

ENS de Cachan
Rapport de stage de Licence 3
février - juin 2010

Maître de stage : Jean-Michel Ghidaglia (CMLA)
Encadrants juniors : Daniel Chauveheid - Saad Benjelloun (CMLA)

Approximation lagrangienne d'écoulements de fluides parfaits selon Von Neumann et Richtmyer

Matthias Bertin - Marjolaine Posson

matthias.bertin@ens-cachan.fr
marjolaine.posson@ens-cachan.fr

Table des matières

0.1	Notations importantes :	3
I	Etude de la méthode de Von Neumann et Richtmyer	4
1	Principe	5
2	Détails de la méthode	6
2.1	Données, variables	6
2.2	Équations de base	6
2.3	La pseudo-viscosité q	7
2.4	Stabilité des équations différentielles	8
3	Discrétisation (différences finies)	10
3.1	Équations aux différences finies	10
3.2	Stabilité des équations aux différences finies	11
4	Application	12
4.1	Mise en évidence de la nécessité de la pseudo-viscosité	12
4.2	Résultats	13
II	Application de la méthode VNR aux fluides réels :	14
5	Fluides régis par l'équation de Van der Waals	16
5.1	Rappel sur l'équation de Van der Waals :	16
5.2	Résultats :	17
6	“Stiffened gas equation” :	19
6.1	Rappels sur cette équation :	19
6.2	Résultats :	20
6.2.1	Première utilisation : “Stiffened gas equation”, $\pi \gg p$	20
6.2.2	Deuxième utilisation : “équation des gaz parfaits modifiée”, $\pi \sim p$	21
III	Recherche	23
7	Autre point de vue sur la pseudo-viscosité : viscosité et relation de Rankine-Hugoniot	24
8	Recherche d'une solution stable...	27
8.1	Stabilité linéaire	27
8.1.1	Quelques résultats préliminaires	27
8.1.2	Loi de Hooke [1]	27
8.1.3	Un résultat de G.N. White	28

IV Annexes	30
A Traduction de l'article de J. Von Neumann et R.D. Richtmyer	31
B Code modifié	41

Résumé

Notre stage a consisté en l'étude de la méthode de Von Neumann et Richtmyer pour la résolution des équations de l'hydrodynamique en présence de chocs.

En effet, les équations des mouvements fluides sont compliquées par la présence de chocs. Ces derniers peuvent être considérés mathématiquement comme des surfaces mobiles où les quantités telles que la densité, la température, l'entropie présentent des discontinuités. Les conditions aux limites nécessaires à la résolution du problème - données par les relations de Rankine-Hugoniot - sont donc complexes ; du fait notamment du mouvement inconnu des chocs vis-à-vis du maillage utilisé pour la résolution numérique. Le problème est, de plus, non-linéaire.

Nous avons donc étudié la méthode proposée par Von Neumann et Richtmyer en 1950 pour résoudre ce problème, méthode qui est encore utilisée à l'heure actuelle, et que nous présenterons en détail dans notre première partie. Notre travail a tout d'abord consisté en la traduction intégrale et la compréhension de cet article. Nous nous sommes ensuite intéressés à un code fourni par notre maître de stage, J.M. Ghidaglia, lequel code résout numériquement le problème dans le cas d'un fluide régi par les équations d'Euler concernant les gaz parfaits. Nous avons ensuite proposé une modification de ce code, le rendant applicable à n'importe quelle équation d'état de fluide. Nous l'avons ensuite testé, et nous développerons cette partie de notre travail dans un deuxième temps. La fin de notre stage a été rythmée par la recherche d'un exemple dans lequel nous serions en mesure de prouver théoriquement la stabilité de la méthode de Von Neumann et Richtmyer, ce que nous traiterons dans notre troisième partie.

Remerciements

Nous remercions tout particulièrement notre maître de stage, J.M. Ghidaglia, pour la disponibilité dont il a fait preuve malgré ses nombreuses responsabilités, ainsi que pour tous ses conseils avisés. Nous le remercions également pour la patience dont il a su faire preuve à notre égard, étant donné que nous étions novices dans la recherche!

Nous remercions Saad Benjelloun et Daniel Chauveheid pour leur aide, notamment en ce qui concerne le débogage du code.

Nous remercions le LRC et ses chercheurs pour leur accueil, lequel nous a permis de prendre part à une véritable expérience de recherche.

Introduction

L'intégralité de notre travail fait suite à un article de J.Von Neumann et R.D. Richtmyer, paru le 26 septembre 1949, intitulé : *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*, article fondamental pour l'histoire de la mécanique des fluides numérique. Cet article décrit une méthode (dite de Von Neumann et Richtmyer) pour la résolution des équations de l'hydrodynamique des chocs, et c'est cette méthode qui a fait l'objet de notre étude durant notre stage.

Comme il s'agissait de notre tout premier travail de recherche, nous avons convenu avec notre maître de stage de traduire intégralement l'article de l'anglais au français. Ceci dans le but d'arriver à une parfaite compréhension de l'article, tout en s'exerçant à l'écriture en \LaTeX et en effectuant une première approche du langage de la recherche mathématique en anglais. Nous avons alors pu comprendre les motivations de cette méthode : la présence de chocs complique en effet les équations des mouvements fluides, et par conséquent, complique également toute méthode (ou du moins toute méthode antérieure à celle de Von Neumann et Richtmyer) d'approximation pas à pas d'une solution de ces équations. L'idée de Von Neumann et Richtmyer est d'introduire un terme de pression additionnel (et fictif, car introduit pour des raisons d'ordre purement numérique) : ainsi, les équations se simplifient remarquablement bien.

À partir de là, nous avons pu comprendre la progression de l'article, qui petit à petit présente une véritable méthode d'approximation numérique (celle dont notre stage fait l'objet d'étude). Après avoir introduit le terme de pression supplémentaire q , nous obtenons un nouveau système d'équations différentielles des mouvements fluides, puis, en discrétisant (pour pouvoir faire l'approximation numérique) un nouveau système d'équations aux différences finies, nous obtenons enfin un algorithme. Tout ceci est complété par un exemple : le choc plan, et par l'étude des stabilités des équations différentielles et des équations aux différences finies.

Une fois l'article compris et traduit, il nous fallait appliquer la méthode que nous avons assimilée. C'est donc par un code de 80 lignes (le peu de lignes témoigne de l'ingéniosité tout comme de la simplicité de la méthode) mis en place par F. De Vuyst et J.M. Ghidaglia (sous le logiciel *Scilab*), que s'est poursuivie notre étude.

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence la nécessité de la pseudo-viscosité introduite par Von Neumann et Richtmyer : nous avons fait tourner le code avec et sans pseudo-viscosité, pour obtenir des résultats incohérents (voire un plantage du code) sans pseudo-viscosité.

L'article, comme le code, ne s'appliquait qu'aux gaz parfaits. Mais la méthode décrite pouvait naturellement se généraliser à tout type de fluides, en changeant tout simplement l'équation d'état du fluide utilisée : il nous a donc semblé intéressant de modifier le code pour pouvoir l'appliquer à n'importe quel type de fluide, et plus précisément à n'importe quelle équation d'état. Ce fut la suite de notre travail, et nous avons pu mettre en place un nouveau code (en utilisant, entre autres, la méthode de Newton), pouvant s'appliquer à n'importe quelle équation d'état différentielle du type : $EOS(e, p, \tau) = 0$.

Une fois le code mis en place, nous avons évidemment commencé par vérifier que l'on retrouvait bien les mêmes résultats pour l'équation d'état du gaz parfait. Ensuite, il nous a semblé intéressant de l'appliquer aux gaz réels : à commencer par les fluides réels par l'équation de Van der Waals, puis pour un autre

modèle : “**Stiffened gas equation**”. Nous avons alors obtenu de bons résultats, cohérents lorsque les modèles se rejoignent (par exemple, on retrouve bien les résultats pour le gaz parfait (avec $\gamma = \frac{5}{3}$) lorsque $a = 0$ et $b = 0$ dans l’équation de Van der Waals).

Afin d’expliquer la forme de q proposée par VNR, nous nous sommes intéressés à un autre point de vue : la pseudo-viscosité et les relations de Rankine-Hugoniot. En effet, on peut retrouver la nécessité d’introduire q à partir des relations de Rankine-Hugoniot.

Et enfin, pour la fin de notre stage, nous avons étudié un peu plus la stabilité du schéma, qui n’a pas encore été prouvée théoriquement : nous cherchions un exemple pour lequel nous serions à même de prouver la stabilité pour le schéma non-linéaire.

0.1 Notations importantes :

Dans la suite de ce rapport nous manipulerons les quantités suivantes :

- x la coordonnée lagrangienne
- $X(x, t)$ la coordonnée eulérienne
- $p(x, t)$ la pression du fluide
- $q(x, t)$ la pseudo-viscosité
- $U(x, t)$ la vitesse du fluide
- $V(x, t)$ le volume spécifique
- $\rho(x, t)$ la densité
- $\mathcal{E}(x, t)$ l’énergie interne par unité de masse
- c_s la vitesse du son
- T la température
- $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$ la dérivée lagrangienne de U par rapport au temps.

Ces notations seront parfois précisées plus en détail dans la suite du rapport.

Première partie

Etude de la méthode de Von Neumann
et Richtmyer

Chapitre 1

Principe

Nous décrivons ici la première partie de notre travail qui a consisté en la compréhension de l'article de Von Neumann et Richtmyer [2], que nous avons traduit intégralement en français (*cf* annexe A).

La méthode de Von Neumann et Richtmyer décrite dans l'article est utilisée pour résoudre les équations de l'hydrodynamique en présence de chocs.

La motivation principale vient du fait que les méthodes utilisées pour approcher pas à pas une solution des équations des mouvements fluides sont en général sérieusement compliquées par la présence de chocs. On peut interpréter mathématiquement les chocs comme des surfaces pour lesquelles la densité, la vitesse du fluide, la température, etc. ont des discontinuités, ce qui entraîne des conditions aux limites dont l'application est compliquée, une non-linéarité du problème, et, comme le mouvement des surfaces est lui aussi régi par des équations différentielles, une méthode de suivi de chocs nécessiterait de longs calculs à chaque pas et à chaque instant du calcul global.

L'idée de base est d'introduire un terme de pression fictif et additionnel dans les équations de l'hydrodynamique (que nous présenterons plus tard) qui va simplifier les procédures d'approximation : ce terme confère aux chocs une épaisseur comparable à l'espacement des points du réseau, ce qui fait que les équations aux différences finies tirées des équations différentielles de base peuvent être utilisées pour l'intégralité du calcul.

L'article présente donc la méthode de capture de chocs ainsi mise en place, mais aussi la manière dont le passage des équations différentielles aux équations aux différences finies peut alors être réalisé, ainsi que la stabilité mathématique de ces équations.

Notons au passage que l'article a été écrit en 1949, mais qu'il décrit une méthode fondamentale pour toute la suite de la mécanique des fluides, ce jusqu'à aujourd'hui.

Chapitre 2

Détails de la méthode

2.1 Données, variables

Dans tout l'article, on considère le mouvement d'un fluide à une dimension.

On note :

- x la coordonnée Lagrangienne
- $X(x, t)$ la coordonnée Eulérienne (qui donne la position au temps t d'un élément de fluide initialement à la position x)
- $\rho_0(x)$ la densité initiale

On peut alors écrire :

- $V(x, t) = \frac{1}{\rho_0(x)} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}$ le volume spécifique du fluide
- $U(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t}$ la vitesse du fluide

Et on appellera :

- $p = p(x, t)$ la pression ordinaire (ou statique) du fluide
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$ l'énergie interne par unité de masse

L'article que nous avons étudié traite uniquement des gaz parfaits, mais peut se généraliser à d'autres fluides (nous y reviendrons dans la deuxième partie de notre travail). Aussi, dans le cas des gaz parfaits, nous pourrions avoir à utiliser la constante¹ γ que l'on prend strictement supérieure à 1.

2.2 Équations de base

On considère alors les équations suivantes :

Équation de conservation de la quantité du mouvement :

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.1)$$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

Équation de conservation de la masse :

$$\rho_0 \frac{dV}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.3)$$

Équation d'état :

$$\mathcal{E} = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (2.4)$$

¹ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ avec C_p et C_v les capacités thermiques du fluide respectivement à pression et volume constant.

La quatrième équation est l'équation d'état, choisie ici dans le cas d'un gaz parfait. Il nous suffirait de changer uniquement cette équation pour étudier le cas d'un gaz réel.

