

Ratings et mesure IRC

Auteur : Ahcène Garèche
ahcene.gareche@ens-cachan.fr

Maître de stage : Philippe Vité
philippe.vite@natixis.com
+33(0)1.58.55.59.76

21/06/2010

Plan

I) Présentation du problème

- 1) La relativité des ratings
- 2) Les données historiques
- 3) Utilité et nécessité du modèle gaussien

II) La mesure IRC : une approche par portefeuille

- 1) Modélisation des risques joints et importance de la corrélation
- 2) Modèle
- 3) Simulation

III) Echantillonnage préférentiel pour un portefeuille de risque de crédit

- 1) Modélisation de la dépendance entre les débiteurs
- 2) Emetteurs indépendants
- 3) Optimalité asymptotique
- 4) Emetteurs non indépendants
- 5) Algorithme

IV) Annexes

Résumé

Dans ce document, nous discutons de la mesure des fonds propres réglementaires associés aux activités d'investissement au titre des risques de marché, à la lumière des révisions des dispositifs de risque de marché introduites par le comité de Bâle en janvier 2009. Nous envisageons différents axes d'amélioration pour mettre à niveau l'économétrie de l'entreprise Natixis.

Une charge en fonds propres Incremental Risk Charge est introduite par le régulateur ; elle vise à prendre en compte le risque de migration et de défaut inhérent aux positions de crédit du portefeuille d'investissement, qui n'était pas pris en compte jusqu'à présent dans le capital réglementaire basé sur la Value-at-Risk. Le risque de perte est mesuré à un horizon de 1 an, suivant un intervalle de confiance à 99,9%. La mesure y est toutefois légèrement plus favorable ; ainsi, elle autorise de supposer que les positions dont la qualité de crédit se dégrade sont rebalancées à leur niveau de qualité de crédit initial à leur horizon de liquidité (au-delà d'un seuil plancher de 3 mois).

Une certaine flexibilité est laissée aux établissements dans leurs choix de modélisation et de calibration : la variété des dispositifs existants et l'absence de consensus sur la modélisation de certains risques a conduit le régulateur à laisser aux établissements la liberté de définir l'ensemble de mesures le mieux adapté à leurs pratiques existantes.

Sous l'impulsion des sommets financiers de Londres (avril 2009) et Pittsburgh (septembre 2009), et à la lumière de la crise récente du crédit, la réglementation Bâle 2 se voit adoptée par la plupart des pays du G20 ("All major G-20 financial centers commit to have adopted the Basel II Capital Framework by 2011"), en particulier les Etats-Unis.

La réglementation est par ailleurs largement renforcée. A échéance courte, les niveaux minima de fonds propres associés aux risques de marché des grandes institutions seront plus que doublés.

L'entreprise a donc pour but de s'adapter à ce nouveau dispositif. Avec le service économétrie de Natixis, nous avons tenté de modéliser la mesure IRC. Le premier travail qui m'a été confié a été de comprendre les ratings et leurs influences sur les risques. La seconde partie de mon travail a été de participer à la modélisation de la mesure IRC et enfin de m'appuyer sur l'article de P.Glasserman *Importance Sampling for Portfolio Credit Risk* afin de calculer la probabilité qu'une perte extrême survienne.

Introduction

Dans ce document, nous identifions de nouveaux besoins économétriques, motivés par les révisions des dispositifs d'encadrement des risques de marché introduites par le comité de Bâle en janvier 2009. Poussée par un contexte politique fort et l'expérience de la crise récente du crédit, la nouvelle réglementation conduit à une forte augmentation des exigences en fonds propres relatives aux activités de trading au titre des risques de marché.

Les nouvelles exigences du régulateur se traduisent par des exigences accrues de mesure des risques, élargissant le périmètre actuel de production et de suivi d'indicateurs, et plus fondamentalement, d'analyse et de gestion des risques associés.

Une charge en fonds propres Incremental Risk Charge s'ajoute au dispositif actuel, en face des risques extrêmes de perte liés à la migration et au défaut des émetteurs, à un horizon de 1 an et suivant un intervalle de confiance 99,9% ("once in a thousand years").

Compte-tenu des délais très courts de mise en application du texte, une certaine latitude est laissée aux institutions dans le choix de mesures adaptées à leur dispositif existant ; l'allocation de capitaux propres en face des risques IRC était jusqu'à présent une pratique peu répandue, et aucun consensus n'a émergé dans l'industrie sur la modélisation appropriée de ces risques.

Le but de ce document est de présenter différents problèmes que l'on rencontre lorsque l'on modélise les risques de crédit dans un portefeuille, la modélisation de la mesure IRC et le calcul de probabilités de pertes extrêmes.

Présentation du problème.

1) La relativité des ratings

Le rating est l'activité principale des agences de notation. Ces agences, qui sont des simples entreprises privées, ont pour rôle de noter la solvabilité d'une entreprise. Plus précisément, elles donnent une opinion sur la capacité d'un emprunteur à rembourser ses dettes. Cela concerne également les Etats, qui eux-mêmes émettent des obligations. Les principales agences de notation sont Standard & Poor's, Moody's et Fitch. Les acheteurs d'obligations doivent pouvoir connaître la capacité de l'entreprise émettrice à rembourser les obligations et à payer les coupons (intérêts).

La définition de la notion de défaut est très complexe et varie selon les agences de notations mais le défaut est notamment enregistré lorsque l'un des points suivants survient :

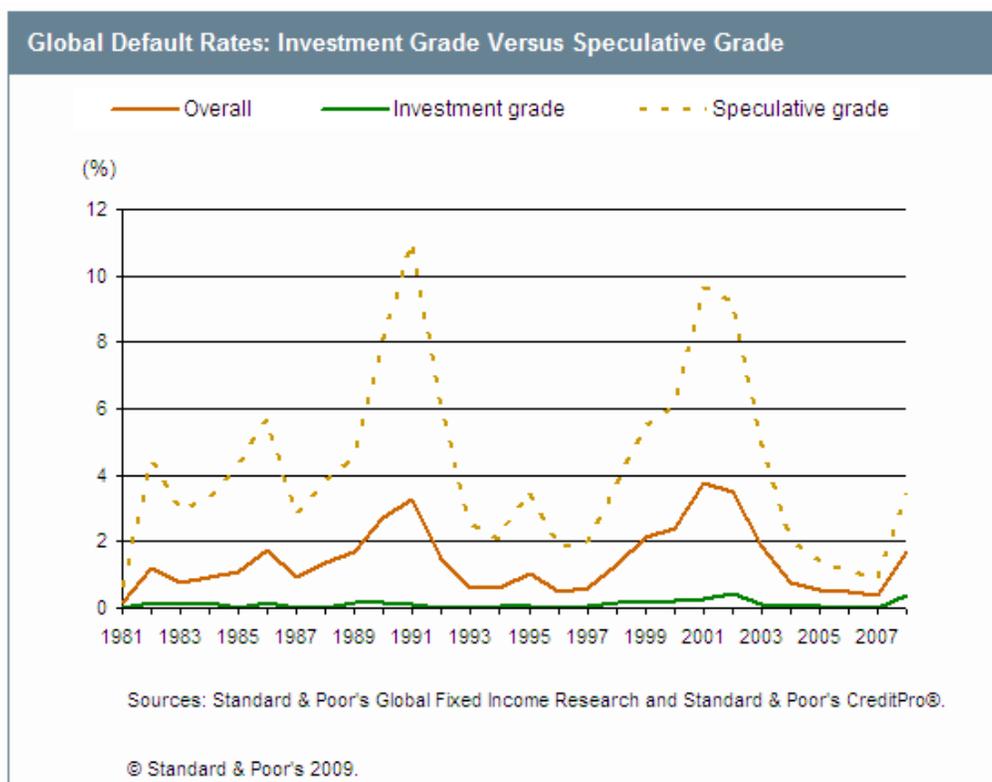
- L'entreprise ne peut plus honorer sa dette, donc faillite
- Pas de paiement de coupon en bonne date (il peut exister une période de grâce ou un montant minimum de non paiement)
- Pas de paiement du principal en bonne date

Les ratings reflètent à une date donnée la qualité de crédit d'un emprunteur. Celle-ci peut varier dans le temps, aussi les agences de rating calculent-elles également des matrices de transition dont la lecture renseigne sur l'évolution à horizon d'une ou plusieurs années de la qualité de crédit d'un emprunteur, c'est-à-dire sa probabilité de migration vers un autre rating, ainsi que la probabilité de défaut. En lisant la matrice de transition suivante, on remarquera par exemple que les firmes notées AAA restent dans leur grande majorité notées AAA après un an.

