ à l'échéance T (où h est la fonction pay-off). Par exemple, dans le cas d'un call européen on a $h(x) = (x - K)^+$.

Le prix de cette option à l'instant t est E_t , $0 \leq t \leq T$. On a bien sûr $E_T = h(S(T))$. Il existe une application $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, on ait

$$E_t = u(t, S_t).$$

On peut démontrer cela par une approche probabiliste et grâce à des résultats sur les processus de Markov. (Voir [1] pour une démonstration de ce résultat.)

Pour obtenir l'équation de Black-Scholes, certaines hypothèses doivent être faites :

- le marché est complet,
- le temps est continu,
- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter 1/1000 de sous jacent),
- les ventes à découvert sont autorisées,
- il n'y a pas de coup de transaction,
- il existe un taux d'intérêt constant,
- il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions).

4.1 Définitions et Propriétés

Définition 7 (Mouvement brownien) Un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement brownien si ses trajectoires sont continues, $B_0 = 0$ et

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la suite $B_{t_1}; B_{t_2} - B_{t_1}; \dots; B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

(ii) pour tout $0 < s < t$, la loi de $B_t - B_s$ est la loi $N(0; t - s)$.

Définition 8 (Processus d'Itô) On appelle processus d'Itô, un processus $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t$$

avec

- $K = (K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $H = (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont des processus adaptées à la filtration $(F_t) = (\sigma(X_1, \dots, X_t))$.
- $\mathbb{P}(\int_0^T |K_s| ds < \infty) = 1$.
- $\mathbb{P}(\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty) = 1$.

Proposition 1 (Lemme d'Itô) Soit X un processus d'Itô, c'est à dire tel que $dX_t = K_t dt + H_t dB_t$ et $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Alors $\forall 0 \leq t \leq T$,

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) K_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t) H_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) H_t dB_t.$$

4.2 Application

Dans le cadre de notre modèle, on désigne par $(B_t)_{t \geq 1}$ un mouvement brownien, μ et σ des constantes, de sorte que l'on a $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$ et donc $S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$.

μ est appelé le dérive, et correspond à une mesure du taux moyen de croissance du prix de l'actif, et σ est appelé la volatilité, et mesure la fluctuation du cours de l'actif financier considéré.

Or $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$. On peut donc appliquer le Lemme d'Itô, ce qui nous donne :

$$dE_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) dB_t \quad (2)$$

Le marché étant complet il existe une stratégie auto-finançante $(X_t, Y_t)_{0 \leq t \leq T}$, où X_t est un vecteur donnant à chaque instant la quantité de zéro-coupon, noté ici R_t , détenus dans le portefeuille, et Y_t le quantité du produit S dans le portefeuille à chaque instant ; telle que la richesse V_T associée à l'instant final T soit

$$V_T(X, Y) = h(S_T), \quad \text{où } h \text{ est la fonction pay-off}$$

alors nécessairement

$$V_t(X, Y) = E_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par ailleurs,

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t = u(t, S_t). \quad (3)$$

et la condition d'auto-financement s'écrit en temps continu

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dS_t = dE_t.$$

Mais

$$dR_t = r R_t dt, \quad (4)$$

or

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (5)$$

D'après (4) et (5) on en déduit :

$$dE_t = (rX_tR_t + \mu Y_tS_t)dt + \sigma Y_tS_tdB_t \quad (6)$$

D'après les équations (2) et (6) on a égalité entre les coefficients de B_t et de dt . D'où,

$$\sigma Y_tS_t = \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)$$

Soit encore

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) \quad (7)$$

et en outre

$$rX_tR_t + \mu Y_tS_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \quad (8)$$

Et on tire de (3) et (7) que

$$X_t = R_t^{-1}(u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)).$$

Donc la relation (8) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) = ru(t, S_t) \\ u(T, S_T) = h(S_T) \end{cases}$$

Une C.N.S. pour que ces relations soient satisfaites presque sûrement est que u soit solution de l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = ru(t, x), \quad \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+ \\ u(T, x) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (9)$$

C'est l'EDP de Black Scholes.

Troisième partie

Résolution analytique de l'équation de Black-Scholes dans le cas d'un Call et d'un Put européen

5 Résolution de l'équation de la chaleur sans second membre

On commence par résoudre l'équation de la chaleur car l'EDP de Black-Scholes se ramène à cette équation.

5.1 Solution fondamentale

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Remarque : Si la solution $u(x, t)$ d'une équation aux dérivées partielles dépend seulement d'une combinaison de deux variables indépendantes, le problème peut être réduit à une équation différentielle ordinaire dans laquelle cette combinaison est la variable.

Ici on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'invariance, $x \mapsto \lambda x$, $t \mapsto \lambda^2 t$.