2.3 La pseudo-viscosité q

On introduit, pour des raisons purement mathématiques, le terme de pseudo-viscosité q , terme additionnel de pression. Les équations de base deviennent donc :

Équation de conservation de la quantité du mouvement :

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + q), \quad (2.5)$$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + (p + q) \frac{dV}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

Équation de conservation :

$$\rho_0 \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.7)$$

Équation d'état du gaz :

$$\mathcal{E} = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (2.8)$$

q peut s'écrire sous la forme de n'importe quelle fonction pratique de p , V , etc. et de leurs dérivées, sous réserve que les exigences suivantes soient réalisées :

- les équations (2.5), (2.6), et (2.7) doivent posséder des solutions sans discontinuité
- l'épaisseur des couches de choc doit être en tous points, du même ordre de grandeur que la longueur de l'intervalle Δx utilisé dans le calcul numérique (indépendamment de la force du choc et de l'état du matériau où a lieu le choc)
- l'effet du terme contenant q dans (2.5) et (2.6) doit être négligeable en dehors des couches du choc
- les équations de Hugoniot doivent rester valables lorsque toutes les autres dimensions caractéristiques de l'écoulement sont grandes par rapport à l'épaisseur du choc.

On peut montrer que l'expression (2.9) vérifie toutes ces conditions :

$$q = -\frac{(\rho_0 c \Delta x)^2}{V} \frac{dV}{dt} \left| \frac{dV}{dt} \right| \quad (2.9)$$

avec c une constante adimensionnée proche de l'unité.

Le mécanisme dissipatif est essentiellement un phénomène de viscosité non linéaire, ce qui se voit mieux lorsqu'on écrit (2.9) ainsi (en dimension 1) grâce à l'équation (2.7) :

$$q = -\frac{(c \Delta x)^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \quad (2.10)$$

2.4 Stabilité des équations différentielles

Pour étudier la stabilité des équations différentielles, on considère une petite perturbation δU , δV , etc. que l'on superpose à la solution désirée $U(x, t)$, $V(x, t)$, etc. et on veut savoir si ces perturbations grandissent avec le temps.

Grâce aux équations de base, on obtient les équations du premier ordre :

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \delta U = - \frac{\partial}{\partial x} (\delta p + \delta q), \quad (2.11)$$

$$\frac{dV}{dt} [\gamma \delta p + (\gamma - 1) \delta q] + [\gamma p + (\gamma - 1) q] \frac{d}{dt} \delta V + V \frac{d}{dt} \delta p + \frac{dp}{dt} \delta V = 0, \quad (2.12)$$

$$\delta q = \frac{(c\Delta x)^2}{V^2} \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \delta V - 2 \frac{(c\Delta x)^2}{V} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial}{\partial x} \delta U, \quad (2.13)$$

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \delta V = \frac{\partial}{\partial x} \delta U. \quad (2.14)$$

Celles-ci forment un ensemble d'équations différentielles linéaires simultanées pour δU , δV , δp , δq , dont les coefficients dépendent de la solution désirée U , V , p , q .

Nous allons considérer des perturbations rapidement variables, de la forme :

$$\delta U = \delta U_0 e^{ikx + \alpha t}, \delta V = \delta V_0 e^{ikx + \alpha t}, \text{ etc.}, \quad (2.15)$$

où δU_0 , δV_0 , δp_0 , δq_0 , k , et α sont constants et k est réel.

En reprenant les équations (2.11) à (2.14), on obtient un système de quatre équations linéaires homogènes simultanées en δU_0 , δV_0 , δp_0 , δq_0 . Par annulation du déterminant de ce système, on peut trouver une équation reliant k et α . Puis, par certaines approximations propres aux régions de chocs et aux régions normales en ce qui concerne les termes de dissipation, on a finalement :

pour les régions de choc :

$$\alpha = -2 \frac{(kc\Delta x)^2}{\rho_0 V} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \quad (2.16)$$

pour les régions normales :

$$\alpha^2 = - \frac{k^2}{\rho_0 V} \frac{\gamma p}{\rho_0}. \quad (2.17)$$

On remarque que les petites perturbations sont amorties dans la couche du choc, mais se propagent sans croissance ni affaiblissement dans les régions normales. Ce résultat correspond bien à la réalité physique.

En identifiant les termes des équations d'ordre 1 dans l'équation trouvée par le déterminant, on trouve finalement :

pour les régions de choc :

$$\frac{d}{dt}\delta U \approx \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta U, \quad (2.18)$$

où

$$\sigma = \frac{2(c\Delta x)^2}{V\rho_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|;$$

pour les régions normales :

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta U \approx c_{s0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta U, \quad (2.19)$$

où

$$c_{s0} = \frac{\gamma p}{V\rho_0^2}.$$

Ainsi notre système de perturbations se comporte comme une équation de diffusion dans les couches de chocs, et comme une équation des ondes partout ailleurs.

Maintenant que nous avons expliqué la méthode plus en détail, nous pouvons passer à la description de l'approximation numérique par discrétisation.

Chapitre 3

Discrétisation (différences finies)

3.1 Équations aux différences finies

On considère les points d'un réseau espacés de Δx et Δt , notés x_l et t^n ($l = 0, 1, 3, \dots, L; n = 0, 1, 2, \dots$). Parfois, nous utiliserons aussi des points intermédiaires du type $x_{l+\frac{1}{2}} = \frac{x_{l+1} + x_l}{2}$, ainsi que des notations du type $U_{l+\frac{1}{2}}^n = U(x_{l+\frac{1}{2}}, t^n)$ pour éclaircir notre propos.

Les équations aux différences finies correspondantes sont alors :

$$\rho_0 \frac{U_l^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = - \frac{p_{l+\frac{1}{2}}^n + q_{l+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_{l-\frac{1}{2}}^n - q_{l-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

$$\rho_0 \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \frac{U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (3.2)$$

$$q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = - \frac{2(c\Delta x)^2}{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{l+\frac{1}{2}}^n} \frac{(U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}}) |U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}}|}{(\Delta x)^2}, \quad (3.3)$$

et

$$\left[\gamma \frac{p_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{l+\frac{1}{2}}^n}{2} + (\gamma - 1) q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{l+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{p_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = 0. \quad (3.4)$$

Pour la solution numérique, nous supposons que toutes les quantités sont connues pour un indice inférieur ou égal à n . Nous calculons $U_l^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (3.1) pour chaque l ; $V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1}$ à partir de (3.2) pour chaque l ; $q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (3.3) pour chaque l ; et $V_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (3.4) pour chaque l ; ceci constitue un pas du schéma. Enfin, notons que des conditions aux limites sont nécessaires, par exemple (paroi rigide aux extrémités du tube (tube à choc de Sod)) : $U_0^{n+\frac{1}{2}} \equiv 0$, $U_L^{n+\frac{1}{2}} \equiv 0$.

3.2 Stabilité des équations aux différences finies

Ici encore, on va considérer une petite perturbation δU , δV , etc. qu'on ajoute à la solution homogène. D'après les équations (2.18) et (2.19) du chapitre précédent, on s'attend à trouver des termes dominants de la forme suivante :

- pour les régions de chocs :

$$\frac{\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} - \delta U_l^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \approx \sigma \frac{\delta U_{l+1}^{n-\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_{l-1}^{n-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} \quad (3.5)$$

- pour les régions normales :

$$\frac{\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_l^{n-\frac{3}{2}}}{(\Delta t)^2} \approx c_{s0}^2 \frac{\delta U_{l+1}^{n-\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_{l-1}^{n-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.6)$$

Ce que l'on peut effectivement vérifier par de longs calculs.

On prend de nouveau des équations de la forme :

$$\delta U = \delta U_0 e^{ikx + \alpha t}, \text{ etc...} \quad (3.7)$$

de sorte que :

$$\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} = \delta U_0 \zeta^l \xi^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

avec :

$$\zeta = e^{ik\Delta x}, \quad \xi = e^{\alpha\Delta t}. \quad (3.9)$$

Pour qu'il y ait stabilité, il faut que $|\xi| \leq 1$, pour tout réel k . En partant des équations (3.5) et (3.6), on peut ramener cette condition à :

- pour les régions normales :

$$L = \frac{c_{s0}\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (3.10)$$

- pour les régions de choc :

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\sigma}. \quad (3.11)$$

L'article présente également un exemple dans le cas du choc plan, que nous n'avons pas jugé utile de détailler ici (*cf* annexe A). Notons cependant que cet exemple est très pratique pour comprendre comment interpréter les résultats de stabilité pour les équations aux différences finies : la condition finale de stabilité pour la zone de choc dans ce cas s'exprime finalement sous la forme d'un choix de $L_f = \frac{c_s\Delta t}{\Delta x}$ tel que $L_f \leq \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2c}$ (on peut prendre par exemple $c = 1$).

Chapitre 4

Application

Cette partie traite brièvement de l'application numérique qui découle directement de la méthode de Von Neumann et Richtmyer. Elle traite de l'étude d'un code de 80 lignes mis en place par F. De Vuyst et J.M. Ghidaglia.

4.1 Mise en évidence de la nécessité de la pseudo-viscosité

Nous avons cherché à montrer expérimentalement que la pseudo-viscosité était indispensable à la résolution des équations de l'hydrodynamique en présence de chocs. En effet, nous avons exécuté le code avec la pseudo-viscosité et sans la pseudo-viscosité. En absence de pseudo-viscosité, le code finit par ne plus fonctionner. Nous avons donc cherché à comprendre ce qui se passait, et nous nous sommes donc intéressés au code pas après pas. Le code ne fonctionne plus à partir de la 208^{ème} itération. Les figures Fig. 4.1 et Fig. 4.2 mettent en évidence les différences entre les deux codes avec et sans pseudo-viscosité. Des pics apparaissent, et à partir de la 208^{ème} itération le code s'arrête.

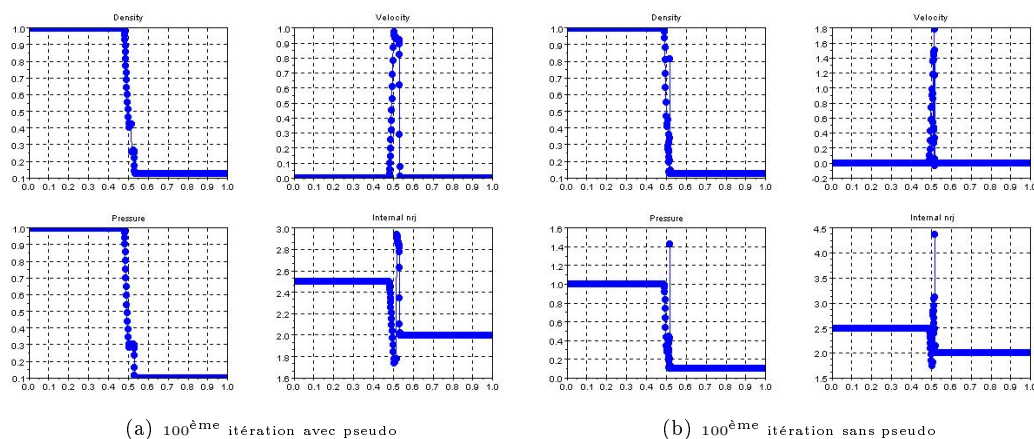
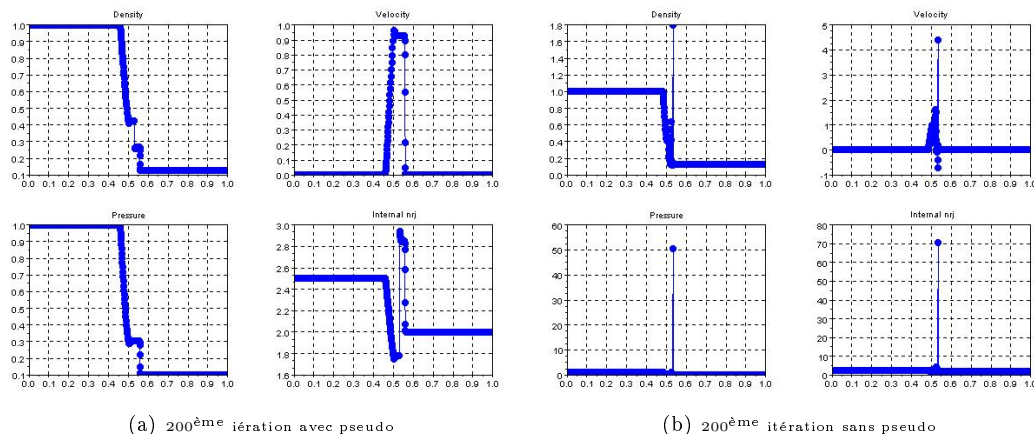


FIG. 4.1 – Résultats avec et sans pseudo à la 100^{ème} itération

Interprétation physique : [3] Le schéma aux différences finies décrit grossièrement le mouvement d'un certain modèle de fluide. Dans ce modèle, la masse est concentrée dans de nombreuses fines couches parallèles, l'espace entre ces couches étant occupé par un fluide compressible léger qui joue le rôle d'élément élastique. Quand le choc se produit, les couches sont mises en mouvement, comme les molécules d'un gaz (pour un problème 1D). R. Peierls (dans un travail non publié) explique que l'on peut faire l'analogie entre ces oscillations et l'agitation thermique des molécules, et que ces oscillations représentent l'énergie interne qui doit apparaître, conformément aux relations de Rankine-Hugoniot (détails dans la troisième partie de ce rapport). Le but de la pseudo-viscosité est donc de convertir l'énergie de ces oscillations en véritable énergie interne.