	S&P	Moody's	Fitch
Investment Grade	AAA	Aaa	AAA
	AA	Aa	AA
	A	A	A
	BBB	Baa	BBB
Speculative Grade	BB	Ba	BB
	B	B	B
	CCC	Caa	CCC
Default	D	D	D

AAA	Meilleure qualité de crédit, excellente solidité
AA	Très bonne qualité de crédit, très solide
A	Bonne qualité de crédit, plus sensible aux conditions économiques
BBB	La plus basse qualité de crédit en Investment Grade
BB	Prudence requise, la meilleure qualité de crédit en Speculative Grade
B	Vulnérable, peut encore honorer ses engagements
CCC	Hautement vulnérable
D	Un défaut de paiement est déjà survenu

#	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	91.32	7.88	0.55	0.05	0.08	0.03	0.06	0.03
AA	0.60	90.54	8.10	0.56	0.05	0.09	0.03	0.03
A	0.04	2.14	91.51	5.62	0.42	0.16	0.03	0.08
BBB	0.01	0.16	4.14	90.25	4.28	0.74	0.16	0.26
BB	0.02	0.06	0.21	5.87	83.86	7.99	0.89	1.10
B	0.00	0.06	0.17	0.30	6.45	82.96	4.93	5.13
CCC	0.00	0.00	0.27	0.40	1.13	13.77	53.58	29.85

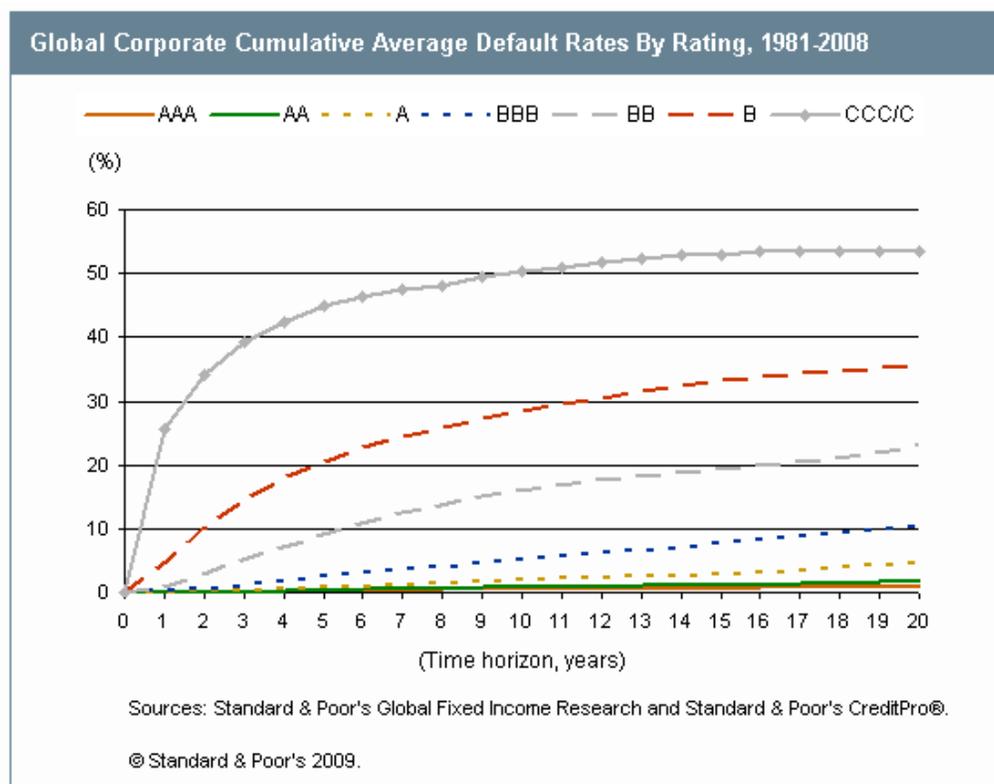


La figure précédente permet de bien faire la distinction entre les classes speculative grade et investment grade.

Néanmoins l'erreur serait de considérer qu'une entreprise notée AAA rembourserait son crédit beaucoup mieux qu'une autre notée C. Une entreprise rembourse ou pas. Les notations signifient simplement que pour un portefeuille suffisamment large la probabilité d'être remboursé est plus forte lorsque l'on a davantage d'entreprises notées AAA que C.

Les modèles de risque de crédit couramment utilisés dans l'industrie pour probabiliser la survenue d'un changement de notation ou d'un défaut d'un émetteur sont construits autour des credit ratings, et ils utilisent deux types de données distincts :

- les historiques de notation et de défaut observés empiriquement depuis 30 ans par les agences de notation constituent la source de données la plus objective
- les historiques de prix observés sur les marchés de crédit ou action sont également largement utilisés.



On observe pour les bons ratings une tendance à la dégradation au cours du temps. Celle-ci se traduit par une structure par terme de probabilité de défaut (croissante) convexe, ce qui indique que la probabilité de défaut marginale est croissante en fonction de l'horizon du temps. Inversement, une probabilité de défaut cumulée au cours du temps pour un mauvais rating est une courbe (croissante) concave. En effet, un émetteur CCC a une probabilité de défaut très élevée à court terme, mais en cas de survie sur un horizon d'un an par exemple, il y a de réelles chances pour que son rating se soit amélioré.

En termes économiques, cette tendance à la dégradation vient non seulement de l'accroissement de la probabilité de défaut lorsque le rating se dégrade, mais également à l'auto-corrélation qu'on observe dans les dégradations de rating. Une dégradation de rating est une mauvaise nouvelle qui peut mettre une entreprise en difficulté : une dégradation sanctionne et entretient, voire accentue, une situation difficile pour une entreprise.

2) Les données historiques

Les données historiques de rating corporate en notre possession sont limitées à 30 ans. Nous avons accès aux informations depuis les années 1980. En conséquence nos connaissances restent extrêmement limitées et l'anticipation de phénomènes boursiers demeure très difficile.

Les données historiques de migration et de défaut sont principalement fournies par les agences de notation et constituent la source d'information la plus objective, mais les défauts y sont observés de façon sporadique ; le recul historique d'environ 30 ans qu'elles fournissent est court relativement aux maturités des instruments de crédit, de l'horizon de capital de 1 an classiquement utilisé.

Par ailleurs, elles sont caractérisées par un faible nombre de défauts (1700 défauts enregistrés en 30 ans parmi 13 600 entreprises notées, soit une moyenne d'environ 60 défauts par an seulement pour les données Standard & Poor's) ; enfin ces données sont très volatiles d'un secteur à l'autre et d'une année à l'autre.

Au bilan, bien que les données d'agence soient la source de données disponible la mieux adaptée à l'analyse statistique et économique de la qualité de crédit corporate, elles sont pauvres du point de vue de la représentation des risques extrêmes au niveau de confiance de 99,9%.

3) Utilité et nécessité du modèle gaussien.

La description de la dynamique des cours par une loi normale multivariée est rudimentaire, en comparaison par exemple des modèles de pricing de produits dérivés. Cependant, pour un calcul de risque étendu à toutes les activités de marché, où la mise en oeuvre du calcul est extrêmement contraignante, le modèle gaussien fournit une méthode simple à mettre en oeuvre, et relativement robuste, pour modéliser les variations conjointes des données de marché à partir d'historiques de variations quotidiennes.

Dans ce cadre, on considère que les variations quotidiennes d'une donnée de marché suivent une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type constant sur 1 an. Dans de nombreuses situations, cette hypothèse est simpliste et elle peut conduire à sous-estimer les variations réellement observées et les risques de pertes encourus : c'est le cas lorsque le marché s'agite soudainement, c'est également le cas pour certaines données aux distributions non gaussiennes (pour lesquelles on peut sous-estimer la fréquence des variations extrêmes), ou c'est le cas encore lorsque les données ne sont pas mises à jour régulièrement (ce qui peut conduire à sous-estimer la variabilité du cours).

Cette description de la dynamique des cours de marché, bien que sommaire, présente cependant un avantage majeur : elle permet de mesurer l'interdépendance entre tous les cours de marché via un calcul de matrice de corrélation. Cette mesure de corrélation entre les cours est primordiale puisque sans elle, on ne saurait pas rendre compte des effets élémentaires de couverture et de diversification qui rendent un portefeuille d'actifs moins risqué que les actifs qui le constituent, pris un à un.

Un autre intérêt réside dans les hypothèses minimalistes associées à la loi normale. En effet deux paramètres suffisent à déterminer entièrement la loi : la moyenne et la variance. Le modèle est ainsi dit robuste dans le sens où les conclusions restent les mêmes lors d'une faible variation des données initiales (probabilités de migration, perte liée au défaut).

En outre, le cadre d'analyse est approprié car le modèle gaussien est très simple à comprendre et donc à utiliser. Enfin, le calcul de la loi jointe dans le cadre du modèle gaussien est facile d'accès alors que l'utilisation d'autres lois nous amènerait à des calculs très compliqués de loi jointe voire impossibles.

La mesure IRC : une approche par portefeuille

L'IRC est censée couvrir le risque de défaut et le risque de migration en captant :

- les pertes directes potentielles résultant du défaut d'un émetteur
- le potentiel de pertes directes liées à une migration des notations des agences
- les pertes indirectes comme les effets de corrélation intra sectoriels : un évènement de défaut d'un émetteur pourrait avoir des effets sur le niveau de risque attribué aux autres débiteurs d'un même secteur

1) Modélisation des risques joints et importance de la corrélation

Du fait que les probabilités de défaut sont souvent très faibles, la corrélation de défaut a un rôle prépondérant sur la mesure du risque porté par un portefeuille de crédit.

Ainsi, la probabilité de défauts joints de deux émetteurs A et B s'écrit :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) + \varrho_{AB} \sqrt{P(A)(1 - P(A))P(B)(1 - P(B))}$$

avec ϱ_{AB} la corrélation de défaut.