Ainsi avec les nouvelles variables $X = \lambda x$ et $T = \lambda^2 t$, on a $\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$

$\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{X}{\sqrt{T}}$ est la seule combinaison de X et T qui est indépendante de λ , on cherchera une solution de la forme $u_\delta(x, t) = t^{-1/2} U_\delta(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

On dérive par rapport au temps et deux fois en espace, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} U_\delta(\xi) - \frac{1}{2} t^{-3/2} \xi U'_\delta(\xi), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{-3/2} U''_\delta(\xi). \end{cases}$$

Soit, en réinjectant dans l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned} U''_\delta(\xi) + \frac{1}{2} U_\delta(\xi) + \frac{1}{2} \xi U'_\delta(\xi) &= 0, \\ \iff \\ U''_\delta(\xi) + \left(\frac{1}{2} \xi U_\delta(\xi)\right)' &= 0. \end{aligned}$$

On prend la primitive :

$$\int U''_\delta + \int \left(\frac{1}{2} \xi U_\delta(\xi)\right)' = U'_\delta + \frac{1}{2} \xi U_\delta(\xi) = 0.$$

On divise par U_δ puis on prend à nouveau la primitive :

$$\begin{aligned} \int \frac{U'_\delta}{U_\delta} &= - \int \frac{1}{2} \xi d\xi, \\ \iff \\ \ln \frac{(U_\delta)}{C} &= -\frac{1}{4} \xi^2, \end{aligned}$$

où C est une constante. On obtient alors :

$$U_\delta = C e^{-\frac{1}{4} \xi^2}.$$

On normalise la solution en choisissant $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ pour avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} u_\delta(x, t) dx = 1$. On a donc :

$$\begin{cases} u_\delta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \\ u_\delta(x, 0) = \delta(x) \quad \text{où } \delta(\cdot) \text{ représente la fonction Dirac.} \end{cases} \quad (10)$$

5.2 Résolution générale de l'équation de la chaleur avec conditions initiales

Dans cette section on va s'occuper du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

où $u_0(x)$ se comporte suffisamment bien, c'est à dire :

$$\begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0, & \forall a > 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x,t)e^{-ax^2} = 0, & \forall a > 0, t > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Soit v défini par :

$$\begin{cases} v(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds, \\ v(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) u_\delta(s-x, 0) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \delta(s-x) ds = u_0(x). \end{cases}$$

Montrons que v est solution du système précédent. D'après la partie commune de cette présentation, on sait que v est C et de plus, d'après les conditions de régularité sur u_0 on peut appliquer le théorème d'inversion dérivée-intégrale de Leibnitz, de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{(s-x)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{s-x}{2\tau} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{(s-x)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \end{aligned}$$

v est donc bien solution du système étudié.

6 Cas d'une option Call européenne

Pour une option Call européenne, notons sa valeur $C(S, t)$, ce qui correspond au u précédemment, où S représente le prix du sous-jacent, et $t \in [0, T]$, T étant la maturité. On a l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rC(S, t) = 0, & \forall t \in [0, T], S \in \mathbb{R}_+, \\ C(S, T) = (S - E)^+ = \max(S - E, 0), & \forall S \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (12)$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder à divers changements de variable pour nous ramener à une équation de la chaleur du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (13)$$

Pour pouvoir se ramener à ce type d'équation, commençons tout d'abord par supprimer les coefficients S et S^2 de l'équation de Black-Scholes.

Pour ce faire, on pose : $S = Ee^x$, $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, $C(S, t) = Ev(x, \tau)$.

Un changement de temps de ce type paraît naturel pour se ramener à une condition en $t=0$ et non plus en $t=T$.

On a donc :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{E} C \left(Ee^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{E} C(S, t) \quad (14)$$

On dérive (14) par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}}_{=0} \\ &= \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S}\end{aligned}$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{E} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{E} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial C}{\partial S} + S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) S \\ &= \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{E} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\end{aligned}$$

Dérivons maintenant (14) par rapport à τ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Pour plus de clarté on introduit les valeurs suivantes :

$$C_t = -\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau \quad (15)$$

$$SC_S = Ev_x \quad (16)$$

$$S^2 C_{SS} = Ev_{xx} - SC_S = Ev_{xx} - Ev_x. \quad (17)$$

Rappelons l'équation de Black-Scholes :

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0. \quad (18)$$

On injecte alors (15), (16) et (17) dans (18), ce qui nous donne :

$$-\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau + \frac{E}{2}\sigma^2 (v_{xx} - v_x) + rEv_x - rEv = 0.$$

Soit, en divisant par $\frac{E}{2}\sigma^2$:

$$-v_\tau + v_{xx} - v_x + kv_x - kv = 0 \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Ou encore avec les notations du départ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (19)$$

On a alors comme condition initiale (en $\tau = 0$ puisque la condition est en $t=T$) :

$$v(x, 0) = \frac{1}{E} C(Ee^x, T) = \frac{1}{E} \max(Ee^x - E, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

Pour arriver à une équation comme celle de l'équation de la chaleur, on procède alors à un second changement de variables. On pose :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

On réinjecte alors cela dans l'équation (19) :

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ku \right).$$

Soit encore :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ku.$$

En regroupant les termes de mêmes dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta)u + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pour se ramener au cas de l'équation de la chaleur, il nous faut éliminer les termes en u et $\frac{\partial u}{\partial x}$, on doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k, \\ 2\alpha + k - 1 = 0. \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \\ \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2. \end{cases}$$

On a donc :

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau).$$

et u vérifie alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0). \end{cases}$$

$u_0(x)$ vérifie bien (11). La solution est donc :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds. \quad (20)$$

6.1 Evaluation du prix de l'option

Dans cette section, nous allons nous atteler à l'évaluation de l'intégrale dans l'équation (20). On commence par poser $x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_2} \end{aligned}$$

Calcul de I_1 On va ici essayer de se ramener à la loi de répartition normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

avec $\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$.