FIG. 4.2 – Résultats avec et sans pseudo à la 200^{ème} itération

4.2 Résultats

Nous présentons à la figure Fig. 4.3 le résultat de la méthode à partir du code de F. De Vuyst et J.M. Ghidaglia, pour l'équation des gaz parfaits, dans le cas du tube à choc de Sod : c'est un problème à une dimension dont les états initiaux gauches et droits sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \rho_g \\ p_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \rho_d \\ p_d \\ u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

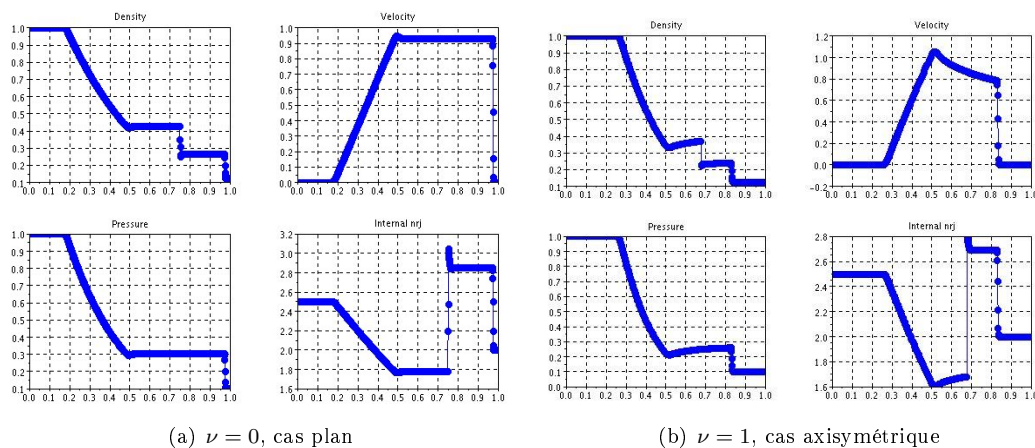


FIG. 4.3 – Premiers résultats

Nous nous intéresserons dans la partie suivante à l'application de la méthode dans le cas d'autres équations d'état dans le cas plan ($\nu = 0$).

Deuxième partie

Application de la méthode VNR aux
fluides réels :

Présentation de notre travail

Nous nous intéressons dans cette partie à la résolution des équations de l'hydrodynamique dans le cas des gaz réels, non régis par l'équation des gaz parfaits (seulement dans le cas plan). Pour ce faire, nous avons modifié le code de F. De Vuyst et J.M. Ghidaglia, de manière à le rendre utilisable avec n'importe quelle équation d'état. Nous avons donc eu à coder une fonction `newton.sci` (cf annexe B), qui résout $f(p_j^{n+1}) = 0$ où p_j^{n+1} représente la pression au point (x_j, t^{n+1}) du maillage et où f est donnée par (4.1) :

$$f(p_j^{n+1}) = P\left(\frac{1}{V_j^{n+1}}, e_j^n - \left(\frac{p_j^n + p_j^{n+1}}{2} + q_j^n\right)(V_j^{n+1} - V_j^n), p_j^{n+1}\right) \quad (4.1)$$

où $P(\rho, e, p)$ est l'équation d'état qui lie la densité, l'énergie interne et la pression entre elles.

Nous avons préalablement testé le nouveau code (cf annexe B également) sur l'équation des gaz parfaits afin de vérifier le bon fonctionnement de notre code.

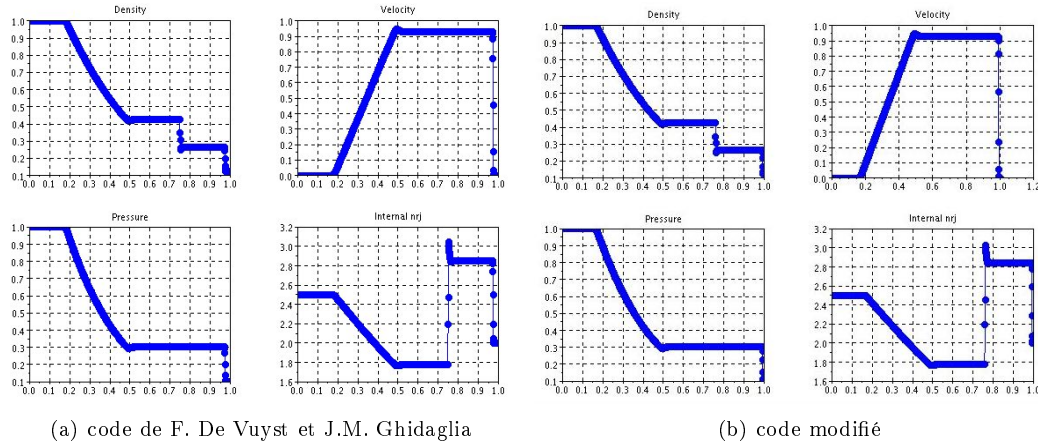


FIG. 4.4 – Comparaison des résultats obtenus par deux codes différents (le code de F. De Vuyst et J.M. Ghidaglia et notre code modifié).

Le résultat est satisfaisant, ce qui est sans surprise, compte-tenu du fait que la méthode de newton converge en une itération pour une fonction linéaire.

Chapitre 5

Fluides régis par l'équation de Van der Waals

5.1 Rappel sur l'équation de Van der Waals :

L'équation de *Van der Waals* est une équation d'état pour un fluide composé de particules qui ont une taille non nulle; de plus, on ne néglige pas l'interaction (telle que la force de van der waals) entre deux particules du fluide. Cette équation est basée sur l'équation d'état des gaz parfaits, et approche le comportement des fluides réels, en prenant en compte la taille des particules et les interactions entre elles. L'équation est de la forme (5.1).

$$\left(p + \frac{a}{\tau^2}\right)(\tau - b) = RT \quad (5.1)$$

où p est la pression du fluide

τ est le volume occupé par les particules de fluide

R est la constante universelle des gaz ($R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$)

T est la température du fluide

a est une mesure de l'interaction entre les particules, appelée pression de cohésion.¹

b est covolume pour une mole de fluide, il est proportionnel au volume propre d'une particule.

Pour mener à bien notre étude nous avons été amenés à considérer l'énergie interne du fluide \mathcal{E} , qui est donnée par (5.2) :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{\tau} \quad (5.2)$$

d'où :

$$\mathcal{E} - \frac{3}{2}\left(p + \frac{a}{\tau^2}\right)(\tau - b) + \frac{a}{\tau} = 0. \quad (5.3)$$

Nous avons également besoin de la vitesse du son pour un fluide de *Van der Waals*. Nous la calculons à l'aide des identités thermodynamiques suivantes :

$$TdS = d\mathcal{E} + pd\tau \quad (5.4)$$

et

$$dp = c_s^2 d\rho + \beta dS \quad (5.5)$$

où S représente l'entropie du système

T la température

\mathcal{E} l'énergie interne

p la pression du fluide

$\rho = \frac{1}{\tau}$

β est un terme que nous ne chercherons pas à déterminer car nous nous plaçons à entropie constante.

¹Remarque : $\frac{a}{\tau^2}$ représente la pression interne.

En effet, à S constante, on obtient :

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{\tau^2 dp}{d\tau} \quad (5.6)$$

et

$$d\mathcal{E} = -pd\tau. \quad (5.7)$$

On obtient ainsi en dérivant (5.3) :

$$c_s = \sqrt{\frac{2}{3(\tau - b)} \left(a + \frac{3ab}{\tau} + \frac{5\tau^2 p}{2} \right)}. \quad (5.8)$$

5.2 Résultats :

Nous remplaçons donc dans la méthode de Von Neumann et Richtmyer l'équation d'état donnée par (2.8) par l'équation d'état donnée par (5.3).

Nous obtenons à l'aide de notre code les courbes suivantes :

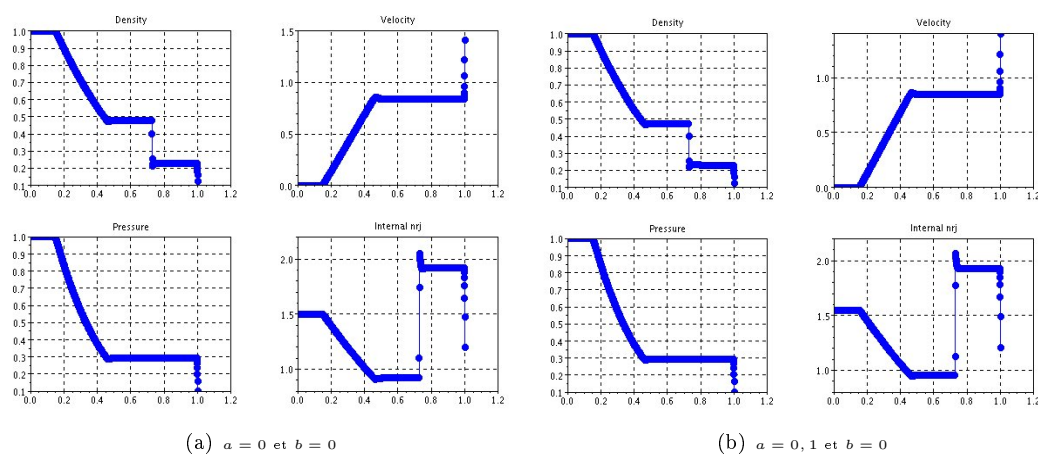


FIG. 5.1 – Tube à choc de Sod avec résolution numérique de l'équation de *Van der Waals*.

Lorsque $a = b = 0$, on se retrouve dans le cas de l'équation d'état des gaz parfaits avec $\gamma = \frac{5}{3}$.

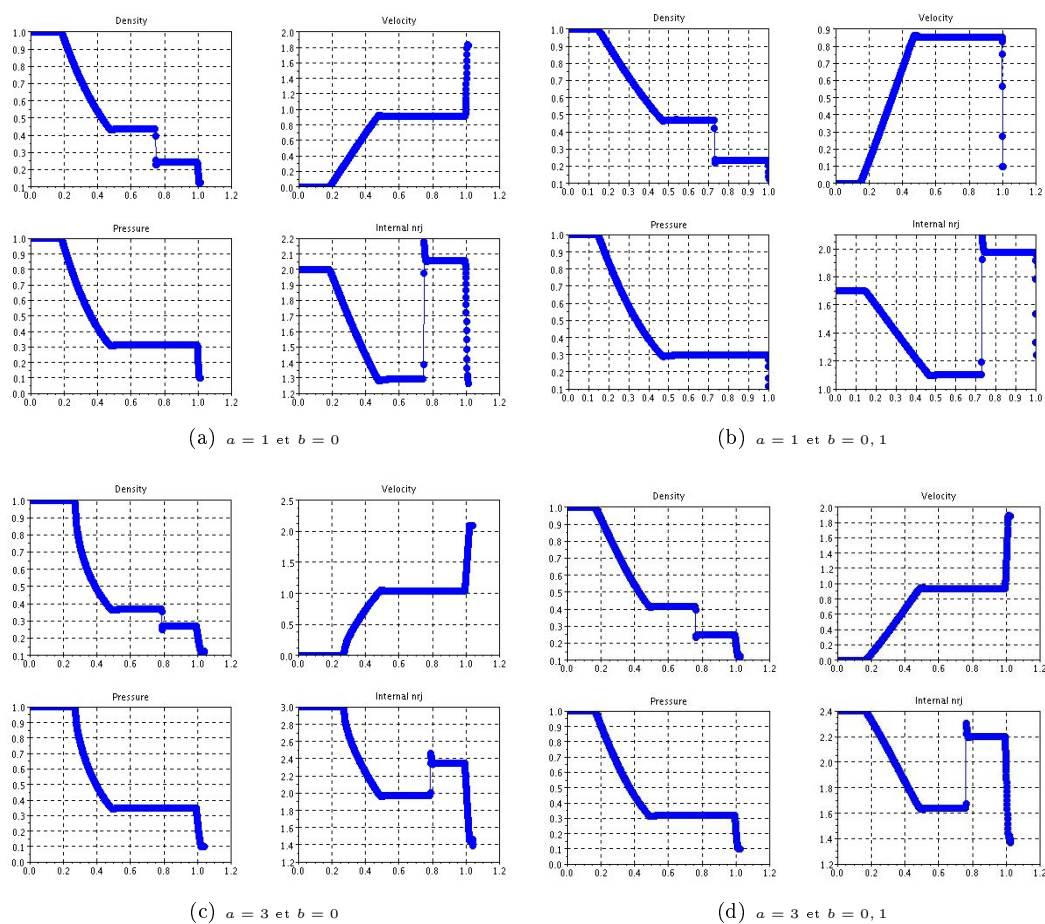


FIG. 5.2 – Tube à choc de Sod avec résolution numérique de l'équation de *Van der Waals*.