Les probabilités de défaut sont en général très faibles :

$$P(A) \simeq P(B) = \varrho$$

En première approximation, la probabilité du défaut joint de deux émetteurs est proportionnelle à leur corrélation de défaut et à leur probabilité de défaut :

$$P(A \cap B) \simeq \varrho^2 + \varrho_{AB}\varrho \simeq \varrho_{AB}\varrho \quad (i)$$

Sur un groupe d'émetteurs représentatif du stock, quelques dizaines de milliers de scénarii Monte-Carlo sont nécessaires pour représenter les probabilités marginales de migration et de défaut avec un degré de variance acceptable.

Si l'on souhaite représenter les probabilités de défauts joints des émetteurs pris 2 à 2 avec un degré de variance acceptable, la formule (i) suggère intuitivement qu'il faut environ dix fois plus de scénarii (ϱ est souvent de l'ordre de 0.1 pour la classe investment grade), soit quelques centaines de milliers de simulations, ce qui peut poser de fortes contraintes de performance.

2)Modèle

Soit X une variable aléatoire gaussienne de fonction caractéristique Φ . Si la réalisation de cette variable est sous un certain seuil, alors le défaut est déclenché. Le seuil est précisément calibré pour que la probabilité de défaut de l'entreprise corresponde à la probabilité que la variable X ait une valeur inférieure à ce seuil. Il en sera de même pour tous les autres niveaux de rating ; selon la valeur de la réalisation de la variable X la transition s'effectuera soit vers le défaut soit vers un autre niveau de rating. Si nous appelons i le rating en début de période de l'entreprise, on définit le seuil $Z_{i,CCC}$ correspondant à la transition du rating i au défaut.

Nous avons :

$$P(i, D) = P(X \leq Z_{i,CCC}) = \Phi(Z_{i,CCC})$$

Par ailleurs, la probabilité de transition soit vers le rating CCC soit vers le défaut est égale à $P(i,CCC)+P(i,D)$. On en déduit que le seuil qui déclenche une transition vers le rating CCC ou vers le défaut est défini par la relation

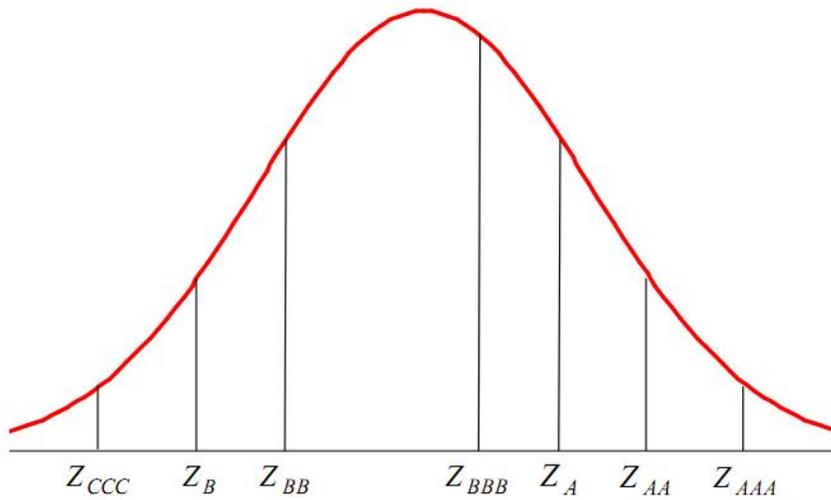
$$P(i, CCC) + P(i, D) = P(X \leq Z_{i,B}) = \Phi(Z_{i,B})$$

On construit ainsi de proche en proche les seuils associés aux différentes transitions de rating. De façon générale, les seuils définissant les transitions s'écrivent :

$$Z_{i,j} = \Phi^{-1}(\sum_{k>j} P(i, k))$$

On déduit de la construction précédente que la probabilité de transition du rating i vers le rating j (différent du rating AAA ou du défaut) est donnée par :

$$P(i, j) = P(Z_{i,j} < X \leq Z_{i,j-1}) = \Phi(Z_{i,j-1}) - \Phi(Z_{i,j})$$



L'interprétation graphique de la courbe en cloche est que l'aire interceptée par la courbe entre les seuils $Z_{i,j-1}$ et $Z_{i,j}$ est égale la probabilité de transition du rating i vers le rating j .

3)Simulation

Le modèle IRC a donné lieu à des calculs de corrélation de défaut. Nous avons comparé la corrélation dans deux cas : entre deux évènements qui ont une forte probabilité de survenir et entre un évènement qui a une forte probabilité de survenir et un autre qui a une faible probabilité de se produire. Ces documents sont mis en annexe. Nous avons construit des abaques à partir de ce programme qui nous permettent de faire un lien graphique direct entre la corrélation linéaire et la corrélation de défaut.

Echantillonnage préférentiel pour un portefeuille de risque de crédit

1) Modélisation de la dépendance entre les débiteurs

La méthode Monte Carlo est la méthode de simulation la plus utilisée dans la gestion des risques. Un de ses avantages est d'être une méthode assez générale et le principal de ses inconvénients est sa relative lenteur. Ceci nous conduit à étudier des méthodes plus perfectionnées de simulation par une méthode de réduction de variance. Deux contraintes inhérentes au domaine du risque apparaissent immédiatement :

- nous devons connaître une estimation précise de la probabilité très faible d'évènements rares
- nous devons faire apparaître la dépendance qui peut exister entre les différents mécanismes intervenant dans la modélisation du risque de portefeuille

Nous utiliserons pour cela une méthode dite d'Importance Sampling.

Un élément clé de tout modèle de risque de crédit est la prise en compte de la dépendance qui règne entre les différents émetteurs.

Nous utiliserons les notations suivantes :

m = nombre d'émetteurs auxquels le portefeuille est exposé
 Y_k = défaut du $k^{\text{ième}}$ émetteur
 p_k = probabilité marginale que le $k^{\text{ième}}$ émetteur fasse défaut
 c_k = perte issue du défaut du $k^{\text{ième}}$ émetteur
 $L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$ = perte totale issue des défauts
 Φ = fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (gaussienne)

Les p_k et c_k sont connus. Nous cherchons à estimer la probabilité $P(L > x)$ pour un x suffisamment grand.

Pour rendre compte de la dépendance entre les émetteurs nous devons introduire une dépendance entre les indicateurs de défaut Y_k . Dans le cadre du modèle gaussien la dépendance est introduite à travers un vecteur gaussien (X_1, \dots, X_m) .

On représente alors les indicateurs de défaut comme suit :

$$Y_k = 1_{X_k > x_k}, k=1..m$$

avec $x_k = \Phi^{-1}(1 - p_k)$

$$\begin{aligned} \text{car } P(Y_k = 1) &= P(X_k > x_k) = P(X_k > \Phi^{-1}(1 - p_k)) \\ &= 1 - P(X_k \leq \Phi^{-1}(1 - p_k)) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1 - p_k)) = p_k \end{aligned}$$

Grâce à cette construction la dépendance entre les X_k représente la dépendance entre les Y_k . Les corrélations sont souvent spécifiées par le modèle suivant :

$$X_k = a_{k1}Z_1 + \dots + a_{kd}Z_d + b_k\varepsilon_k$$

Z_1, \dots, Z_d suivent une loi normale centrée réduite : ils représentent les différents secteurs d'activité (automobile, aéronautique...)

Les ε_k forment une famille de variables aléatoires indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite

a_{k1}, \dots, a_{kd} sont tels que $a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2 < 1$ et $b_k = \sqrt{1 - (a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2)}$

En notant $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd})$, la corrélation entre X_k et X_j vaut $a_k a_j^T$

La probabilité de défaut conditionnelle pour le $k^{\text{ième}}$ débiteur sachant Z est

$$\begin{aligned} p_k(Z) &= P(Y_k = 1|Z) = P(X_k > x_k|Z) = P(a_k Z + b_k \varepsilon_k > \Phi^{-1}(1 - p_k)) \\ &= P(\varepsilon_k > \frac{\Phi^{-1}(1-p_k) - a_k Z}{b_k}) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_k) + a_k Z}{b_k}\right) \end{aligned}$$

2) Emetteurs indépendants.

On suppose les a_{kj} tous nuls pour k différent de j .