On note alors $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$ qui est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On pose également $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$.

On obtient alors :

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (1 - N(-d_1)).$$

Or, $\forall d \in \mathbb{R}$, on a $N(d) + N(-d) = 1$. Donc finalement :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Calcul de I_2 Par un calcul similaire on obtient :

$$\begin{cases} I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Maintenant que l'on a l'expression de u remontons à l'expression de C , valeur du Call. Tout d'abord, on a : $v(x, t) = e^{\alpha x + \beta \tau}$ et $C(S, t) = Ev(x, \tau)$.

On rappelle également que $x = \ln \frac{S}{E}$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ et $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$. D'où :

$$\begin{aligned} C(S, t) &= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \times \\ &\quad \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right) \\ &= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{E} - \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \times \\ &\quad \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)\ln \frac{S}{E} + \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{E} + \frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2) \right). \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\begin{cases} C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \quad (21)$$

7 Cas d'une option Put européenne

On pourrait procéder de même pour une option Put européenne, mais on va utiliser la remarque faite dans la première partie : la parité Put-Call. On note P le prix du Put européen.

On avait montré qu'entre un Put et un Call européen, de même maturité et de même strike E , existe une relation entre leur prix :

$$C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}.$$

Donc :

$$P(S, t) = S(N(d_1) - 1) - Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)).$$

On peut simplifier cette équation en utilisant le fait que $N(d) + N(-d) = 1$. On obtient alors :

$$\begin{cases} P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \quad (22)$$

Quatrième partie

Estimation de la volatilité

8 Volatilité

8.1 Présentation

L'estimation de la volatilité est capitale en mathématiques financières pour calculer le prix d'une option. Elle permet de mesurer l'instabilité du cours d'un actif financier. Plus la volatilité est importante plus l'actif est instable, si la volatilité est nulle, on peut connaître de manière exacte la valeur de l'actif dans le futur.

Il existe deux méthodes de calculs de la volatilité :

la volatilité implicite : En utilisant les prix observés des options C_t et en inversant la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre σ . Ici, en général, on n'a pas une seule valeur de sigma, mais une courbe qui dépend du strike K , c'est le phénomène du "smile de volatilité".

la volatilité historique : En utilisant les données historiques du cours sous-jacent $(S_t)_t$ et des méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance, on en déduit le paramètre de volatilité.

8.2 Calcul

8.2.1 Volatilité implicite

Pour obtenir une expression de la volatilité d'après la formule de Black-Scholes, reprenons donc la formule de Black-Scholes pour un call-européen :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Or $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$, on a alors :

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} SN'(d_1) &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \\ &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{\ln(\frac{S}{E})} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \ln(\frac{S}{E})}{\sigma^2(T-t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + \ln(\frac{S}{E})(T-t)(2r + \sigma^2 - 2\sigma^2)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \end{aligned}$$

d'autre par :

$$\begin{aligned} Ee^{-r(T-t)} N'(d_2) &= Ee^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\ &= Ee^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + 2r(T-t)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 - 2r(T-t)\sigma^2}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + (T-t)^2 (r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - r\sigma^2 + 2r\sigma^2)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \end{aligned}$$

Et donc, on a :

$$SN'(d_1) = Ee^{-r(T-t)} N'(d_2) \quad (23)$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{\partial C}{\partial(\ln S)} \\ C^{(2)} &= \frac{\partial^2 C}{\partial(\ln S)^2} \\ \xi &= C^{(2)} - C^{(1)} \end{aligned}$$

On a :

$$C^{(1)} = SN(d_1) + \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)} N'(d_2)$$

$$C^{(2)} = SN(d_1) + 2\frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_2)$$

Donc :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_2)$$

Or $N''(d) = -dN'(d)$, $d_1 = d_2 + \sigma(T-t)$ et en utilisant (23) on a :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}(Ee^{-r(T-t)}d_2N'(d_2) - Sd_1N'(d_1)) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}Ee^{-r(T-t)}\sigma(T-t)N'(d_2) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \\ &= \frac{2S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) = \frac{2Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \end{aligned}$$

Soit E_ξ l'élasticité de la fonction auxiliaire ξ par rapport à S :

$$E_\xi = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial \ln S}$$

Or $\ln|\xi| = \ln(2) + \ln(S) - \ln(\sigma(T-t)) - \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{d_1^2}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} E_\xi &= 1 - \frac{d_1}{\sigma(T-t)} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma^2(T-t)} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2(T-t)}\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

et

$$\sigma^2(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) \iff \sigma^2(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)$$

D'où

$$\sigma = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)}{(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2})}}$$

On a donc une expression de la volatilité en fonction des autres paramètres et de E_ξ qui n'est autre qu'une combinaison des différentielles premières et secondes du prix du call par rapport au logarithme du sous-jacent. En connaissant donc les valeurs précédentes du call, on en déduit la volatilité.