Chapitre 6

“Stiffened gas equation” :

6.1 Rappels sur cette équation :

Cette équation a été introduite par Cole (en 1948) lors de ses études sur les explosions sub-aquatiques ; elle est désormais couramment utilisée en mécanique des fluides numérique, notamment lorsque l'on considère les effets incompressible des fluides comme l'eau ou les LNG (gaz liquides naturels) à la pression atmosphérique. Cette équation est donnée par la relation :

$$\mathcal{E} = \frac{(p + \pi)\tau}{N - 1} \quad (6.1)$$

où

π est un terme de pression additionnel

$N > 1$ est un nombre constant, que l'on choisit souvent égal à 6,1 ; pour nos calculs, on prendra N égal à la constante des gaz parfaits (i.e. $N = 1,4$). Physiquement, N représente la façon dont varie p lorsque l'on fait varier ρT . N est lié aux degrés de liberté du système.

Nous avons besoin de la vitesse du son dans le fluide qui est donnée par :

$$c_s = \sqrt{\frac{Np + \pi}{\rho}}. \quad (6.2)$$

On peut choisir indépendamment, pour un N fixé, la pression de référence p^0 , la densité de référence ρ^0 et la vitesse du son de référence c_s^0 . Ainsi on peut déterminer π grâce à la formule suivante :

$$\pi = \rho^0 (c_s^0)^2 - Np^0. \quad (6.3)$$

Interprétation physique de cette équation

Si on considère un liquide donné, lorsque sa pression p varie, sa densité ρ varie très peu. De plus, on observe que sa vitesse c_s varie très peu, c'est pourquoi on ajoute le terme additionnel π .

En effet, dans le cas de l'eau par exemple, ρ^0 est de l'ordre de 1000, $p^0 = 10^5$ Pa et $c_s^0 = 1500$ m/s, ainsi $\pi \approx 2,25 \cdot 10^9$. Ainsi pour l'eau, $c_s^2 \approx \frac{\pi}{\rho}$, or à température constante, ρ varie peu et $p + \pi \approx \pi$, donc $c_s = c_{ste}$, et ainsi on rétablit le comportement de l'eau.

Si on s'intéresse à π de l'ordre de p , l'équation a une autre utilité car on pourrait la considérer comme une équation des gaz parfaits modifiée. La motivation de cette utilisation est simple : la vitesse du son c_s^0 d'un gaz parfait est entièrement déterminée dès que l'on connaît la pression de celui-ci p_0 , sa densité ρ^0 et son énergie interne \mathcal{E}^0 , si on considère un gaz donné, on peut déterminer ρ^0 , ensuite en faisant passer un son on obtient c_s^0 . Si le résultat n'est pas satisfaisant, cela implique que la loi des gaz parfaits n'est

pas adaptée à ce gaz. On a donc plusieurs façons de pallier à ce problème. La première idée est d'utiliser l'équation de Van der Waals (*cf* partie précédente), on a alors deux paramètres modifiables pour décrire l'état du gaz. L'autre alternative est d'utiliser “*the Stiffened gas equation*”. En effet, on a alors un nouveau paramètre π , que l'on calcule grâce à l'équation (6.3) qui permet de faire coller le modèle à la réalité.

6.2 Résultats :

6.2.1 Première utilisation : “Stiffened gas equation”, $\pi \gg p$

On prend $p = 0,1$, on va tester le code avec diverses valeurs de π . On augmente progressivement π , en partant de $\pi = 2$, puis on calcule pour $\pi = 20$, $\pi = 200$, pour des valeurs supérieures de π , le code plante.

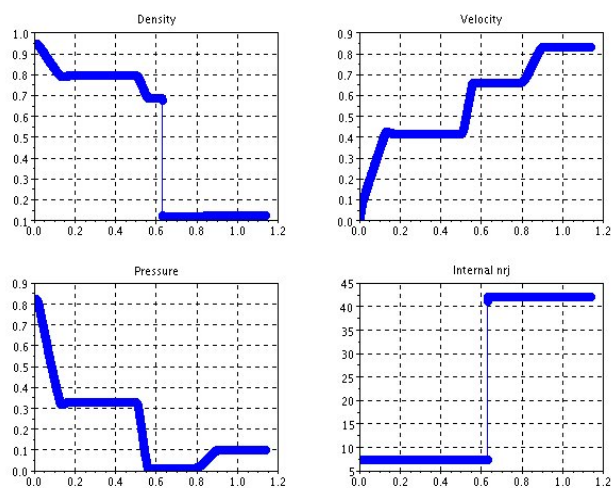


FIG. 6.1 – $\pi = 2$

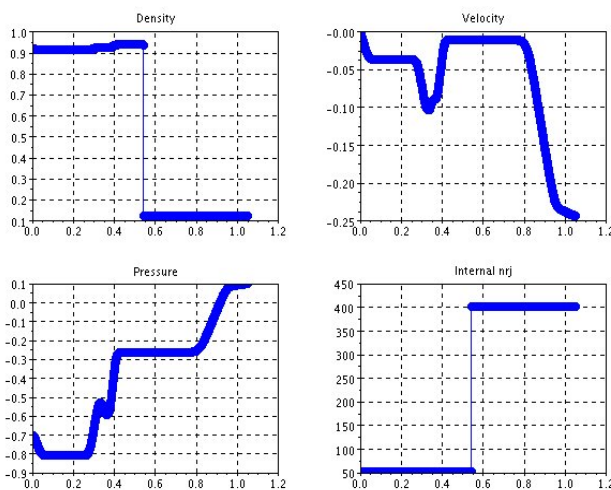
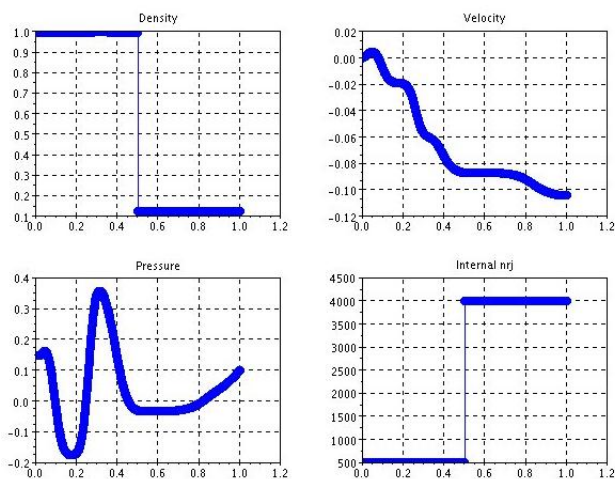
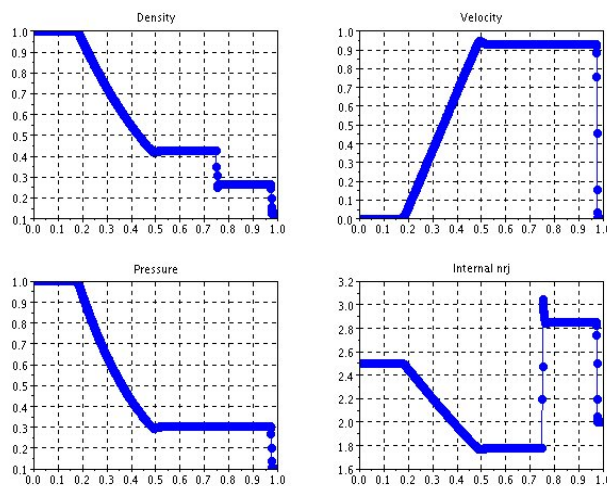


FIG. 6.2 – $\pi = 20$

FIG. 6.3 – $\pi = 200$

6.2.2 Deuxième utilisation : “équation des gaz parfaits modifiée”, $\pi \sim p$

Pour nos simulations, nous choisissons $N = 1, 4$, la pression de référence $p^0 = 1$, la densité de référence $\rho^0 = 1$ et c_s^0 égale successivement à $\sqrt{1, 4}$ puis à $\sqrt{1, 4} \pm 10\%$, soit $\pi = 0$, $\pi = 0, 294$ et $\pi = -0, 266$.

FIG. 6.4 – $\pi = 0$

On retrouve bien l'équation des gaz parfaits.

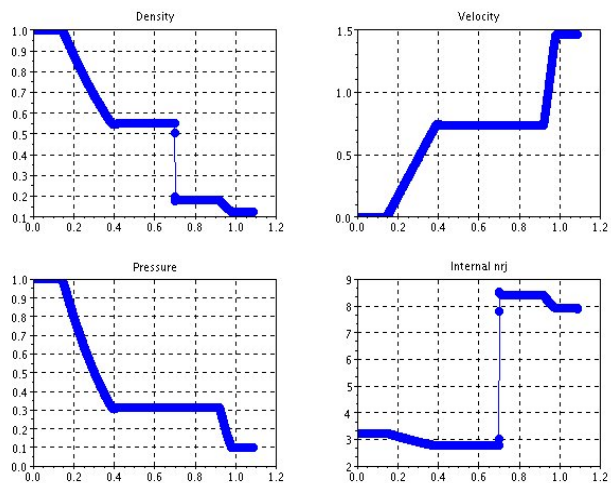


FIG. 6.5 – $\pi = 0.294$

Pour des raisons de compilations, on modifie la valeur initiale de p à 0,2.

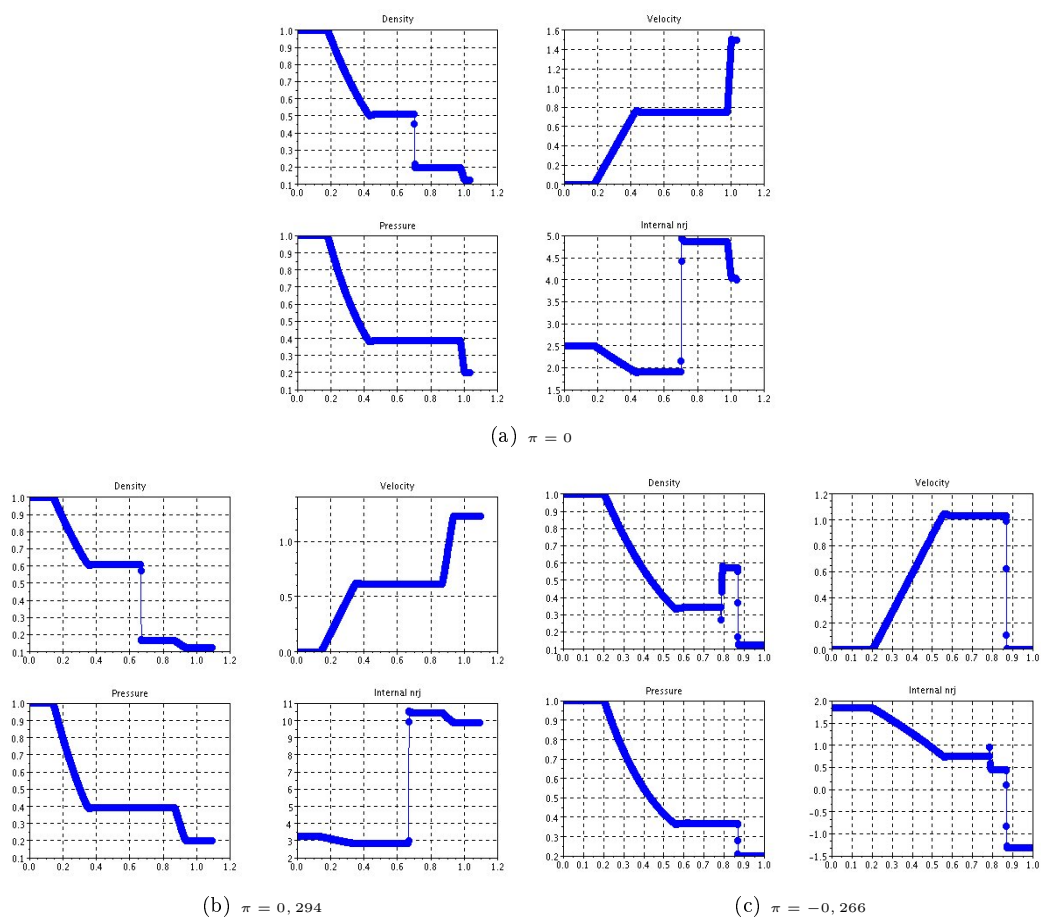


FIG. 6.6 – Initialisation $p = 0, 2$

Troisième partie

Recherche

Chapitre 7

Autre point de vue sur la pseudo-viscosité : viscosité et relation de Rankine-Hugoniot

Les conditions de Rankine-Hugoniot sont les conditions que doivent vérifier une solution des équations de l'hydrodynamique, si cette dernière présente des discontinuités.