Pour rendre précis notre estimation de $P(L > x)$ nous cherchons à accroître les probabilités de défauts. Si nous cherchons à remplacer chaque $p_k(Z)$ par une autre probabilité de défaut q_k le rapport de vraisemblance est

$$\left(\frac{p_k(Z)}{q_k}\right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k(Z)}{1-q_k}\right)^{1-Y_k}.$$

Mieux que d'augmenter la probabilité de défaut arbitrairement nous utilisons ce que Glasserman appelle un exponential twisting :

$$p_{k,\Theta} = \frac{p_k \exp(\Theta c_k)}{1 + p_k (\exp(\Theta c_k) - 1)}$$

Pour $\Theta = 0$ on retrouve les p_k

La rapport de vraisemblance total est ainsi :

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k(Z)}{p_{k,\Theta}}\right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k(Z)}{1-p_{k,\Theta}}\right)^{1-Y_k} = \prod_{k=1}^n \exp(-\Theta c_k Y_k) (1 + p_k(Z) (\exp(\Theta c_k) - 1)) \\ = & \exp(-\Theta L + \Psi(\Theta, Z)) \\ & \text{où } \Psi(\Theta, Z) = \log E(\exp(\Theta L) | Z = z) = \sum_{k=1}^n \log(1 + p_k(Z) (\exp(\Theta c_k) - 1)) \end{aligned}$$

Il nous reste à choisir Θ . Nous voudrions choisir Θ pour minimiser la variance ou de manière équivalente le moment d'ordre 2 de l'estimateur. Le second ordre est donné par :

$$M_2(x) = M_2(x, \Theta) = E_{\Theta}[1_{L>x} \exp(-2\Theta L + 2\Psi(\Theta, Z))] \leq \exp(-2\Theta L + 2\Psi(\Theta, Z))$$

Minimiser le moment d'ordre 2 est assez difficile mais minimiser le majorant est beaucoup plus accessible : nous devons minimiser $\Theta L - \Psi(\Theta, Z)$ sous $\Theta \geq 0$. La fonction Ψ est strictement convexe et passe par l'origine donc le maximum est atteint à

$$\Theta_x = \begin{cases} \text{solution unique de } \Psi'(\Theta) = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous vérifions aisément que $E_{\Theta}[L] = \Psi'(\Theta)$. Ainsi prendre $\Theta = \Theta_x(Z)$ dans $p_k(\Theta, Z) = \frac{p_k \exp(\Theta c_k)}{1 + p_k (\exp(\Theta c_k) - 1)}$ c'est rendre la perte attendue égale à x dans le sens où

$$\sum_{k=1}^m p_k(\Theta_x(Z), Z) c_k = x = E_{\Theta_x}[L].$$

Comme on a aucun intérêt à diminuer les probabilités de défaut on choisit forcément Θ positif

en posant : $\Theta_x^+ = \max(0, \Theta_x)$.

3)Optimalité asymptotique.

Pour établir l'efficacité d'un estimateur de simulation pour un évènement rare il faut montrer qu'il est asymptotiquement optimal : le moment du second ordre décroît le plus rapidement possible par rapport à tous les autres estimateurs

L'estimateur que nous utilisons ici est bien asymptotiquement optimal. Comme la preuve nécessite le théorème de Gartner-Ellis nous laissons au lecteur le choix de la lire dans l'article de Paul Glasserman : *Importance Sampling for Portfolio Credit Risk*.

4) Emetteurs non indépendants.

Rappelons le contexte.

m = nombre d'émetteurs auxquels le portefeuille est exposé

Y_k = défaut du $k^{i\grave{e}me}$ émetteur

p_k = probabilité marginale que le $k^{i\grave{e}me}$ émetteur fasse défaut

c_k = perte issue du défaut du $k^{i\grave{e}me}$ émetteur

$L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$ = perte totale issue des défauts

avec $Y_k = 1_{X_k > x_k}$, $k = 1..m$

$X_k = a_{k1} Z_1 + \dots + a_{kd} Z_d + b_k \varepsilon_k$

Z_1, \dots, Z_d suivent une loi normale centrée réduite

a_{k1}, \dots, a_{kd} sont tels que $a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2 < 1$ et $b_k = \sqrt{1 - (a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2)}$

On cherche à généraliser la méthode utilisée précédemment lorsque les émetteurs ne sont plus indépendants. Conditionnellement à $Z=z$ les indicateurs de défaut sont indépendants, le $k^{i\grave{e}me}$ émetteur a pour probabilité conditionnelle de défaut $p_k(z)$. Nous allons procéder comme précédemment.

Nous générons un vecteur Z gaussien standard.

Nous calculons la probabilité de défaut conditionnelle $p_k(Z)$. Si $E[L|Z] = \sum_{k=1}^m p_k(Z) c_k > x$ alors on pose $\Theta_x(Z) = 0$ sinon $\Theta_x(Z)$ sera égal à l'unique solution de

$$\frac{\partial \Psi_m(\Theta, Z)}{\partial \Theta} = x \text{ avec } \Psi(\Theta, Z) = \sum_{k=1}^m \log(1 + p_k(Z)(\exp(\Theta c_k) - 1))$$

On génère les indicateurs de défaut Y_1, \dots, Y_m depuis les probabilités conditionnelles de défaut modifiées :

$$p_{k, \Theta_x(Z)}(Z) = \frac{p_k(Z) \exp(\Theta_x(Z) c_k)}{1 + p_k(Z)(\exp(\Theta_x(Z) c_k) - 1)}$$

On calcule $L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$ et on retourne l'estimateur $1_{L > x} \exp(-\Theta_x(Z) L + \Psi(\Theta_x(Z), Z))$

L'efficacité de cet algorithme dépend de la forte dépendance ou non des émetteurs. Quand la dépendance est faible l'augmentation des probabilités de défaut est suffisante pour réduire la variance. Quand la dépendance est forte, des pertes importantes se produisent principalement en raison des grandes valeurs de Z , et nous n'avons pas encore appliqué l'Importance Sampling à la distribution de Z .

Nous appliquons l'Importance Sampling au facteur $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ ainsi qu'aux probabilités de défaut conditionnelles. Pour expliquer notre approche nous remarquons que pour n'importe quel estimateur p_x de $P(L > x)$ nous avons la décomposition

$$Var[p_x] = E[Var[p_x|Z]] + Var[E[p_x|Z]].$$

Conditionnellement à Z les émetteurs sont indépendants donc on sait d'après ce qui précède comment appliquer l'Importance Sampling. Cela rend $Var[p_x|Z]$ petit et suggère que nous devons nous concentrer sur le second membre.

Nous devons choisir une loi pour Z échantillonnée qui réduirait la variance en estimant l'intégrale de $P(L > x|Z)$ selon la densité de Z

On échantillonne la loi de Z depuis la densité proportionnelle à la fonction $z \rightarrow P(L > x|Z = z) \exp(-\frac{zz^T}{2})$.

Or ceci est impossible car on ne connaît pas la valeur de $P(L > x)$ (c'est ce qu'on cherche!).

Glasserman suggère alors d'utiliser une densité de loi normale. Cela conduit à la résolution du problème d'optimisation $\max_z P(L > x|Z = z) \exp(-\frac{zz^T}{2})$ qui est aussi la moyenne de la loi normale que nous utilisons. Une fois la moyenne μ trouvée on utilise l'algorithme suivant :

Générer Z depuis la loi $N(\mu, I)$

On applique l'algorithme de la partie précédente

On retourne l'estimateur

$$1_{L > x} \exp(-\Theta_x(Z)L + \Psi(\Theta_x(Z), Z)) \exp(-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2)$$

Trouver μ est un problème difficile. Nous utilisons pour cela une approximation de loi normale :

$$E[L|Z = z] = \sum_k p_k(z) c_k \text{ et } Var[L|Z = z] = \sum_k c_k^2 p_k(z) (1 - p_k(z))$$

$$P(L > x|Z = z) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x - E[L|Z=z]}{\sqrt{Var[L|Z=z]}}\right)$$

Cette approximation vient du fait que lorsque le nombre d'émetteurs devient très grand la distribution des pertes suit une loi normale (théorème de Vasicek).

5) Algorithme

Rappelons les notations utilisées.

m = nombre d'émetteurs auxquels le portefeuille est exposé

Y_k = défaut du $k^{i\grave{e}me}$ émetteur

p_k = probabilité marginale que le $k^{i\grave{e}me}$ émetteur fasse défaut

c_k = perte issue du défaut du $k^{i\grave{e}me}$ émetteur

$L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$ = perte totale issue des défauts

Φ = fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (gaussienne)

Nous allons décrire ici les étapes de l'algorithme que nous utiliserons pour mener à bien les calculs.

La première étape est de trouver la moyenne μ en résolvant $\max_z P(L > x | Z = z) \exp(-\frac{zz^T}{2})$.

Pour cela nous utilisons l'approximation de loi normale

$$E[L|Z = z] = \sum_k p_k(z) c_k \text{ et } Var[L|Z = z] = \sum_k c_k^2 p_k(z) (1 - p_k(z))$$

$$P(L > x | Z = z) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x - E[L|Z=z]}{\sqrt{Var[L|Z=z]}}\right)$$

La deuxième étape est décomposée en 7 sous-parties.

-on génère une variable Z qui suit la loi normale $N(\mu, I)$

-on calcule les $p_k(Z)$ par la formule $p_k(Z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_k) + a_k Z}{b_k}\right)$

-on calcule $\Theta_x(Z)$ en résolvant l'équation $\sum_{k=1}^m p_k(\Theta_x(Z), Z) c_k = x$

-on calcule les $p_k(\Theta_x^+(Z), Z)$ pour $k=1, \dots, m$ avec $\Theta_x^+(Z) = \max(\Theta, 0)$

-on crée la variable aléatoire Y_k telle que $Y_k = 1$ avec probabilité $p_k(\Theta_x^+(Z), Z)$ et 0 sinon pour $k=1, \dots, m$

-on calcule la perte totale $L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$

-on retourne l'estimateur

$$1_{L > x} \exp(-\Theta_x^+(Z)L + \Psi(\Theta_x^+(Z), Z)) \exp(-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2)$$

Nous avons codé cet algorithme : le code a été mis en annexe. Le programme sera testé sur un vrai portefeuille au sein de l'entreprise ultérieurement. L'algorithme a fonctionné pour différentes valeurs de perte ce qui laisse présager son efficacité lors du test sur un vrai portefeuille.