On remarque que la volatilité implicite dépend du strike et de la maturité, on obtient donc une courbe qui a la forme d'un sourire, d'où le phénomène de "smile de la volatilité".

En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de cette formule trop compliquée à mettre en place, on utilise une résolution numérique. Si on appelle C_0 la valeur d'un call à l'instant initial, pour calculer la volatilité implicite, on cherche à résoudre :

$$C_0 - SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) = 0$$

8.2.2 Volatilité historique

Il existe différentes formules pour calculer la volatilité historique. L'une d'elle consiste en un calcul d'écart-type en se basant sur les valeurs passées du call. Notons C_i la valeur d'un call européen en fin de la $i^{\text{ème}}$ période, \bar{C} la moyenne de ces valeurs entre l'instant 1 et n , on a :

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2}{n}} \quad \text{avec} \quad \bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{n}$$

Cinquième partie

Tracés obtenus avec Matlab

Les codes matlab utilisés dans cette partie sont disponibles en annexes.

9 Tracé de la solution explicite obtenue

9.1 Application de la formule de Black-Scholes pour matlab

Pour tracer la solution explicite, il nous faut calculer $N(d)$. Pour cela, on peut se servir de la fonction `erf(x)` de Matlab, et plus précisément de la fonction `erfc(x)`. Ces fonctions correspondent à :

$$\begin{cases} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \\ \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x). \end{cases}$$

Il nous faut donc exprimer $N(d)$ en fonction de `erfc(x)` :

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}s^2} ds + \int_0^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds. \end{aligned}$$

On fait alors le changement de variable suivant : $\frac{1}{\sqrt{2}}s = t$. On obtient :

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{d}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}2t^2} \sqrt{2} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{d}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

De plus, il est facile de montrer que $\operatorname{erfc}(-x) = 1 + \operatorname{erf}(x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$. Donc $-\operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(-x) - 2$. On obtient alors

$$N(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{d}{\sqrt{2}} \right). \quad (24)$$

Call européen Pour le Call on a : $C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$.
On obtient donc en fonction de $\text{erfc}(x)$:

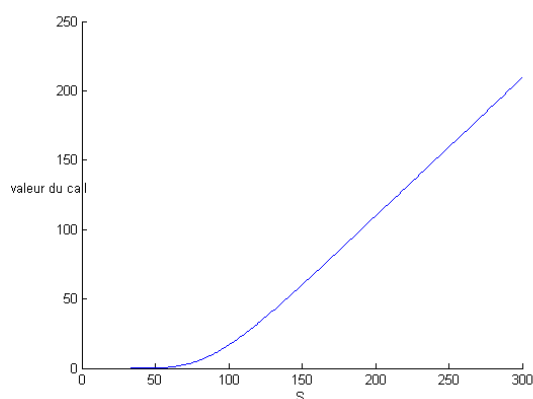
$$C(S, t) = S \left(\frac{1}{2} \text{erfc} \left(-\frac{d_1}{\sqrt{2}} \right) \right) - Ee^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} \text{erfc} \left(-\frac{d_2}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Put européen Pour le Put on a : $P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$
On obtient donc en fonction de $\text{erfc}(x)$:

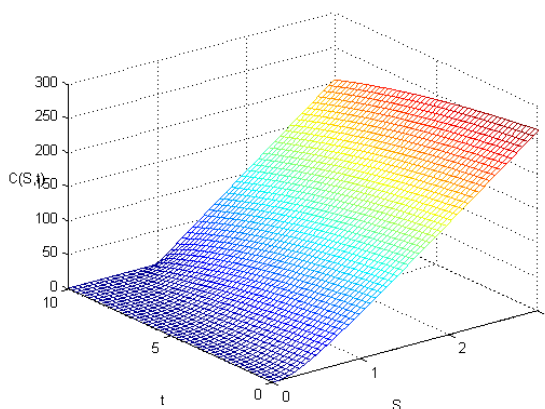
$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{d_2}{\sqrt{2}} \right) \right) - S \left(\frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{d_1}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

9.2 Résultats graphiques

A partir des codes 10.5, 10.6 et 10.7, on obtient les tracés 2D et 3D suivants :



(a) Tracé de la solution en 2D à $t=0$



(b) Tracé de la solution en 3D

FIGURE 1 – Représentation graphique des valeurs d’une option call européen en deux et trois dimensions

10 Résolution numérique par différences finies

Ici, nous allons résoudre l’équation de Black-Scholes à l’aide de la méthode des différences finies en utilisant la méthode d’Euler implicite.