Illustration : (d'après [4])

On s'intéresse à un gaz en variables lagrangiennes, régi par l'équation d'état des gaz parfaits. Ce gaz est décrit par les paramètres usuels, p , ρ , V , \mathcal{E} et E . On désigne par $\frac{d}{dt}$ la dérivée lagrangienne et la variation de la masse par $dm = \rho dx$.

On a donc les équations de l'hydrodynamique suivante :
Équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial m} \quad (7.1)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial m} \quad (7.2)$$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial(pu)}{\partial m} \quad (7.3)$$

Équation d'état du gaz :

$$\mathcal{E} = \frac{pV}{\gamma - 1} \quad (7.4)$$

où $V = \frac{1}{\rho}$ est le volume spécifique et $E = \mathcal{E} + \frac{1}{2}|u|^2$ est l'énergie totale.

On va s'intéresser à une solution de ces équations présentant un choc avec deux états constants (état droit indicé par d et gauche par g), séparés par une discontinuité se déplaçant à la vitesse $D \equiv \frac{dm}{dt}$ (cf schéma suivant).

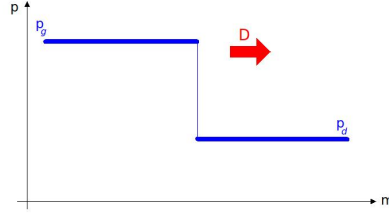


FIG. 7.1 – Définitions de p_g et p_d

Les relations de Rankine-Hugoniot sont donc les relations de compatibilité nécessaires à l'existence d'une telle solution.

On va poser dans toute la suite $\Delta u = u_d - u_g$ (et de même pour toutes les autres variables).

On supposera dans la suite des calculs que l'on connaît les quantités en aval du choc, c'est-à-dire le côté droit.

On déduit des équations (7.1) à (7.4) les équations suivantes :

$$D\Delta V - \Delta u = 0, \quad (7.5)$$

$$D\Delta u + \Delta p = 0, \quad (7.6)$$

$$D\Delta E + \Delta(pu) = 0. \quad (7.7)$$

On déduit à partir de (7.5) et (7.6) que $D = \frac{\Delta u}{\Delta V}$ ($V_d \neq V_g$), et donc :

$$\Delta V \Delta p + (\Delta u)^2 = 0. \quad (7.8)$$

On déduit ensuite de (7.3) et (7.5) que

$$D\Delta \mathcal{E} + \frac{D}{2}(u_d + u_g)\Delta u + p_d\Delta u + u_d\Delta p - \Delta u\Delta p = 0 \quad (7.9)$$

car $\Delta(pu) = u_dp_d - u_gp_g = p_d\Delta u + u_d\Delta p - \Delta u\Delta p$.

D'où d'après (7.5) et (7.6) :

$$\Delta \mathcal{E} = -(p_d\Delta V - \frac{1}{2}\Delta p\Delta V). \quad (7.10)$$

On déduit maintenant de (7.4) :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\Delta(pV)}{\gamma - 1} \quad (7.11)$$

i.e.

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{\gamma - 1}[p_d\Delta V + V_d\Delta p - \Delta V\Delta p] \quad (7.12)$$

et d'après (7.8)

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{\gamma - 1}[p_d\Delta V + V_d\Delta p + (\Delta u)^2]. \quad (7.13)$$

Enfin de (7.10) et (7.13), on déduit :

$$p_d\Delta V - \frac{1}{2}\Delta p\Delta V + \frac{1}{\gamma - 1}[p_d\Delta V + V_d\Delta p + (\Delta u)^2] = 0 \quad (7.14)$$

d'après (7.8) :

$$-p_d(\Delta u)^2 + \frac{1}{2}(\Delta u)^2 \Delta p + \frac{1}{\gamma-1}[-p_d(\Delta u)^2 + V_d(\Delta p)^2 + (\Delta u)^2 \Delta p] = 0 \quad (7.15)$$

i.e.

$$-\gamma p_d(\Delta u)^2 + \frac{1}{2}(\gamma+1)(\Delta u)^2 \Delta p + V_d(\Delta p)^2 = 0. \quad (7.16)$$

L'équation (7.16) est une équation du second degré en Δp dont le discriminant est donné par :

$$\Delta = \frac{1}{4}(\gamma+1)^2(\Delta u)^4 + 4\gamma p_d(\Delta u)^2 V_d \quad (7.17)$$

et dont les racines sont données par

$$\Delta p_{1,2} = \frac{1}{V_d} \left(\frac{1}{4}(\gamma+1)(\Delta u)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (\Delta u)^4 + \gamma p_d V_d (\Delta u)^2} \right). \quad (7.18)$$

On choisit la racine négative de cette équation. On a de plus $p_g = p_d - \Delta p$, d'où

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d} \left(\frac{1}{4}(\gamma+1)(\Delta u)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (\Delta u)^4 + \gamma p_d V_d (\Delta u)^2} \right). \quad (7.19)$$

Or on sait que $c_s^2 = \gamma p V$, d'où

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d} \left(\frac{1}{4}(\gamma+1)(\Delta u)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (\Delta u)^4 + c_{s_d}^2 (\Delta u)^2} \right) \quad (7.20)$$

i.e.

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d} |\Delta u| \left(\frac{1}{4}(\gamma+1)|\Delta u| + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}|\Delta u|\right)^2 + c_{s_d}^2} \right). \quad (7.21)$$

Cette équation donne, pour un choc stationnaire, la pression en amont en fonction de la pression en aval et d'un terme supplémentaire que l'on appelle viscosité.

De plus, si on est en présence d'un choc faible, cela implique $\Delta u \rightarrow 0$ d'où :

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d} c_{s_d} |\Delta u|. \quad (7.22)$$

On retrouve la viscosité linéaire.

Si on est en présence d'un choc fort, on a $c_{s_d} \rightarrow 0$, doù :

$$p_g = p_d + \frac{1}{V_d} \frac{\gamma+1}{2} |\Delta u|^2. \quad (7.23)$$

Et l'on retrouve la viscosité quadratique.

Chapitre 8

Recherche d'une solution stable...

Cette partie de notre stage a consisté en la recherche d'un exemple pour lequel nous serions en mesure de prouver la stabilité du schéma. Malheureusement, faute de temps, nous n'avons pas encore trouvé un tel exemple. Nous donnons ici les pistes de recherche que nous avons envisagées et que nous avons trouvées dans la littérature.

Nous nous sommes donc d'abord intéressés à la stabilité linéaire du schéma, c'est-à-dire à la stabilité du modèle linéarisé.

8.1 Stabilité linéaire

La stabilité de la méthode de Von Neumann et Richtmyer a déjà fait l'objet de nombreuses études qui demeurent incomplètes. Chacune d'entre elles propose des conditions nécessaires, parfois suffisantes, à la stabilité seulement linéaire du schéma. C'est ce que nous allons détailler dans cette partie.

8.1.1 Quelques résultats préliminaires

Lemme 1 (Condition nécessaire de Von Neumann) Soit $G(\Delta t, k)$ la matrice des coefficients de Fourier d'indice k , soit $|\lambda|_{max}$ son rayon spectral. Alors

$$|\lambda|_{max} \leq 1 + O(\Delta t)$$

est une condition nécessaire à la stabilité.

Lemme 2 (Condition suffisante de Richtmyer) Soit Δ le déterminant des vecteurs propres normalisés de G . S'il existe une constante δ telle que $|\Delta| \geq \delta > 0$ (uniformément en $(\Delta t, k)$), alors la condition de Von Neumann est suffisante pour la stabilité.

8.1.2 Loi de Hooke [1]

Si l'on considère V le volume spécifique, ρ la densité, u la vitesse, \mathcal{E} l'énergie interne, σ le tenseur des contraintes (qu'on considère positif en compression), q la viscosité artificielle, et enfin $e = 1 - \frac{V}{V_0}$ la déformation, où V_0 est le volume initial, alors la loi de Hooke est donnée par

$$\sigma = a^2 V_0 e, \tag{8.1}$$

où a est l'impédance acoustique.

Ainsi, en l'absence de choc ($q=0$),

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{8.2}$$

est une condition nécessaire et suffisante à la stabilité.

Dans les régions de choc, l'analyse de Von Neumann et Richtmyer donne donc la condition nécessaire suivante :

$$4 \frac{\Lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (8.3)$$

où $\Lambda = c\rho|\Delta u|$, et $q = -\Lambda\Delta u$.

8.1.3 Un résultat de G.N. White

G.N. White donne un résultat supplémentaire, constituant une meilleure condition à la stabilité pour la méthode de Von Neumann et Richtmyer. Cependant, son travail n'a pas été publié, il nous est donc assez compliqué de démontrer ce résultat.

$$\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + 4 \frac{\Lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (8.4)$$

est une condition nécessaire à la stabilité lorsque Λ est une constante positive ou nulle, et que la loi correspond à la loi de Hooke.

Thompson, dans une autre analyse, trouve le même résultat ; cependant, il l'exprime avec un 2 à la place du 4, car il fait son analyse dans le cadre d'une viscosité linéaire en Δu , alors que White le fait dans le cas d'une viscosité quadratique en Δu .

Conclusion

Nous avons travaillé durant ces cinq mois sur la mécanique des fluides mathématique et numérique, plus particulièrement sur la méthode de Von Neumann et Richtmyer, qui a été présentée dans ce rapport. Nous avons essayé de bien comprendre les enjeux de cette méthode. Numériquement, on voit très bien que la pseudo-viscosité est indispensable, c'est ce que nous avons essayé de montrer dans le chapitre 4 de ce rapport.

Cette méthode est donc primordiale, et encore utilisée actuellement. Nous avons été très intéressés par ce sujet à savoir cette application des mathématiques à la mécanique des fluides. Nous avons beaucoup appris au cours de ce stage, que ce soit en physique : nous avons pu compléter nos connaissances en mécanique des fluides, comprendre le caractère de certains fluides, nous avons également appris beaucoup de choses sur le calcul de la vitesse du son, dans un fluide ou dans un mélange de fluides ; ou en mathématique, notamment grâce à l'étude de la stabilité, en essayant de comprendre les articles que nous étions amenés à lire.

Bien évidemment, notre travail n'a pas été des plus utiles à la recherche, car nous n'avons pas eu le temps de résoudre la question de la stabilité de la méthode de Von Neumann et Richtmyer, cette question restant ouverte.

Par ailleurs ce stage nous a permis d'apercevoir la diversité des tâches qu'un chercheur est amené à effectuer dans son travail, de la lecture et compréhension d'un article à la compréhension et la modification d'un code, en passant par la recherche bibliographique, et évidemment la recherche en elle-même.

Enfin ce stage nous a aussi donné un premier aperçu du travail d'équipe. Nous avons également eu la chance de pouvoir assister à des groupes de travail, où nous avons pu voir les chercheurs à l'œuvre. Nous avons aussi apprécié d'avoir pu échanger avec plusieurs chercheurs, notamment lors des débuggages de notre code.

En conclusion, nous pouvons dire que ce stage nous a appris beaucoup et a constitué une très bonne première immersion dans le monde de la recherche.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Traduction de l'article de J. Von Neumann et R.D. Richtmyer

Une méthode pour le calcul numérique des chocs hydrodynamiques

Les équations de l'hydrodynamique sont modifiées par la prise en compte de termes supplémentaires, qui simplifient énormément les procédures requises pour trouver la solution numérique pas à pas des équations dans des problèmes faisant intervenir des chocs. L'influence quantitative de ces termes peut être minimisée à volonté en prenant un pas suffisamment bien choisi pour les intégrations numériques. On donne un ensemble d'équations aux différences finies, et la condition qui doit être vérifiée pour assurer leur stabilité.

I. Introduction

Dans l'étude des phénomènes ayant lieu dans des écoulements compressibles, il est souvent souhaitable de résoudre les équations des mouvements fluides par une méthode d'approximation numérique pas à pas. Mais le travail est en général sérieusement compliqué par la présence de chocs. Les chocs peuvent être interprétés mathématiquement comme des surfaces pour lesquelles la densité, la vitesse du fluide, la température, l'entropie etc... ont des discontinuités ; et les équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement nécessitent clairement des conditions aux limites reliant les valeurs de ces quantités aux deux côtés de chacune de ces surfaces. Les conditions aux limites nécessaires sont bien sûr données par les relations de Rankine-Hugoniot, mais leur application est compliquée car les surfaces de choc sont en mouvement relatif par rapport au réseau de point de l'espace-temps utilisés pour le calcul numérique, et les équations différentielles comme les conditions aux limites sont non-linéaires. En outre, le mouvement des surfaces n'est pas connu par avance, mais est régi par les équations différentielles et les conditions aux limites elles-mêmes. Par conséquent, le traitement des chocs nécessite de longs calculs (en général par des essais et des erreurs) à chaque pas, à chaque instant du calcul global.