Conclusion

La mesure IRC se met en place petit à petit au sein de l'entreprise. Notre travail a notamment permis de présenter à l'équipe économétrie les enjeux de cette nouvelle mesure et le moyen d'évaluer des niveaux de perte très élevés. Le travail sur la mesure IRC se poursuit afin de satisfaire les exigences internationales. La première partie du travail a été enrichissante du point de vue de la culture économique et financière. La seconde partie nous a conduits à nous poser de véritables questions sur la mesure IRC et de définir le modèle de cette nouvelle norme. La troisième partie sera utilisée par la suite au sein de l'entreprise afin de prévoir les pertes futures et ainsi placer des fonds propres en face de ces éventuelles pertes. Ce stage a été extrêmement enrichissant : découverte du monde de l'entreprise, du travail d'équipe où chaque personne du projet pouvait y contribuer selon ses compétences (mathématiques, informatiques, économiques...). Ce fut pour moi l'occasion de me rendre compte que la coordination des talents était primordiale pour la réussite d'un projet. Je tiens notamment à remercier Philippe Vité pour sa patience et son encadrement ainsi que toute l'équipe du service économétrie avec qui j'ai pu travailler, partager et qui m'a accueilli dans des conditions idéales.

Annexes

Programme pour le calcul des probabilités jointes

```
/*
 *
 */

#include "Simulation.hh"
#include "normal.hh"
#include <acml.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <sstream>

// Dimensions des matrices d'entrees
#define DIM_N 56
#define DIM_LINE 7
#define DIM_COL 8
// Vecteurs de variables aleatoires
double Y[NUM_SIMUL_MAX];
double E1[NUM_SIMUL_MAX];
double E2[NUM_SIMUL_MAX];
double Z1[NUM_SIMUL_MAX];
double Z2[NUM_SIMUL_MAX];

int suff = 0;

// Allocation de mémoire
Simulation::Simulation()
{
    _A.reserve(DIM_LINE * DIM_COL);
    _B.reserve(DIM_LINE * DIM_COL);
    _N.reserve(DIM_N * DIM_N);
}

// Matrice de transition
void Simulation::init_transition_matrix()
{
    _A[0]=0.9132; _A[1]=0.0788; _A[2]=0.0055; _A[3]=0.0010; _A[4]=0.0008; _A[5]=0.0003;
    _A[6]=0.0006; _A[7]=0.0003;

    _A[8]=0.0060; _A[9]=0.9054; _A[10]=0.0810; _A[11]=0.0056; _A[12]=0.0005; _A[13]=
    0.0009; _A[14]=0.0003; _A[15]=0.0003;

    _A[16]=0.0004; _A[17]=0.0214; _A[18]=0.9151; _A[19]=0.0562; _A[20]=0.0042; _A[21]=
    0.0016; _A[22]=0.0003; _A[23]=0.0008;

    _A[24]=0.0001; _A[25]=0.0016; _A[26]=0.0414; _A[27]=0.9025; _A[28]=0.0428; _A[29]=
    0.0074; _A[30]=0.0016; _A[31]=0.0026;

    _A[32]=0.0002; _A[33]=0.0006; _A[34]=0.0021; _A[35]=0.0587; _A[36]=0.8386; _A[37]=
    0.0799; _A[38]=0.0089; _A[39]=0.0110;

    _A[40]=0.00; _A[41]=0.0006; _A[42]=0.0017; _A[43]=0.0030; _A[44]=0.0645; _A[45]=
    0.8296; _A[46]=0.0493; _A[47]=0.0513;

    _A[48]=0.00; _A[49]=0.00; _A[50]=0.0027; _A[51]=0.0040; _A[52]=0.0113; _A[53]=0.1377;
```

```

_A[54]=0.5458; _A[55]=0.2985;
}

// Calcul des seuils pour chaque probabilité
void Simulation::compute_quantile()
{
    float sum = 0.0;

    for(int i = 0; i < DIM_LINE; ++i)
        for(int j = 0; j < DIM_COL; ++j)
            {
                if (i == j)
                    _B[i * DIM_COL + j] = 0.0;
                else {
                    sum = 0.0;
                    if (j < i) {
                        for (int k = j + 1; k <= i; ++k)
                            sum += _A[i * DIM_COL + k];
                    }
                    else {
                        for (int k = j; k < DIM_COL; ++k)
                            sum += _A[i * DIM_COL + k];
                    }
                    _B[i * DIM_COL + j] = stdnormal_inv(sum);
                }
            }
}

// Sous R, cette fonction correspond à mean((data - ind) < 0)
float Simulation::mean_cond(const double* data, const float ind, const unsigned int nb)
const
{
    unsigned int res = 0;
    for (unsigned int i = 0; i < nb; ++i) {
        if (data[i] < ind)
            ++res;
    }
    return (res * 1.0) / nb;
}

// Sous R, cette fonction correspond à mean((data1 - ind1) < 0 & (data2 - ind2) < 0)
float Simulation::mean_cond2(const double* data1, const float ind1, const double* data2
, const float ind2, const unsigned int nb) const
{
    unsigned int res = 0;
    for (unsigned int i = 0; i < nb; ++i) {
        if ((data1[i] < ind1) && (data2[i] < ind2))
            ++res;
    }
    return (res * 1.0) / nb;
}

// Z = Sqrt(rho) * Y + Sqrt(1 - rho) * Ei
void Simulation::compute_Zi(double* Z, const double* Y, const double* Ei, const float
rho, const unsigned int size) const

```

```

{
  const float p = sqrt(rho);
  const float q = sqrt(1-rho);

  for (unsigned int i = 0; i < size; ++i) {
    Z[i] = p * Y[i] + q * Ei[i];
  }
}

float Simulation::correlation(unsigned int size, const float rho, const float seuil[2],
long states[633])
{
  float P1 = 0.0, P2 = 0.0, P12_ind = 0.0, P12_joint = 0.0;
  long info = 0;

  // Generation des vecteurs de variables aleatoires
  drandgaussian(size, 0, 1.0, states, Y, &info);
  drandgaussian(size, 0, 1.0, states, E1, &info);
  drandgaussian(size, 0, 1.0, states, E2, &info);

  compute_Zi(Z1, Y, E1, rho, size);
  compute_Zi(Z2, Y, E2, rho, size);

  P1 = mean_cond(Z1, seuil[0], size);
  P2 = mean_cond(Z2, seuil[1], size);

  P12_ind = P1 * P2;
  P12_joint = mean_cond2(Z1, seuil[0], Z2, seuil[1], size);

  float res = (P12_joint - P12_ind) / sqrt(P1 * (1.0 - P1) * P2 * (1.0 - P2));

  // std::cout << P1 << " " << P2 << " " << P12_joint << " " << P12_ind << " " <<
sqrt(P1 * (1.0 - P1) * P2 * (1.0 - P2)) << " " << res << std::endl;

  return res;
}

// Fonction centrale qui parcourt toutes les proba de transitions
void Simulation::core()
{
  unsigned int index_p1 = 0, index_p2 = 0;
  unsigned int line = 0, column = 0;
  unsigned int nb_simul = 0;
  float p1 = 0.0, p2 = 0.0;

  for (int p = 0; p < DIM_LINE; ++p)
    for (int q = 0; q < DIM_COL; ++q, ++line) {
      column = 0;
      index_p1 = p * DIM_COL + q;
      p1 = _A[index_p1];

      for (int s = 0; s < DIM_LINE; ++s)
        for (int t = 0; t < DIM_COL; ++t, ++column) {
          index_p2 = s * DIM_COL + t;

```

```

p2 = _A[index_p2];

float seuil[2] = { _B[index_p1], _B[index_p2] };
if ((index_p2 <= index_p1) || p1 == 0.0 || p2 == 0.0) {
    nb_simul = 0;
} else {

    // Affiche les proba et les seuils de p1 et p2
    std::cout << "p1: " << p1 << " p2: " << p2 << std::endl;
    std::cout << "Seuils: " << seuil[0] << " " << seuil[1] << std::endl;

    suff = line * DIM_N + column;

    nb_simul = compute_nb_simul(p1, p2, seuil);
}
_N[line * DIM_N + column] = nb_simul;

// Affiche l'index et le nb de simul dans la matrice finale
std::cout << "Index: " << line * DIM_N + column << std::endl;
std::cout << "Nb simul finale: " << nb_simul << std::endl << std::endl;
}
}

// Calcul de moyenne tout simplement
float Simulation::mean(const float* x, const unsigned int size)
{
    float mu = 0.0;

    for (unsigned int i = 0; i < size; ++i) {
        mu += x[i];
    }
    return mu / size;
}

// Calcul de l'ecart type
float Simulation::std_deviation(const float* x, const float mean, const unsigned int
size)
{
    float std_dev = 0.0;

    for (unsigned int i = 0; i < size; ++i) {
        std_dev += pow(x[i] - mean, 2);
    }
    return sqrt(std_dev / size);
}

// Calcul du nombre de simulation pour un couple de proba donné
unsigned int Simulation::compute_nb_simul(const float p1, const float p2, const float
seuil[2])
{
    unsigned int nb_simul = (unsigned int) (10 * max(1.0 / p1, 1.0 / p2)); // nb de
simulations initial
    const unsigned int num_sample = (unsigned int) (1.0 / STEP);