10.1 Mise en équation

Pour un call européen de strike E , et de maturité T , on a l’équation de Black-Scholes suivante, dans laquelle on a fait le changement de variable $\tau = T - t$ pour se ramener à une condition en $\tau = 0$ (l’équation est écrit en t et non en τ pour plus de commodité :

$$\begin{cases} -\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) - rC(x, t) = 0, & \forall t \in [0, T], x \in [0, L], \\ C(x, 0) = (x - E)^+ = \max(x-E, 0), & \forall x \in [0, R] \end{cases} \quad (25)$$

On utilise donc un schéma d'Euler implicite en posant $c_i^m = C(x_i, t_m)$ avec :
 $x_j = jh$ avec $j = 0, \dots, M$ et $h = \frac{R}{M}$ le pas d'espace,

$t_n = nk$ avec $n = 0, \dots, N$ et $k = \frac{T}{N}$ le pas de temps. On obtient donc :

$$-\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{k} + rx_j \frac{c_{j+1}^{n+1} - c_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{\sigma^2}{2} x_j^2 \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - rc_j^{n+1} = 0.$$

On a en plus besoin de condition au bord pour $x = 0$ et $x = R$.

Pour $x = 0$ on prend $C(0, t) = 0 \doteq ua$, et pour $x = L$ on prend $C(R, t) = BScall(R, E, T - t, r, sigma) \doteq ub(t)$ ou $BScall$ est la fonction permettant d'obtenir le prix du call d'après l'étude analytique.

On pose alors $C_{new} = (c_1^{n+1}, \dots, c_M^{n+1})^t, C_{old} = (c_1^n, \dots, c_M^n)^t$. On a alors une formule matricielle donnant les composantes de C_{new} en fonction de celles de C_{old} sous la forme

$$AC_{new} = C_{old} + B_n$$

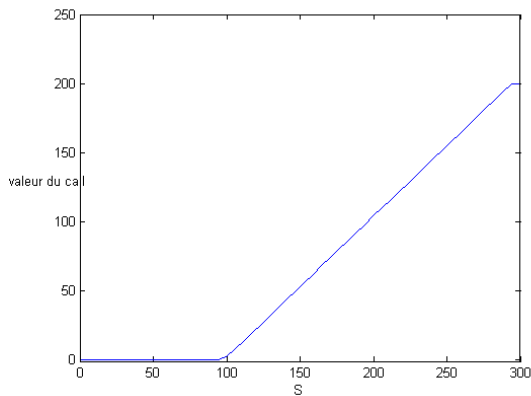
$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 + k\left(\frac{\sigma x_1}{h}\right)^2 + rk & -\frac{rkx_1}{2h} - \frac{k}{2}\left(\frac{\sigma x_1}{h}\right)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{rkx_1}{2h} - \frac{k}{2}\left(\frac{\sigma x_1}{h}\right)^2 & 1 + k\left(\frac{\sigma x_2}{h}\right)^2 + rk & -\frac{rkx_2}{2h} - \frac{k}{2}\left(\frac{\sigma x_2}{h}\right)^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\frac{rkx_{M-1}}{2h} - \frac{k}{2}\left(\frac{\sigma x_{M-1}}{h}\right)^2 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{rkx_M}{2h} - \frac{k}{2}\left(\frac{\sigma x_M}{h}\right)^2 & 1 + k\left(\frac{\sigma x_M}{h}\right)^2 + rk \end{pmatrix}$$

et B_n est un vecteur quasiment nulle, seul $B(M)$ est non nul et on a :

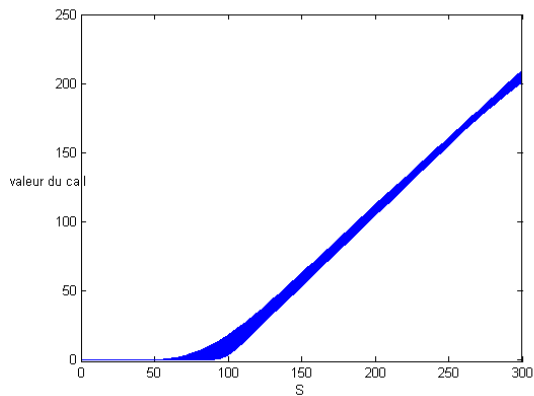
$$B(M) = \left(\frac{rkx_M}{2h} + \frac{k}{2} \left(\frac{\sigma x_M}{h} \right)^2 \right) ub(nk)$$

10.2 Résultats graphiques

Les tracés obtenus avec la méthode par différence finies (cf 10.8) sont les suivants :