Nous décrivons ici une méthode pour le traitement automatique des chocs, qui évite de n'avoir besoin d'aucune condition aux limites. Les approximations de cette méthode peuvent être rendues aussi précises que l'on veut, en choisissant des tailles appropriées pour les intervalles, ainsi que les autres paramètres intervenant dans la méthode. Cette méthode traite de tous les chocs, d'une manière correcte et automatique, à chaque instant et à chaque endroit où ils peuvent apparaître.

La méthode utilise les effets bien connus des mécanismes dissipatifs sur les chocs, comme la viscosité et la conduction thermique.¹ On peut voir, par exemple, que la viscosité joue un grand rôle dans les chocs, dès qu'on en tient compte, si bien que les surfaces mathématiques présentant des discontinuités peuvent être remplacées par des couches minces, dans lesquelles la pression, la densité, la température, etc ...

¹Lord Rayleigh (Proc. Roy. Soc. A84, 247 (1910)) et G. I. Taylor (Proc. Roy. Soc. A84, 371 (1910)) montrèrent dans les fondements mêmes de toutes considérations thermodynamiques, que la dissipation est nécessairement présente dans les ondes de choc. Plus tard, R. Becker (Zeits. f. Physik 8, 321 (1922)) donna une discussion détaillée sur les effets de la conduction thermique et sur la viscosité. L. H. Thomas (J. Chem. Phys. 12, 449 (1944)) a examiné récemment ces effets un peu plus en profondeur, en terme de théorie cinétique des gaz.

varient rapidement mais de manière continue. Notre idée est d'introduire des termes de dissipation artificielle dans les équations afin de donner aux chocs une épaisseur au moins comparable (mais de préférence plus large) à l'espacement des points du réseau. On peut alors utiliser les équations différentielles (plus précisément les équations aux différences finies correspondantes) pour l'intégralité du calcul. Dans les résultats numériques obtenus, les chocs sont immédiatement mis en évidence par les quasi-décontinuités qui se déplacent avec une vitesse très proche de la vitesse normale au sein du fluide, dans lequel la pression, la température, etc... sont très proches des valeurs correctes.

Nous verrons que, pour les formes présumées de la dissipation (et en fait, pour plein d'autres formes) les équations de Rankine-Hugoniot sont vérifiées à condition que l'épaisseur des couches concernées par le choc soit petite par rapport aux autres grandeurs physiques caractéristiques du système. Nous pouvons alors considérer un moyen par lequel le passage des équations différentielles aux équations aux différences finies peut être fait, et discuter de la stabilité mathématique de ces équations. Nous verrons que les termes dissipatifs ont pour effet de rendre la condition de stabilité plus contraignante que la condition classique de Courant, Friedrichs et Lewy ², mais pas de manière assez considérable si la quantité de dissipation introduite est à peine suffisante pour produire une épaisseur de choc comparable à celle de la longueur de l'intervalle d'espace du réseau utilisé.

La méthode a jusqu'à maintenant uniquement été appliquée à des écoulements monodimensionnels, mais semble également convenir pour l'étude d'écoulements plus compliqués; c'est-à-dire dans lesquels le calcul des chocs par application directe des équations de Hugoniot serait d'ordinaire prohibitivement difficile, même pour un ordinateur rapide et automatique.

Les discussions qui suivent ont pour objectif principal de donner une image complète des idées et des procédés mathématiques que la méthode implique. Cependant, dans certaines parties (au chapitre IV, ainsi que pour les principales conclusions de certaines idées des chapitres IV et V) les discussions mathématiques ont été réalisées uniquement dans le but de donner un enchaînement complet de la procédure nécessaire, mais pas avec tous les détails que nécessiterait une preuve rigoureuse d'un article essentiellement mathématique. Ceci vient d'une part de notre désir d'éviter un article inutilement trop long, d'autre part du fait que nous ne voulions pas être obligés de déterminer maintenant le degré précis de généralisation, en ce qui concerne la validité de la méthode. Il nous semble préférable de réserver de telles discussions pour plus tard.

La validité de notre méthode a été testée de manière empirique sur diverses applications informatiques. Elles sont en partie encore analysées, et seront publiées et discutées plus tard.

II. Les équations de base

Considérons le mouvement d'un fluide à une dimension. Soit x la coordonnée Lagrangienne, et soit $X = X(x, t)$ la coordonnée Eulérienne, i.e. $X = X(x, t)$ donne la position, au temps t , d'un élément de fluide qui était initialement à la position x . Soit $\rho_0(x)$ la densité initiale, ainsi V et U donnés par :

$$V(x, t) = \frac{1}{\rho_0(x)} \frac{\partial X}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

et

$$U(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

sont respectivement, le volume spécifique et la vitesse du fluide.

Les équations du mouvement, de l'énergie et de la continuité sont :

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (p + q), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (p + q) \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.4})$$

²Courant, Friedrichs, et Lewy, Math. Ann. 100, 32 (1928). C'est dans cet article fondamental que ces auteurs publièrent les premiers leur découverte des conditions de stabilité de la méthode d'intégration par différences finies pour les équations aux dérivées partielles.

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (\text{A.5})$$

Dans ces équations, $p = p(x, t)$ représente la pression ordinaire (ou statique) du fluide et $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$ l'énergie interne par unité de masse. On établit une relation entre \mathcal{E} , p et V grâce à une équation d'état, que l'on supposera de la forme (A.6), pour l'illustration.

$$\mathcal{E} = \frac{pV}{\gamma - 1} \quad (\text{A.6})$$

qui est utilisée, par exemple, dans le cas d'un gaz parfait. γ est une constante > 1 . On suppose que le mécanisme dissipatif peut être représenté par un terme de pression additionnel q , supposé négligeable, hormis au voisinage du choc.

III. L'expression de q

La dissipation est introduite pour des raisons purement mathématiques. Par conséquent, q peut être écrit sous la forme de n'importe quelle fonction pratique de p , V , etc et de leurs dérivées, à condition que les exigences suivantes soient réalisés :

1. Les équations (A.3), (A.4) et (A.5) doivent posséder des solutions sans discontinuités.
2. L'épaisseur des couches de choc doivent être en tout point, du même ordre de grandeur que la longueur de l'intervalle Δx utilisé dans le calcul numérique, indépendamment de la force du choc et de l'état du matériaux où a lieu le choc.
3. L'effet du terme contenant q dans (A.3) et (A.4) doit être négligeable en dehors des couches du choc.
4. Les relations de Hugoniot doivent être vérifiées lorsque toutes les autres dimensions caractéristiques de l'écoulement sont grandes par rapport à l'épaisseur du choc.

Nous montrerons que l'expression (A.7) répond à ces exigences.

$$q = - \frac{(\rho_0 c \Delta x)^2}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \bigg| \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

c est une constante adimensionnée proche de l'unité. Le mécanisme dissipatif est essentiellement un phénomène de viscosité non linéaire, ce qui paraît plus clair si (A.7) s'écrit de la manière équivalente suivante (dans le cas de la dimension 1) :

$$q = - \frac{(c \Delta x)^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x} \bigg| \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{A.8})$$

en utilisant (A.5). Pour montrer que l'expression (A.7) vérifie les conditions précédentes, nous considérons un choc stationnaire.

IV. Choc plan stationnaire

Considérons une long tuyau contenant un fluide initialement à l'équilibre (thermique et mécanique), dans lequel un piston pousse, en partant d'une extrémité, avec une vitesse constante, comme le montre la Fig. A.1. En l'absence de dissipation, le volume V et la vitesse du fluide U sont, à un instant donné, représentées par les courbes en traits pleins dans les graphiques, alors qu'en présence de dissipation, elles sont représentées par les courbes en traits discontinus. Dans les deux cas, le choc est régulier, au moins approximativement lorsque l'on se place suffisamment loin du piston. Ensuite, U , V , \mathcal{E} , etc. dépendent de x et de t par la relation :

$$w = x - st, \quad (\text{A.9})$$

où s représente la vitesse du choc relativement à l'origine, ou lagrangienne, "coordonnées". Nous supposons que ρ_0 et Δx sont constants (indépendants de x).

Il est commode de définir :

$$M = \rho_0 s \quad (\text{A.10})$$

- dans un système de mouvement coordonné, M est la masse traversant une unité d'espace par unité de temps- sur quoi les équations (A.3)-(A.5) deviennent :

$$M \frac{dU}{dw} = \frac{d}{dw}(p + q), \quad (\text{A.11})$$

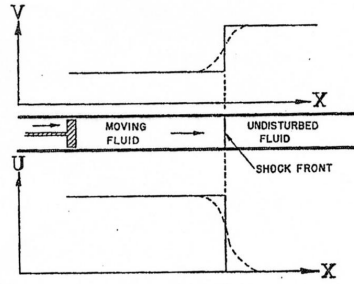


FIG. A.1 – Choc plan à l'équilibre

$$\frac{d\mathcal{E}}{dw} + (p + q) \frac{dV}{dw} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$-M \frac{dV}{dw} = \frac{dU}{dw}. \quad (\text{A.13})$$

Ensuite, (A.11) et (A.13) donnent :

$$-M^2 \frac{dV}{dw} = \frac{d}{dw}(p + q); \quad (\text{A.14})$$

et (A.12) et (A.14) donnent

$$\frac{d\mathcal{E}}{dw} + \frac{d}{dw}[(p + q)V] + M^2 V \frac{dV}{dw} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Les solutions de (A.13), (A.14) et (A.15) sont :

$$MV + U = C_1 \quad (\text{A.16})$$

$$M^2 V + p + q = C_2 \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{E} + (p + q)V + \frac{1}{2} M^2 V^2 = C_3 \quad (\text{A.18})$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont constants.

Considérons les valeurs initiales et finales données par :

$$\text{Lorsque } w \rightarrow \infty; V \rightarrow V_i, p \rightarrow p_i, \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i, q \rightarrow 0; \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Lorsque } w \rightarrow -\infty; V \rightarrow V_f, p \rightarrow p_f, \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_f, q \rightarrow 0; \quad (\text{A.20})$$

Ensuite, (A.17) donne :

$$M^2(V_i - V_f) = p_f - p_i \quad (\text{A.21})$$

et (A.18) et (A.21) donnent :

$$\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(p_i + p_f)(V_i - V_f). \quad (\text{A.22})$$

(A.21) et (A.22) sont les équations de Hugoniot et sont indépendantes de la quantité et de la forme de la dissipation, à condition que $q \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow \infty$. La raison physique à ce phénomène est que le lieu de Hugoniot est une conséquence directe des lois de conservation de la masse, de la vitesse et de l'énergie, et la forme supposée de la dissipation est telle que l'intégralité de ces quantités sont conservées globalement. Ces lois requièrent que, dans un choc, une certaine quantité de l'énergie mécanique soit convertie de manière irréversible sous forme de chaleur. À l'état d'équilibre, le mouvement s'ajuste, dans la couche du choc, jusqu'à ce que, précisément, cette quantité de travail soit produite contre la pression q d'après l'équation (A.3) et soit convertie en chaleur selon l'équation (A.4).

Pour étudier la forme du choc, nous nous intéresseront d'abord aux solutions satisfaisant les critères suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{dw} \geq 0. \quad (\text{A.23})$$

C'est normalement le cas pour un choc se déplaçant vers la droite. Ensuite, on peut écrire (A.7) :

$$qV = +(Mc\Delta x)^2 \left(\frac{dV}{dw} \right)^2. \quad (\text{A.24})$$

On tire de (A.17) et (A.18)

$$\mathcal{E} - \frac{1}{2}M^2V^2 = C_3 - C_2V, \quad (\text{A.25})$$

et grâce à (A.6)

$$pV = \frac{\gamma-1}{2}M^2V^2 + C_4V + C_5, \quad (\text{A.26})$$

puis (A.17) donne

$$qV = C_2 - \frac{\gamma+1}{2}M^2V^2 - C_4V - C_5. \quad (\text{A.27})$$

Le membre de droit de l'équation (A.27) est une forme quadratique en V qui s'annule lorsque $V = V_i$ et $V = V_f$, de sorte que, clairement,

$$(Mc\Delta x)^2 \left(\frac{dV}{dw} \right)^2 = qV = \frac{\gamma+1}{2}M^2(V_i - V)(V - V_f). \quad (\text{A.28})$$

(L'équation (A.28) peut aussi être obtenue directement à partir de l'équation (A.27) en utilisant les équations de Hugoniot et les équations donnant C_2 , C_4 et C_5 .)