```

```

// Variables relatives au générateur
long info = 0;
long seeds[624], states[633];
long genid = 3, // Id du Mersenne Twister dans l'ACML
    subid = 0,
    lseed = 1,
    lstate = 633;

for (; nb_simul < NUM_SIMUL_MAX; nb_simul += 100000)
{
    std::cout << "Simul: " << nb_simul << std::endl;

    // Première partie
    // Initialisation du générateur
    seeds[0] = 1234;
    drandinitialize(genid, subid, seeds, &lseed, states, &lstate, &info);

    // Génération des Rho(R) avec la meme graine
    float rho[num_sample];
    for (unsigned int i = 0; i < num_sample; ++i) {
        rho[i] = correlation(nb_simul, i * STEP, seuil, states);
    }
    out_rho(rho); // Sortie des données Rho(R)

    // Seconde partie
    // Génération d'un ensemble de tau avec des graines differentes
    float tau[NUM_CORREL];
    float correls[NUM_CORREL];
    unsigned int j = 0;
    for (unsigned int i = 0; i < NUM_CORREL; ++i) {

        seeds[0] = 123500/(i+1);
        drandinitialize(genid, subid, seeds, &lseed, states, &lstate, &info);

        tau[i] = correlation(nb_simul, CORREL_GAUSS, seuil, states);

        // Détermination de la correl associée
        for (j = 0; (j < num_sample) && (tau[i] > rho[j]); ++j)
            ;
        correls[i] = j * STEP;
        if (tau[i] < rho[j]) {
            correls[i] -= STEP * 0.5;
        }
    }
    out_tauCorrels(tau, correls); // Sortie des données Tau(R)

    float mu = mean(correls, NUM_CORREL);
    float std_dev = std_deviation(correls, mu, NUM_CORREL);
    std::cout << "Mean: " << mu << std::endl;
    std::cout << "Ecart type: " << std_dev << std::endl;

    // Seuil de satisfaction arbitraire
    if (std_dev < 0.05)
        return nb_simul;
}

```

```

    }

    return nb_simul;
}

// Les fonctions qui suivent ne sont là que pour sortir des données dans
// des fichiers pour les afficher sur gnuplot

void Simulation::out_rho(const float* rho) const
{
    std::stringstream tmp(stringstream::in | stringstream::out);
    tmp << "rho" << suff << ".txt";
    std::ofstream file (tmp.str().c_str(), std::fstream::out);

    const unsigned int num_sample = (unsigned int) (1.0 / STEP);

    for (unsigned int i = 0; i < num_sample; ++i) {
        file << i * STEP << " " << rho[i] << std::endl;
    }

    file.close();
}

void Simulation::out_tauCorrels(const float* tau, const float* correls) const
{
    std::stringstream tmp(stringstream::in | stringstream::out);
    tmp << "tauCorrels" << suff << ".txt";
    std::ofstream file (tmp.str().c_str(), std::fstream::out);

    for (unsigned int i = 0; i < NUM_CORREL; ++i) {
        file << correls[i] << " " << tau[i] << std::endl;
    }

    file.close();
}

void Simulation::out_gauss(const double* gauss, unsigned int size, const std::string&
name) const
{
    std::stringstream tmp(stringstream::in | stringstream::out);
    tmp << "gauss" << name << "_" << suff << ".txt";
    std::ofstream file (tmp.str().c_str(), std::fstream::out);

    for (unsigned int i = 0; i < size; ++i) {
        file << i << " " << gauss[i] << std::endl;
    }

    file.close();
}

```

Résultats obtenus dans les deux cas différents cités au II.3

Nous avons simulé des trajectoires qui nous permettent ainsi de faire le lien entre la corrélation de défaut et les probabilités jointes de défaut.

Le nombre de simulations a une influence sur l'épaisseur de la courbe

Nom	Proba	Seuil
p1	0.9132	0
p2	0.9054	0
p3	0.081	-1.34943

P1	P2	P3	P12 joint	P13 joint	P12 ind	P13 ind
0.48	0.51	0.11	0.25	0.05	0.24	0.05
0.5	0.5	0.1	0.26	0.05	0.25	0.05
0.5	0.54	0.1	0.28	0.06	0.27	0.05
0.5	0.5	0.09	0.25	0.04	0.25	0.04
0.47	0.49	0.09	0.22	0.04	0.23	0.04
0.47	0.52	0.08	0.25	0.04	0.24	0.04
0.48	0.49	0.09	0.24	0.05	0.23	0.04
0.48	0.53	0.09	0.27	0.05	0.25	0.04
0.5	0.5	0.1	0.26	0.06	0.25	0.05
0.49	0.51	0.09	0.27	0.05	0.25	0.05
0.5	0.51	0.1	0.27	0.06	0.26	0.05
0.5	0.48	0.08	0.26	0.05	0.24	0.04
0.47	0.49	0.08	0.25	0.05	0.23	0.04
0.5	0.48	0.09	0.27	0.05	0.24	0.04
0.51	0.5	0.1	0.27	0.06	0.25	0.05
0.5	0.49	0.08	0.27	0.05	0.25	0.04
0.51	0.47	0.09	0.27	0.06	0.24	0.05
0.52	0.52	0.1	0.29	0.07	0.27	0.05
0.52	0.5	0.09	0.29	0.07	0.26	0.05
0.5	0.5	0.09	0.27	0.06	0.25	0.04
0.49	0.5	0.11	0.28	0.07	0.24	0.05
0.52	0.5	0.09	0.29	0.05	0.26	0.05
0.51	0.54	0.08	0.32	0.05	0.27	0.04
0.48	0.51	0.09	0.29	0.05	0.24	0.04
0.51	0.51	0.09	0.29	0.06	0.26	0.05
0.49	0.5	0.09	0.3	0.06	0.25	0.05
0.53	0.5	0.09	0.31	0.07	0.26	0.05
0.49	0.51	0.09	0.3	0.06	0.25	0.05
0.5	0.51	0.11	0.32	0.08	0.26	0.05
0.5	0.51	0.08	0.31	0.06	0.26	0.04
0.51	0.5	0.08	0.3	0.06	0.26	0.04
0.49	0.49	0.08	0.27	0.05	0.24	0.04
0.51	0.49	0.09	0.3	0.06	0.25	0.04
0.49	0.48	0.1	0.28	0.07	0.24	0.05
0.53	0.5	0.09	0.32	0.07	0.26	0.05
0.53	0.52	0.1	0.32	0.07	0.27	0.05
0.52	0.53	0.09	0.33	0.07	0.28	0.05
0.47	0.45	0.08	0.26	0.06	0.21	0.04
0.48	0.48	0.09	0.29	0.07	0.23	0.04
0.5	0.49	0.09	0.3	0.07	0.24	0.05
0.49	0.51	0.09	0.31	0.07	0.25	0.04
0.52	0.5	0.08	0.32	0.07	0.26	0.04
0.48	0.5	0.08	0.31	0.06	0.24	0.04

0.5	0.49	0.08	0.32	0.07	0.24	0.04
0.48	0.52	0.09	0.31	0.07	0.25	0.04
0.48	0.51	0.09	0.33	0.08	0.24	0.04
0.5	0.52	0.08	0.33	0.06	0.26	0.04
0.5	0.51	0.09	0.34	0.07	0.25	0.04
0.52	0.49	0.1	0.33	0.08	0.25	0.05
0.49	0.48	0.09	0.32	0.08	0.24	0.04
0.49	0.5	0.08	0.33	0.07	0.24	0.04
0.49	0.51	0.09	0.34	0.08	0.25	0.04
0.51	0.49	0.09	0.34	0.08	0.25	0.04
0.5	0.5	0.1	0.35	0.09	0.25	0.05
0.51	0.48	0.08	0.34	0.07	0.24	0.04
0.47	0.49	0.1	0.34	0.09	0.23	0.05
0.5	0.48	0.09	0.33	0.08	0.24	0.04
0.5	0.49	0.08	0.34	0.08	0.25	0.04
0.53	0.51	0.09	0.37	0.08	0.27	0.05
0.5	0.49	0.09	0.36	0.08	0.25	0.05
0.5	0.5	0.09	0.36	0.08	0.25	0.05
0.51	0.5	0.09	0.37	0.08	0.26	0.04
0.5	0.49	0.09	0.35	0.07	0.24	0.04
0.5	0.51	0.09	0.37	0.09	0.25	0.05
0.49	0.52	0.08	0.36	0.07	0.25	0.04
0.51	0.5	0.1	0.36	0.1	0.25	0.05
0.51	0.5	0.08	0.37	0.07	0.26	0.04
0.49	0.49	0.09	0.35	0.09	0.24	0.04
0.52	0.48	0.08	0.37	0.07	0.25	0.04
0.46	0.47	0.08	0.33	0.08	0.22	0.04
0.48	0.5	0.08	0.37	0.07	0.24	0.04
0.51	0.5	0.09	0.39	0.09	0.26	0.05
0.49	0.5	0.09	0.37	0.09	0.24	0.04
0.48	0.49	0.11	0.37	0.1	0.24	0.05
0.5	0.48	0.09	0.37	0.09	0.24	0.05
0.49	0.49	0.08	0.39	0.08	0.24	0.04
0.46	0.47	0.08	0.35	0.08	0.21	0.04
0.49	0.51	0.09	0.39	0.09	0.25	0.04
0.48	0.49	0.09	0.39	0.09	0.24	0.04
0.51	0.5	0.08	0.4	0.08	0.26	0.04
0.5	0.5	0.07	0.4	0.07	0.25	0.04
0.49	0.49	0.09	0.38	0.09	0.24	0.04
0.48	0.48	0.07	0.38	0.07	0.23	0.03
0.47	0.5	0.08	0.39	0.08	0.24	0.04
0.48	0.48	0.07	0.39	0.07	0.23	0.04
0.51	0.52	0.09	0.44	0.09	0.27	0.04
0.48	0.5	0.09	0.4	0.08	0.24	0.04
0.5	0.5	0.09	0.41	0.09	0.25	0.04
0.54	0.51	0.09	0.44	0.09	0.28	0.05
0.52	0.52	0.1	0.44	0.1	0.27	0.05
0.52	0.51	0.1	0.44	0.1	0.26	0.05
0.48	0.48	0.08	0.41	0.08	0.23	0.04
0.49	0.5	0.11	0.43	0.11	0.24	0.05
0.51	0.53	0.09	0.47	0.09	0.27	0.05
0.52	0.53	0.11	0.47	0.11	0.28	0.06
0.49	0.5	0.09	0.45	0.09	0.24	0.04
0.5	0.49	0.09	0.44	0.09	0.24	0.04