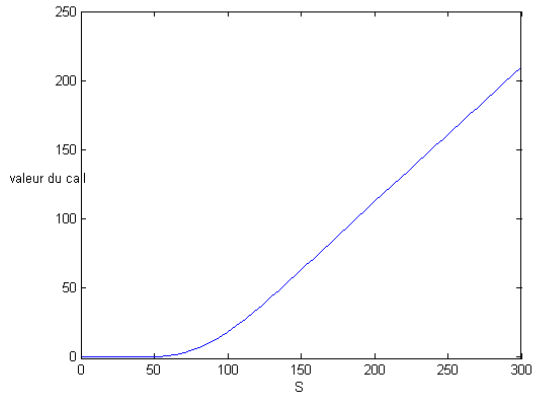


(a) Tracé de la solution en $t=T$

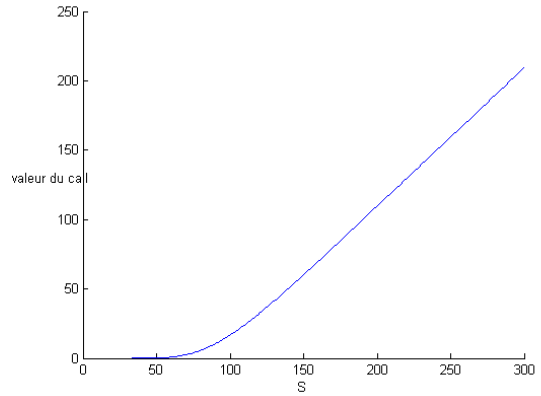


(b) Tracé de la solution pour t dans $]0; T[$

FIGURE 2 – Représentation graphique des valeurs d'une option call européen



(a) Euler implicite



(b) Solution explicite

FIGURE 3 – Comparaison des résultats pour un call européen en $t=0$

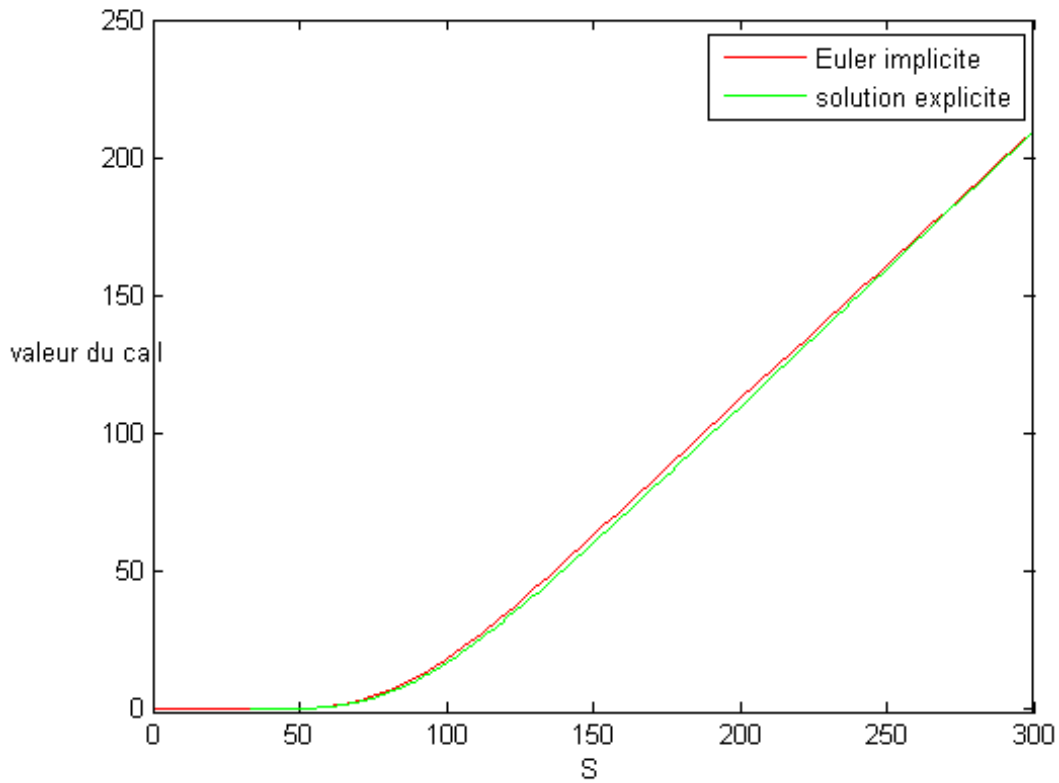


FIGURE 4 – Comparaison des tracés à l'instant initial

Sixième partie

Application à un cas réel

Cherchons à calculer le prix d'un call européen basé sur le cac40 de maturité $T=1$ jour.

Le sous-jacent a pour valeur : $S=3\ 850$ €.

Le strike vaut : $E=4\ 100$ €

Le taux constant est celui de la banque centrale européenne : $r=1,25\%$.

La valeur actuelle du call est de : $C_0=0.025$ €.

On résout alors par dichotomie l'équation $C_0 - SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) = 0$.