Pour résoudre l'équation (A.28), posons :

$$\psi = V - \frac{V_i + V_f}{2}, \quad \psi_0 = \frac{V_i - V_f}{2}, \quad \varphi = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad (\text{A.29})$$

de sorte que

$$c\Delta x \frac{d\psi}{dw} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (\psi_0^2 - \psi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.30})$$

ou

$$c\Delta x \frac{d\varphi}{dw} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.31})$$

Par conséquent,

$$w = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} c\Delta x \int \frac{d\varphi}{(1 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}}} = w_0 \arcsin \varphi \quad (\text{A.32})$$

où

$$w_0 = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} c\Delta x. \quad (\text{A.33})$$

Finalement,

$$\psi = V - \frac{V_i + V_f}{2} = \frac{V_i - V_f}{2} \sin \frac{w}{w_0}. \quad (\text{A.34})$$

À cause de l'hypothèse initiale (A.24) que $\frac{dV}{dw} \geq 0$, nous pouvons utiliser seulement une moitié de l'onde de la solution (A.34), mais cette mi-onde peut être rassemblée en deux solutions particulières,

$$V \equiv V_i \quad \text{et} \quad V \equiv V_f \quad (\text{A.35})$$

(Elles satisfont l'équation (A.28)), pour former la solution composée continue représentée dans la Fig. A.2. w_0 est une mesure de l'épaisseur du choc, et d'ordre de grandeur Δx , à condition que c soit de l'ordre de l'unité, indépendamment de la force du choc et des conditions aval au choc, d'après l'équation (A.33). Dans toute la majeure partie du système, q est négligeable par rapport à la pression ordinaire, p , à cause du facteur $(\Delta x)^2$ dans (A.7) ; mais dans la couche du choc, q devient comparable à p à cause de la valeur anormalement grande de $\frac{\partial V}{\partial t}$ dans cette zone.

Ainsi l'expression (A.7) répond à toutes les conditions.

On peut noter que si nous nous étions intéressés, à un autre point de vue, à des solutions ayant $\frac{dV}{dt} > 0$, aucune solution pour lesquelles toutes les quantités sont continues et liées, n'aurait été trouvée, car, dans ce cas, le signe opposé pourrait apparaître dans (A.28), entraînant une hyperbole au lieu de la fonction sinusoidale ordinaire. C'est pourquoi les chocs négatifs n'existent pas dans les états d'équilibre, pour nos équations. Les chocs négatifs n'existent pas non plus dans le monde physique, de sorte que l'expression (A.7) est satisfaisante de ce point de vue.

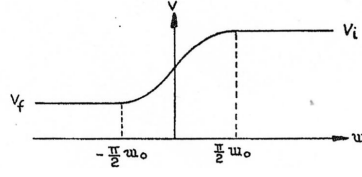


FIG. A.2 – Volume spécifique dans un choc à l'équilibre

V. Stabilité des équations différentielles

Supposons qu'à certains instants, il y ait superposition à la solution désirée $U(x, t)$, $V(x, t)$, d'une petite perturbation δU , δV , etc. Il est intéressant de savoir si la perturbation grandit en fonction du temps. Pour étudier cela, nous remplaçons U , V , etc par $U + \delta U$, $V + \delta V$, etc. dans les équations (A.3), (A.4), (A.5), (A.8), après avoir préalablement réécrit (A.4), en utilisant (A.6), sous la forme :

$$[\gamma p + (\gamma - 1)q] \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.36})$$

Nous obtenons ainsi les équations suivantes au premier ordre :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta U = - \frac{\partial}{\partial x} (\delta p + \delta q), \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} [\gamma \delta p + (\gamma - 1) \delta q] + [\gamma p + (\gamma - 1)q] \frac{\partial}{\partial t} \delta V + V \frac{\partial}{\partial t} \delta p + \frac{\partial p}{\partial t} \delta V = 0, \quad (\text{A.38})$$

$$\delta q = \frac{(c\Delta x)^2}{V^2} \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \delta V - 2 \frac{(c\Delta x)^2}{V} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial}{\partial x} \delta U, \quad (\text{A.39})$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta V = \frac{\partial}{\partial x} \delta U. \quad (\text{A.40})$$

En écrivant le dernier terme de (A.39), nous avons supposé que la perturbation n'est pas assez grande pour altérer le signe de $\frac{\partial U}{\partial x}$. Les équations (A.37) à (A.40) forment un système d'équations linéaires différentielles simultanées pour δU , δV , δp , δq . Les coefficients dépendent de la solution désirée U , V , p , q et sont donc considérés comme des fonctions lisses de x , t . Nous allons considérer des perturbations très oscillantes. Par conséquent, nous considérerons les coefficients de (A.37) à (A.40) constants dans une petite région et chercherons des solutions de la forme :

$$\delta U = \delta U_0 e^{ikx + \alpha t}, \delta V = \delta V_0 e^{ikx + \alpha t}, \text{ etc.}, \quad (\text{A.41})$$

où δU_0 , δV_0 , δp_0 , δq_0 , k , et α sont constants et k est réel. La substitution de l'équation (A.41) dans les équations (A.37) à (A.40) amène à quatre équations linéaires homogènes simultanées en δU_0 , δV_0 , δp_0 , δq_0 . L'annulation du déterminant de ces équations donne une équation reliant k et α . En résolvant cette équation, pour k donné, et en examinant la partie réelle de α , nous pouvons déterminer si un coefficient de Fourier donné (A.41) de la perturbation augmente en fonction du temps. Ce calcul est effectué aisément, mais nous omettons des détails par souci de brièveté. L'équation du déterminant est :

$$\begin{aligned} (\alpha \rho_0)^2 \gamma \frac{\partial V}{\partial t} + 2 \frac{\rho_0 \alpha}{V} (kc\Delta x)^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| - \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial t} (kc\Delta x)^2 \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \\ + k^2 \alpha [\gamma p + (\gamma - 1)q] + \rho_0^2 \alpha^3 V + 2 \rho_0 \alpha^2 (kc\Delta x)^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \\ - \frac{\alpha}{V} (kc\Delta x)^2 \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| + k^2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Si nous limitons notre attention au coefficient de Fourier avec un k grand, seulement certains termes de l'équation (A.42) doivent être maintenus, les autres sont négligeables soit en vertu d'un ordre inférieur

à k ou en vertu d'un ordre inférieur à α . On peut distinguer deux cas : dans les régions de choc, nous conservons tous les termes de (A.42) ; dans les régions normales, nous négligeons les termes de dissipation (qui contiennent Δx). Dans les deux régions, les termes dominants, au sens expliqué, sont :

pour les régions de choc :

$$\alpha = -2 \frac{(kc\Delta x)^2}{\rho_0 V} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \quad (\text{A.43})$$

pour les régions normales :

$$\alpha^2 = -\frac{k^2}{\rho_0 V} \frac{\gamma p}{\rho_0} \quad (\text{A.44})$$

On remarque que les petites perturbations sont amorties dans la couche du choc mais se propagent sans croissance ni affaiblissement dans les régions normales. Cela correspond à la réalité physique, ainsi l'expression (A.7) est également satisfaisante du point de vue de la stabilité des équations différentielles résultantes.

Nous pouvons, de plus, identifier les termes des équations à l'ordre 1, qui nous mènent aux termes dominants dans (A.42). Cela donne :

Régions de choc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta U \approx \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta U, \quad (\text{A.45})$$

où

$$\sigma = \frac{2(c\Delta x)^2}{V\rho_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|;$$

Régions normales :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta U \approx s_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta U, \quad (\text{A.46})$$

où

$$s_0 = \frac{\gamma p}{V\rho_0^2}.$$

Ainsi notre système se comporte comme une équation de diffusion dans les couches de chocs et comme une équation des ondes partout ailleurs.

VI. Equations aux différences finies

Il existe beaucoup de schémas différences finies pour les équations différentielles, mais nous devons nous restreindre à l'un des plus simples. D'autres schémas sont bien meilleurs du point de vue de la stabilité, mais sont bien plus compliqués du point de vue de la résolution numérique. Ces derniers seront étudiés par ailleurs.

On considère les points d'un réseau rectangulaire espacés de Δx et Δt notés x_l, t_n , ($l = 0, 1, 2, \dots, L$; $n = 0, 1, 2, \dots$). Nous aurons également besoin des points intermédiaires, ayant pour coordonnées $x_{l+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(x_{l+1} + x_l)$ etc. Pour simplifier cette écriture, nous introduisons des abréviations suivantes :

$$V_{l+\frac{1}{2}}^n = V(x_{l+\frac{1}{2}}, t^n) \quad \text{etc.} \quad (\text{A.47})$$

Le schéma différences finies correspondant à (A.3), (A.5), (A.8) et (A.36) est :

$$\rho_0 \frac{U_l^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p_{l+\frac{1}{2}}^n + q_{l+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_{l-\frac{1}{2}}^n - q_{l-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (\text{A.48})$$

$$\rho_0 \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \frac{U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (\text{A.49})$$

$$q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2(c\Delta x)^2}{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{l+\frac{1}{2}}^n} \frac{(U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}})(U_{l+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_l^{n+\frac{1}{2}})}{(\Delta x)^2}, \quad (\text{A.50})$$

et

$$\left[\gamma \frac{p_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{l+\frac{1}{2}}^n}{2} + (\gamma - 1)q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{l+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{p_{l+\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{l+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = 0 \quad (\text{A.51})$$

Ces équations sont correctes au second ordre pour les petites quantités Δx et Δt , sauf pour les termes contenant q dans l'équation (A.48), lesquels ne sont corrects qu'au premier ordre; mais ces termes sont négligeables en dehors des couches du choc, et sont de toute façon artificiels d'un point de vue physique.

Pour la solution numérique, nous supposons que toutes les quantités sont connues pour un indice supérieur à n ou moins. Nous calculons $U_l^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (A.48) pour chaque l ; $V_{l+\frac{1}{2}}^{n+1}$ à partir de (A.49) pour chaque l ; $q_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (A.50) pour chaque l ; $V_{l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir de (A.51) pour chaque l ; ceci constitue un pas du schéma. Des conditions aux limites sont nécessaires, par exemple (paroi rigide aux extrémités du tube) : $U_0^{n+\frac{1}{2}} \equiv 0$, $U_L^{n+\frac{1}{2}} \equiv 0$.

VII. Stabilité des équations aux différences finies

Comme les équations (A.48) à (A.51) ne sont que des approximations des équations différentielles, on ne peut pas s'en servir pour donner toutes les caractéristiques de la solution avec précision. Si U , V sont définies comme étant développées en séries de Fourier avec des coefficients dépendants de t , les composantes de la grande longueur d'onde sont précisément données par les équations (A.48) à (A.51), à condition que les Δx et Δt soient suffisamment petits; mais les composantes dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de Δx , sont toujours erronées à un moment donné. L'erreur introduite n'est pas très importante, à condition que tous les composants physiquement intéressants soient calculés précisément; ceci requiert non seulement que Δx et Δt soient petits mais aussi que les composantes physiquement insignifiants d'une longueur d'onde de l'ordre de Δx restent petits durant tout le calcul. Il peut se produire que non seulement les composantes de petite longueur d'onde soient erronées, mais aussi que leurs amplitudes augmentent avec n , malgré la stabilité des équations *différentielles*. Cette augmentation est généralement exponentielle et, si elle a lieu, elle rend rapidement tout le calcul complètement faux.

Comment éviter de telles catastrophes lorsqu'on approche les équations aux dérivées partielles par les équations aux différences finies? Tel a été le sujet d'étude réalisé par différents investigateurs, à commencer par l'article fondamental de Courant, Friedrichs, et Lewy auquel nous faisons référence dans l'introduction. Nous donnerons une discussion quelque peu heuristique des questions de stabilité rencontrées dans le problème étudié.

Nous supposons encore une fois qu'une petite perturbation δU , δV , etc ... est ajoutée à la solution homogène, et nous considérons les équations pour les perturbations à l'ordre 1 (A.48) à (A.51). D'après l'analyse de la partie V, on s'attend à ce que les termes dominants soient (cf. équations (A.45) et (A.46)) :

aux régions de chocs :

$$\frac{\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} - \delta U_l^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \approx \sigma \frac{\delta U_{l+1}^{n-\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_{l-1}^{n-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.52})$$

aux régions normales :

$$\frac{\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_l^{n-\frac{3}{2}}}{(\Delta t)^2} \approx s_0^2 \frac{\delta U_{l+1}^{n-\frac{1}{2}} - 2\delta U_l^{n-\frac{1}{2}} + \delta U_{l-1}^{n-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.53})$$

et ceci peut être vérifié en écrivant en détail les équations aux différences finies pour le système vérifié par les perturbations à l'ordre 1.

Comme précédemment, nous considérons des équations de la forme :

$$\delta U = \delta U_0 e^{ikx + \alpha t}, \text{ etc...} \quad (\text{A.54})$$

de sorte que :

$$\delta U_l^{n+\frac{1}{2}} = \delta U_0 \zeta^l \xi^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.55})$$

où :

$$\zeta = e^{ik\Delta x}, \quad \xi = e^{\alpha\Delta t} \quad (\text{A.56})$$

Pour la stabilité, il faut que $|\xi| \leq 1$, pour tout réel k .