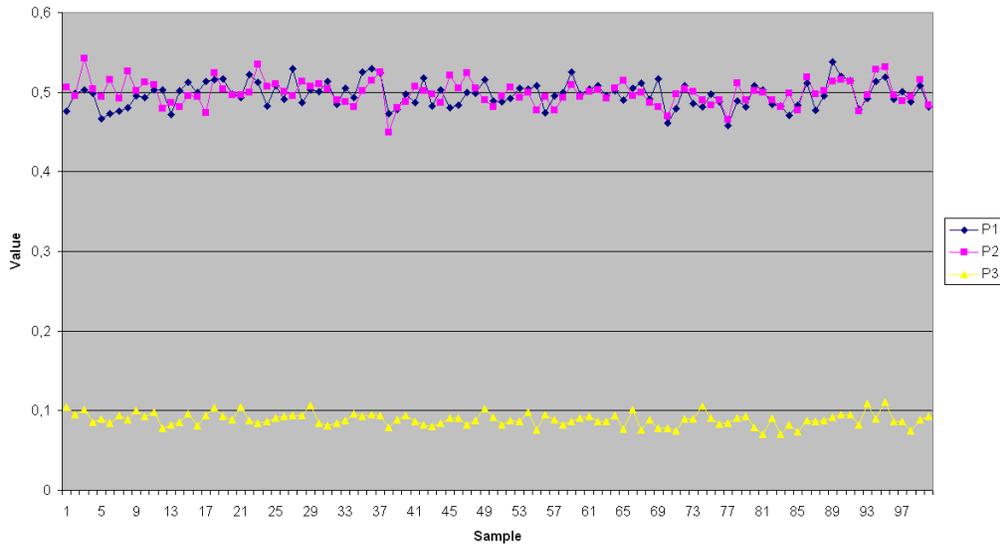
0.49	0.49	0.08	0.46	0.08	0.24	0.04
0.51	0.52	0.09	0.48	0.09	0.26	0.05
0.48	0.48	0.09	0.47	0.09	0.23	0.04

Dénominateur P1P2	Dénominateur P1P3	Res P1P2	Res P1P3
0.25	0.15	0.04	0.03
0.25	0.15	0.05	0.02
0.25	0.15	0.01	0.03
0.25	0.14	-0.01	0
0.25	0.14	-0.03	0.01
0.25	0.14	0.01	0.02
0.25	0.15	0.03	0.04
0.25	0.14	0.06	0.04
0.25	0.15	0.06	0.06
0.25	0.15	0.08	0.06
0.25	0.15	0.04	0.04
0.25	0.13	0.08	0.09
0.25	0.14	0.1	0.05
0.25	0.14	0.1	0.05
0.25	0.15	0.05	0.06
0.25	0.14	0.11	0.08
0.25	0.15	0.1	0.08
0.25	0.15	0.09	0.09
0.25	0.15	0.12	0.12
0.25	0.14	0.1	0.08
0.25	0.15	0.16	0.11
0.25	0.14	0.13	0.05
0.25	0.14	0.17	0.07
0.25	0.14	0.17	0.09
0.25	0.14	0.11	0.07
0.25	0.15	0.2	0.11
0.25	0.15	0.18	0.12
0.25	0.15	0.19	0.12
0.25	0.15	0.26	0.16
0.25	0.14	0.22	0.11
0.25	0.14	0.14	0.11
0.25	0.14	0.12	0.1
0.25	0.14	0.19	0.11
0.25	0.15	0.17	0.15
0.25	0.15	0.21	0.17
0.25	0.15	0.2	0.13
0.25	0.15	0.24	0.16
0.25	0.13	0.19	0.15
0.25	0.14	0.25	0.19
0.25	0.15	0.23	0.17
0.25	0.14	0.24	0.18
0.25	0.14	0.24	0.19
0.25	0.14	0.26	0.16

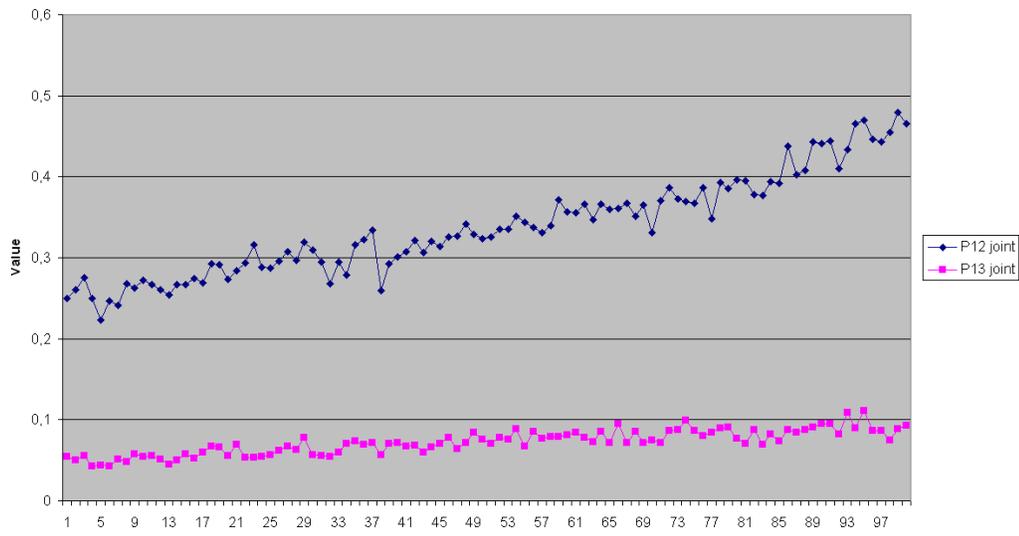
0.25	0.14	0.3	0.17
0.25	0.14	0.26	0.18
0.25	0.14	0.33	0.24
0.25	0.14	0.26	0.17
0.25	0.14	0.36	0.2
0.25	0.15	0.3	0.21
0.25	0.14	0.35	0.21
0.25	0.14	0.34	0.22
0.25	0.14	0.34	0.25
0.25	0.14	0.34	0.23
0.25	0.15	0.4	0.27
0.25	0.13	0.41	0.21
0.25	0.15	0.41	0.27
0.25	0.14	0.38	0.23
0.25	0.14	0.37	0.28
0.25	0.14	0.42	0.24
0.25	0.14	0.44	0.25
0.25	0.15	0.41	0.26
0.25	0.14	0.44	0.24
0.25	0.14	0.41	0.22
0.25	0.15	0.45	0.26
0.25	0.13	0.43	0.26
0.25	0.15	0.44	0.29
0.25	0.13	0.45	0.24
0.25	0.14	0.45	0.29
0.25	0.13	0.46	0.24
0.25	0.13	0.46	0.29
0.25	0.13	0.53	0.27
0.25	0.14	0.52	0.29
0.25	0.14	0.52	0.31
0.25	0.15	0.53	0.31
0.25	0.14	0.51	0.29
0.25	0.14	0.59	0.29
0.25	0.14	0.54	0.33
0.25	0.14	0.57	0.32
0.25	0.15	0.6	0.32
0.25	0.13	0.56	0.27
0.25	0.13	0.57	0.27
0.25	0.14	0.56	0.31
0.25	0.13	0.58	0.28
0.25	0.14	0.64	0.32
0.25	0.13	0.65	0.29
0.25	0.14	0.69	0.3
0.25	0.14	0.66	0.31
0.25	0.14	0.64	0.31
0.25	0.14	0.67	0.29
0.25	0.15	0.69	0.31
0.25	0.15	0.72	0.31
0.25	0.14	0.73	0.31
0.25	0.16	0.76	0.36
0.25	0.14	0.77	0.31
0.25	0.16	0.78	0.34
0.25	0.14	0.81	0.31
0.25	0.14	0.79	0.31