On obtient comme volatilité : $\sigma=0.0168$. En appliquant la formule de Black-Scholes, on obtient le graphique suivant :

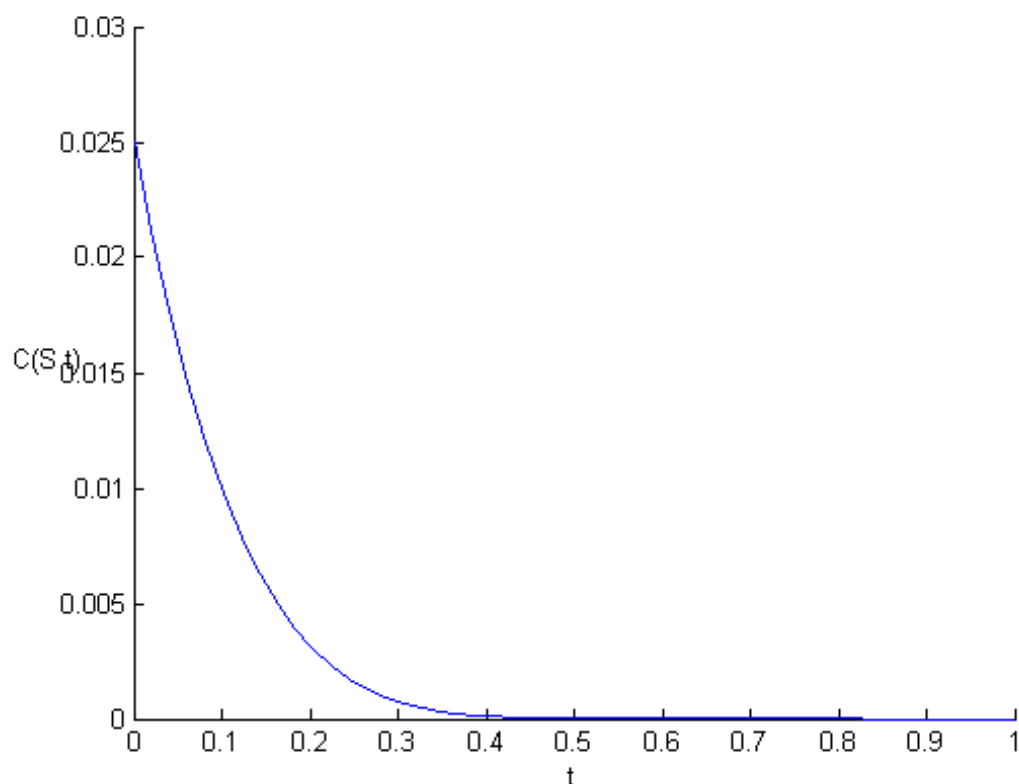


FIGURE 5 – Valeur du call

Septième partie

Critique du modèle

10.3 Les hypothèses sont discutables

Le modèle de Black-Scholes diverge de la réalité en de nombreux points, mais il reste néanmoins une approximation très utile. Cependant, l'utilisateur se doit d'être au courant de ces limites ou il risque de faire face à d'importants risques imprévus. Les premières critiques qui peuvent être faites concernent les hypothèses que l'on a fait nous menant à l'E.D.P. de Black-

Scholes : le marché n'est en réalité pas complet, le temps n'est pas continu en finance, en général il y a un coup de transaction, le taux d'intérêt ainsi que la volatilité sont rarement constants. Ces divergences avec la réalité conduisent à des risques qui peuvent être évalués par ce que l'on appelle les "Grecques". On distingue cinq grecques principales : le Delta, le Thêta, le Gamma, le Vega et le Rhô. Nous ne développerons pas ici le calcul de ces quantités, mais pour plus de détail, le lecteur pourra se référer à [4].

10.4 Et les crises ?

Le mathématicien Benoît Mandelbrot a plusieurs fois remis en questions le modèle de Black-Scholes, non seulement du fait que les hypothèses considérées sont peu réalistes, mais aussi à cause du fait que le modèle à toujours été incapable de prévoir les différents krachs boursiers. Le problème provient de l'utilisation de la loi normale qui sous-estime trop les évènements "improbables" comme les krachs boursiers, beaucoup plus fréquents que la loi ne laisse paraître.

Huitième partie

Annexes

Cette partie présente les différents code matlab utilisés.

10.5 Fonction BScall

Cette fonction calcule la solution analytique de l'équation de Black-Scholes pour un call européen.

```
function c= BScall(S,E,r,T,sigma)
d1=(log(S./E) + (r + sigma.^2 /2) .* T) ./ (sigma .* sqrt(T));
d2=d1- sigma .* sqrt(T);
Ee = E .* exp(-r .* T);
N1=0.5*erfc(-d1/sqrt(2));
N2=0.5*erfc(-d2/sqrt(2));
c=S .* N1 - Ee .* N2;
```

10.6 Tracé de la solution en 2D

Cette fonction permet de tracer la solution analytique de Black-Scholes pour un call européen, grâce a la fonction BScall, en deux dimensions : le prix en fonction de la valeur finale du sous-jacent, le temps étant fixé et étant l'instant initial.

```
sigma = 0.3; %volatilité
N=200; %nombre de point
E=100; %valeur du strike
r=0.1; %taux sans risque
T=1; %maturité
L=log(3);

h=2/(N-1); %pas d'espace
x=(-1:h:1);
S=E*exp(L*x); %valeur finale du sous-jacent
call = BScall(S,E,r,T,sigma);
```

```

plot(S,call)
xlabel('S'), ylabel('valeur du call','rot',0)
box off