Considérons dans un premier temps les régions normales. La substitution de (A.55) dans (A.53) et l'annulation des facteurs communs donne :

$$\xi - 2 + \frac{1}{\xi} = 2 \left(\frac{s_0 \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos k\Delta x - 1) \quad (\text{A.57})$$

Si nous appelons

$$L = \frac{s_0 \Delta t}{\Delta x}, \quad (\text{A.58})$$

la solution de (A.57) est

$$\xi_{1,2} = b \pm (b^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.59})$$

où

$$b = 1 - L^2(1 - \cos k\Delta x) \quad (\text{A.60})$$

D'après (A.60), b est toujours < 1 , il y a donc deux cas :

$$-1 < b < 1, \quad |\xi_1| = |\xi_2| = 1; \text{ stabilité ;} \quad (\text{A.61})$$

$$b < -1, \quad |\xi_1| < 1 < |\xi_2|; \text{ instabilité ;} \quad (\text{A.62})$$

On peut déduire de l'équation (A.60) que la condition (A.61) sera vérifiée pour tout k si, et seulement si,

$$L \leq 1. \quad (\text{A.63})$$

Ceci est la condition usuelle de stabilité des équations hydrodynamiques du type (A.53).

Un traitement similaire de l'équation (A.52) pour les régions de chocs donne directement :

$$\xi - 1 = 2 \frac{\sigma \Delta t}{(\Delta x)^2} (\cos k\Delta x - 1), \quad (\text{A.64})$$

et la condition de stabilité est bien évidemment

$$2 \frac{\sigma \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \text{ ou } \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\sigma} \quad (\text{A.65})$$

Pour interpréter ce résultat, nous calculons σ d'après (A.45) pour le choc stationnaire décrit dans la partie IV. De (A.33) et (A.34), on tire :

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| = \rho_0 \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| = \rho_0 s \left| \frac{\partial V}{\partial \omega} \right| = \rho_0 s \frac{V_i - V_f}{2c\Delta x} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{A.66})$$

donc

$$\sigma = sc\Delta x \frac{V_i - V_f}{V} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{A.67})$$

et la condition de stabilité (A.65) prend la forme :

$$\Delta t \leq \frac{V\Delta x}{2sc(V_i - V_f)} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (\text{A.68})$$

ou bien

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{4sc} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{\eta+1}{\eta-1} + \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (\text{A.69})$$

par une nouvelle utilisation de (A.34), où

$$\eta = \frac{V_i}{V_f} \quad (\text{A.70})$$

La quantité η est une mesure de l'intensité du choc. L'équation (A.69) montre que les différentes composantes de la couche du choc (i.e. les différentes valeurs de ω) imposent différentes restrictions sur Δt . La condition effective est obtenue en remplaçant le membre de droite de l'équation (A.69) par sa valeur minimale pour $-\frac{\pi}{2}\omega_0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}\omega_0$. On trouve comme minimum du dernier facteur du membre de gauche de l'équation (A.69), $\frac{2\eta^{\frac{1}{2}}}{\eta-1}$ et la condition de stabilité est

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2sc} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{\eta - 1} \quad (\text{A.71})$$

Pour une application pratique, il est commode d'exprimer l'équation (A.71) en fonction de la quantité L qui apparait dans la condition usuelle pour la stabilité hydrodynamique (A.63). Par l'élimination des p_i provenant des équations de Hugoniot (A.21), (A.22) et (A.8), on trouve une vitesse des chocs de

$$s = \frac{M}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{2}{(\gamma + 1)\eta - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\gamma \frac{p_f}{V_f} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{(\gamma + 1)\eta - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} s_{0f}, \quad (\text{A.72})$$

où s_{0f} est la vitesse du son, par rapport aux coordonnées lagrangiennes, dans la matière derrière le choc. En combinant les équations (A.71) et (A.72), et en utilisant l'équation (A.58), la condition de stabilité devient :

$$L_f = \frac{s_{0f}\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2c} \frac{\left[\left(\eta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \eta \right]^{\frac{1}{2}}}{\eta - 1}. \quad (\text{A.73})$$

Finalement, la force du choc, et, de fait, η , est généralement inconnue jusqu'à ce que le calcul ait été exécuté; il est donc recommandé de remplacer le membre de droite de l'équation (A.73) par son minimum suivant les valeurs de η . η peut varier dans l'intervalle $1 \leq \eta \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ (la valeur maximale correspondant à un choc infiniment fort) et le minimum de (A.73) est atteint pour la borne supérieure de l'intervalle, où le dernier facteur de l'équation (A.73) a la valeur $\gamma^{\frac{1}{2}}$. La condition finale de stabilité s'écrit donc :

$$L_f \leq \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2c}. \quad (\text{A.74})$$

On trouve que cette condition assure la stabilité des calculs dans les cas tests, alors que le non respect de cette condition entraîne des complications. On trouve aussi que le choix $c = 1$ apporte de bons résultats en pratique pour la représentation des chocs, et dans ce cas, la condition de stabilité est au pire légèrement plus sévère que celle qui doit être vérifiée (comparer avec l'équation (A.63)) pour assurer la stabilité du mouvement de la solution derrière le choc.

Annexe B

Code modifié

Fonction newton

```
function [x,y,z]=newton(EOS,dEOSe,dEOSp)

// resout EOS(...,...) = 0
i=0;
xold=q;
x=pold;
epsilon=10^(-2);

while((norm(xold-x))>=epsilon )
    xold=x;
    temp = EOS(e-((p+x)/2 +dp).* (taunew-tau),x,taunew);

    temp2 = -(taunew-tau)/2 * dEOSe(e,p,tau)+ dEOSp(e,p,tau);

    x=x-(temp)./(temp2);

    i=i+1;

\end
y=x;

endfunction
```

Code modifié

```
// Lagrange_1d_axi_ou_plan.sce;
// Modele 1D axisymetrique ou plan (nu=0 ou 1)
// Schema Lagrange saute-moutons (ordre 2 en temps et espace)
//
clear;
exec('newton.sci')
clc; lines(0);
N    = 1000;
nu   = 0; // (mesure r^nu dr), nu=0 (plan) ou 1 (axi)
L    = 1;
h    = L / N;
xm   = h/2 : h: L-h/2; // x mailles initiaux
xn   = 0 : h : L; // x noeuds initiaux
```

```

cfl    = 0.45;
gama   = 1.4; // EOS Gaz parfait
kappa  = gama-1;
it=0;
itgr=80;
time   = 0;
timemax = 0.28;
a1     = 1;
a2     = 0.63*2;
M      = 1; // masse molaire p = rho Runiv T
Runiv  = 8.31;

//Definition de l'equation d'etat et de ses derivees par rapport à l'energie et la pression :
deff("[z]=EOS(e,p,tau)", "z=e-p.*tau /(gama-1)")

deff("[w]=dEOSp(e,p,tau)", "w=-tau/(gama-1)")

deff("[x]=dEOSe(e,p,tau)", "x=1")

// Initialisation (compression)

u      = zeros(1, N+1);
rhoold = zeros(1, N);
rho    = zeros(1, N);
tau    = zeros(1, N);
tauold = zeros(1, N);
taunew = zeros(1, N);
T      = zeros(1, N); // Temperature
Told   = zeros(1, N);
p      = zeros(1, N);
pold   = zeros(1, N);
q      = zeros(1, N);
e      = zeros(1, N);
eold   = zeros(1, N);
c      = zeros(1, N);
mass   = zeros(1, N);
vol    = zeros(1, N);
//
// Initialisation
u(:)   = 0;
rho(:) = 1;
p(:)   = 1;
rho(1, N/2+1:N) = 0.125; // Sod-like
p(1, N/2+1:N)   = 0.1; // Sod-like
//
tau    = 1 ./ rho;
vol(:) = h;
mass   = rho .* vol .* (xm.^nu);
//u    = - xn .^ nu; u(1, 1:N/2) = 0;
//
e      = p ./ rho / kappa; // a modifier en fonction de l'equation d'etat
c      = sqrt(gama * p ./ rho); // a modifier en fonction de l'equation d'etat
T      = M/Runiv * p ./rho; // a modifier en fonction de l'equation d'etat
dt     = cfl * min(vol) / max(c);
//

```

```

// Grande boucle en temps
while (time<timemax)
  // calcul pas de temps
  dtold = dt; // Delta t^{n-1/2}
  dt = cfl * min(vol) / max(c); \textit{// Delta t^{n+1/2}}
  time = time + dt;
  it = it + 1;
  //
  // Etape noeuds maj vitesse u avec (rho,p,e)_j^{n+1}
  //
  // Pseudo
  du = u(1, 2:N+1) - u(1, 1:N);
  du = min(0, du);
  q = p - 0.5*a1*rho.*c.*du - 0.5*a2*rho.*abs(du).*du;

  //
  u(1, 2:N) = u(1,2:N) - 0.5*(dt+dtold)*..
    ( q(1, 2:N).* (xm(1,2:N)).^nu - q(1, 1:N-1).* (xm(1,1:N-1)).^nu )..
    ./ ((mass(1,1:N-1)+mass(1,2:N))/2) ..
    + 0.25 * nu * (dt+dtold)* ..
    ( vol(1, 1:N-1).*p(1, 1:N-1) + vol(1, 2:N).*p(1, 2:N) ) ..
    ./ ((mass(1,1:N-1)+mass(1,2:N))/2);
  //
  u(1,1) = 0; // Condition fixe CL gauche
  u(1,N+1) = u(1,N); // Neuman en vitesse CL droite
  //
  // MAJ des mailles et des noeuds
  //
  xm = xm + 0.5 * dt * (u(1, 2:N+1) + u(1, 1:N)); // x_j^{n+1}
  xn = xn + dt * u; // x_{j+1/2}^{n+1}
  //
  // Etape maille (x_j, tn -> tn+1) avec u_{j+/-1/2}^{n+1/2}
  //
  // MAJ des volumes
  vol = vol + dt * (u(1, 2:N+1) - u(1, 1:N)); // avec dt^{n+1/2}
  rhonew = mass ./ (vol .* (xm.^nu));
  taunew = 1 ./ rhonew;
  // de + p dtau = 0 (ordre 2)
  //
  dp = - 0.5*a1*rho.*c.*du - 0.5*a2*rho.*abs(du).*du;
  pold = p;

  p=newton(EOS,dEOSe,dEOSp); // Calcul de p par l'intermediaire de la fonction newton

  rhoold = rho;
  rho = rhonew;
  tauold = tau;
  tau = 1 ./ rho;
  eold = e;
  e = p ./ rho / kappa; // a modifier en fonction de l'equation d'etat
  Told = T;
  T = M/Runiv * p ./rho; // a modifier en fonction de l'equation d'etat
  c = sqrt(gama*p./rho); // a modifier en fonction de l'equation d'Ãt

  // Affichage
  if ~modulo(it, itgr)
    drawlater(); clf();

```

```
subplot(2,2,1), plot(xm, rho, '-'); xtitle('Density'); xgrid();
subplot(2,2,2), plot(xn, u, '-'); xtitle('Velocity'); xgrid();
subplot(2,2,3), plot(xm, p, '-'); xtitle('Pressure'); xgrid();
subplot(2,2,4), plot(xm, e, '-'); xtitle('Internal nrj'); xgrid();
drawnow;
end;
//
end; // for it
// Done !
```


Bibliographie

- [1] D.L. Hicks. Stability analysis of wondy (a hydrocode based pn the artificial viscosity method of von neumann and richtmyer) for a special case of maxwell's law. *Mathematics of computation*, 32, 1978.
- [2] J. VonNeumann and R.D. Richtmyer. a method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *journal of applied physics*, pages 232–237, Sep. 1949.
- [3] R.D. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference methods for initial-value problems - seconde edition*. Interscience, 1967.
- [4] B. Scheurer. Quelques schemas numeriques pour l'hydrodynamique lagrangienne. *DAM, cea*, 2000.
- [5] R. Courant, E. Isaacson, and M. Reeves. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communication on pure and applied mathematics*, 5(3) :243–255, 1952.
- [6] S.K. Godunov. a finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *math sbornik*, 47 :271–306, 1959.
- [7] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference schemes iv. a new approach to numerical convection. *Journal of computational physics*, 23 :276–299, 1977.
- [8] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43 :357–372, 1981.
- [9] T.J. Barth and D.C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA paper 89-0366, Jan. 1989.
- [10] P.D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws, ii. *Communication on pure and applied mathematics*, 10, 1957.
- [11] A. Harten and G. Zwas. self adjusting hybrid schemes for shock computations. *Journal of computational physics*, 9(3) :368–583, 1972.
- [12] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. ellipse - edition marketing, 1991.
- [13] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, 1996.
- [14] *Phenomenological study of liquid impacts 2D compressible two-fluid numerical simulations*, 2009.