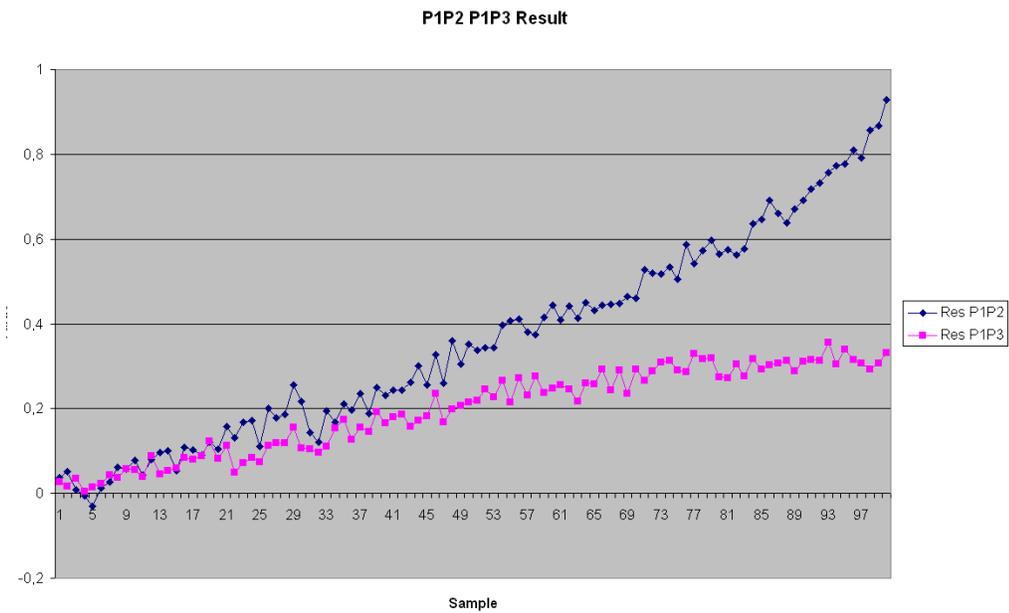
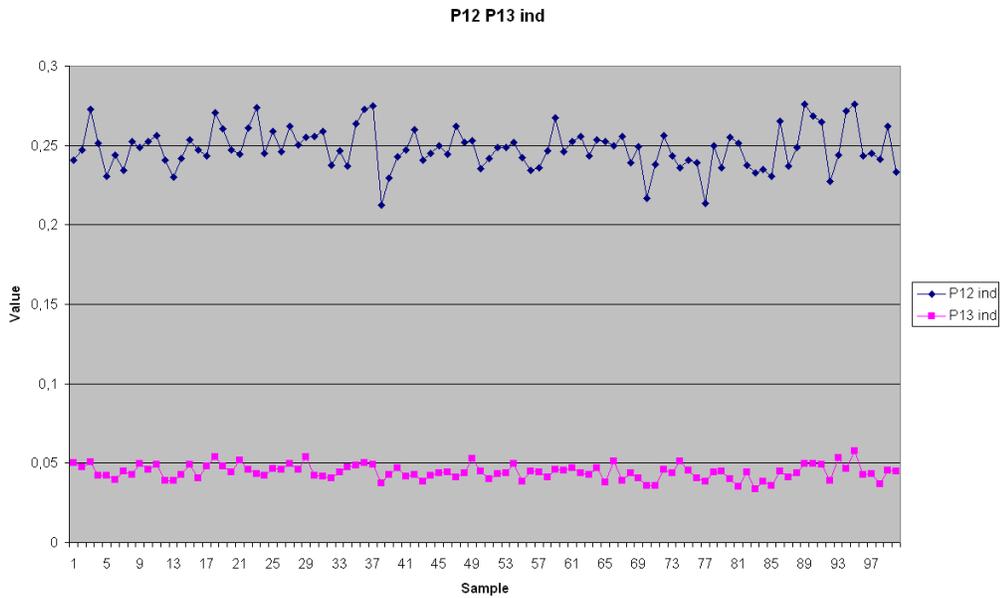
0.25	0.13	0.86	0.29
0.25	0.14	0.87	0.31
0.25	0.15	0.93	0.33

P1 P2 P3



P12 P13 joint





Cette dernière figure permet de faire le lien direct entre la corrélation linéaire (en abscisses) et la corrélation de défaut(en ordonnées).

Code lié à l'algorithme III.5

```
library(mnormt)

## Paramètres

#nombre d'émetteurs
m=1000

#Perte
for (x in 100000:300000000){

#probabilités marginales
p=seq(0.01,0.98,length=m)

#perte issue du défaut
perte=seq(60000,100,length=m)

#corrélations
a=array(seq(0.0001,0.001,length=m),c(m,m,1))
b=array(c(1),c(1,m,1))
for (j in 1:m){
  for (k in 1:m){
    b[j]=b[j]-a[k,j,1]*a[k,j,1]
  }
  b[j]=sqrt(b[j])
}

##Première partie de l'algorithme

#Génération de Z variable aléatoire gaussienne
Z=rnorm(m,0,1)

#Calcul des p_k(Z)
q=array(c(NA),c(1,m,1))
for (k in 1:m){
  q[k]=pnorm((qnorm(p[k])+a[k,,1]**Z)/b[k])
}
#Calcul de la probabilité conditionnelle
E=0
Var=0
for (k in 1:m){
  E=E+p[k]*perte[k]
  Var=Var+p[k]*perte[k]*perte[k]*(1-p[k])
}
P=1-pnorm((x-E)/sqrt(Var))

#Calcul du max
M=P*exp(-Z**Z/2)

##Deuxième partie de l'algorithme

#Génération de Z
```

```

Z=rnorm(m,M,1)

#Calcul des p_k(Z)
q=array(c(NA),c(1,m,1))
for (k in 1:m){
  q[k]=pnorm((qnorm(p[k])+a[k,,1]**Z)/b[k])
}

#Calcul de theta

# lere etape calcul de pk theta
calcul_sum=function(theta, m){
  result = 0
  for (k in 1:m) {
    num = (q[k] * exp(theta * perte[k]))
    den = (1 + q[k] * (exp(theta * perte[k]) - 1))

    if ((num == -Inf) || (num == Inf)) {
      result = result + 1 * perte[k]
    } else {
      result = result + num / den * perte[k]
    }
  }
  return(result - x)
}

calcul_sum_deriv=function(theta, m){
  result = 0
  for (k in 1:m) {
    #print("Qk"); print(q[k])
    #print("Theta"); print(theta)
    #print("Perte"); print(perte[k])
    num = q[k] * exp(theta * perte[k]) * (1 - q[k] * perte[k] * exp(theta * perte[k]
)))
    den = (1 + q[k] * (exp(theta * perte[k]) - 1)) * (1 + q[k] * (exp(theta * perte
[k]) - 1))

    if ((num == -Inf) || (num == Inf)) {
      result = result + 1 * perte[k]
    } else {
      result = result + num / den * perte[k]
    }
    #print("Num"); print(num)
    #print("Den"); print(den)
  }
  return(result - x)
}

newton=function(x0, numstp, eps){
  numfin = numstp
  small = 1.0*10^(-8)
  istop = 0
  while(istop == 0) {
    x1=x0 - calcul_sum(x0, m) / calcul_sum_deriv(x0, m)
    #print("X1"); print(x1)
  }
}

```

```

        check = abs(x0-x1) / abs(x0 + small)

        #print("Check"); print(check)
        #print("Eps"); print(eps)
        if (check < eps) { istop=1 }
        x0=x1
    }
    list(x1=x1, check=check)
    return(x1)
}
Theta=newton(0, 42, 0.01)

print("Theta"); print(Theta)
#print("Perte"); print(x)

#Création des variables Y
Y=array(1,c(1,m,1))
for (k in 1:m){
    num = q[k]*exp(Theta*perte[k])
    den = (1+q[k]*(exp(Theta*perte[k])-1))
    # print("k"); print(k)
    #print("Num"); print(num)
    #print("Den"); print(den)
    # print("Rapport"); print(num / den)
    if ((num / den > 1) || (num == -Inf) || (num == Inf) || (den == -Inf) || (den ==
Inf)) {
        Y[k] = 1
    } else {
        Y[k]=rbinom(1,1, num / den)
    }
}

#Perte totale
L=0
k = 1
while ((k < m) && (L < 2^30)) {
    # print("k"); print(k)
    # print("L"); print(L)
    # print("Yk"); print(Y[k])
    #print("Pertek"); print(perte[k])
    L=L+Y[k]*perte[k]
    k = k + 1
}

#Calcul de Psi
Psi=0
for (k in 1:m){
    Psi=Psi+log(1+q[k]*(exp(Theta*perte[k])-1))
}

#Estimateur
M=array(M,c(1,m,1))

```

```
print("L"); print(L)
Pb=40
if (L > 2^30){
  Pb=1
} else if ( L > x ){
  Pb=exp(-Theta*L+Psi)*exp(-M%*%Z+M%*%M/2)
} else if ( L <= x) {
  Pb=0
}
print("Pb"); print(Pb)
}
```

Bibliographie

-Nouvelles exigences réglementaires : besoins économétriques

Philippe Vité

-IRC : secteurs de rating et secteurs de spread

Philippe Vité

-Moteur de diffusion des données de marché pour le calcul de la VaR

Philippe Vité

-Importance Sampling for Portfolio Credit Risk

P.Glasserman and Jingyi Li, Management Science, vol 51, 1643-1656, 2005

-Probability : theory and examples

R.Durrett, Duxbury Press, 2 edition (August 30, 1995)

-Probability with martingales

D.Williams, Cambridge University Press (February 22, 1991)

-Monte Carlo Methods in Financial Engineering

P.Glasserman, Springer, 2003

-Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance

B.Lapeyre, D.Lamberton, Ellipses, 1997

-Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov

P.Brémaud, Springer, 2009