```

10.7 Tracé de la solution en 3D

Même chose que précédent sauf qu'ici le temps n'est pas fixe. On obtient donc un tracé en trois dimensions.

```

sigma = 0.3; %volatilité
N=50; %nombre de points
E=100; %strike
r=0.1; %taux sans risque
T=1; %maturité
e=1e-4;
Svals = linspace(e,3,N); %crée N points régulièrement espacés entre e et 3
tvals = linspace(e,T-e,N);
[Smat,tmat]=meshgrid(Svals,tvals); %crée un tableau de valeur pour le tracer
C=BScall(E*Smat,E,r,T-tmat,sigma); %calcul du call dans tout les états
mesh(Smat,tmat,C) %tracer en 3D
xlabel('S'), ylabel('t'), zlabel('C(S,t)','rot',0)
box off

```

10.8 Fonctions matlab pour Euler implicite

Cette fonction permet d'obtenir la solution de l'équation de Black-Scholes par différences finies.

```

function [y,V]=EulerImp(E,L,r,a,T,sigma)

M=50;
b=E*exp(L);
ua=0;
ub=@(t) BScall(b,E,r,t,sigma);
k=0.02;
h=(b-a)/(M+1);
N=T/k;
V=zeros(M+2,N+1);
for i=1:N+1
    V(M+2,i)=ub((N+1-i)*k);
end
%k est représente le pas de temps, h le pas d'espace.

i=1:M;
x=a+i*h;
z=a+(i+1)*h;
w=a+(i-1)*h;
y=[0 x b];

bb1=k*(sigma.*x/h).^2;
bb=(1+r*k)*ones(M,1)+bb1';

```

```

aa=r*k*z/(2*h)-k/2*(sigma.*z/h).^2;
cc=-k/2*(sigma*w/h).^2-r*k*w/(2*h);
A=spdiags([aa',bb,cc'],[-1,0,1],M,M);
B=zeros(M,1);
B(1)=-ua*(r*k*x(1)/(2*h)-k*(sigma*x(1)/h)^2);

u0=zeros(M,1);
for l=floor(M*exp(-L)+1):M
    u0(l)=l*b/M-E;
end
V(2:M+1,N+1)=u0;
U=u0;

figure(1)
B(M)=(k/2*(sigma*x(M)/h)^2+r*k*x(M)/(2*h))*ub(k);
Uold=U;
U=A\uold+B;
plot(y,[ua U' ub(k)])
xlabel('S'), ylabel('valeur du call','rot',0)

for i=1:N
    t=i*k;
    Uold=U;
    B(M)=(k/2*(sigma*x(M)/h)^2+r*k*x(M)/(2*h))*ub(t);
    U=A\uold+B;
    V(2:M+1,N+1-i)=U;
    figure(2)
    plot(y,[ua U' ub(t)])
    xlabel('S'), ylabel('valeur du call','rot',0)
    hold on
    axis([a b -1 250])
    drawnow
    pause(0.1)
end
figure(3)
plot(y,[ua U' ub(T)])
axis([a b -1 250])
xlabel('S'), ylabel('valeur du call','rot',0)
hold on

```

10.9 Calcul de la volatilité implicite par dichotomie

Cette fonction permet de calculer la volatilité d'un call européen. On a une fonction tout à fait similaire pour un put européen.

```

function volatilité=volatilité(S,E,r,T,C0)

d1=@(sigma) (log(S./E) + (r + sigma.^2 /2) .* T) ./ (sigma .* sqrt(T));
d2=@(sigma) d1(sigma)- sigma .* sqrt(T);

Ee = E .* exp(-r .* T);

```



```

N1=@(sigma) 0.5*erfc(-d1(sigma)./sqrt(2));
N2=@(sigma) 0.5*erfc(-d2(sigma)./sqrt(2));
c=@(sigma) S .* N1(sigma) - Ee .* N2(sigma);

F=@(sigma) C0-c(sigma);

a=0; a1=a;
b=10; b1=b;
d=(a+b)/2;
i=0;

while i<300
    if F(a)*F(d)>0
        a=d;
    else b=d;
    end
    d=(a+b)/2;
    i=i+1;
end
plot([a1 b1],F([a1 b1]))
volatilite=d;

```

Références

- [1] E. Pardoux : Processus de Markov et application ; (2006)
- [2] L. Gabet, F. Abergel, I.M. Toke : Introduction aux mathématiques financières ; Ecole Centrale Paris (2010)
- [3] N. Sukhomlin, P. Jacquinot : Solution exacte du problème inverse de la valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Scholes ; Ecole Centrale Paris (2010)
- [4] A. Verraux : Résolution de l'équation de Black et Scholes ; Tampere University of technology (2008)