

ENS Cachan
Département de Mathématiques/CMLA

Soutenance de Stage de L3

Directrice de stage : Karine Beauchard

<karine.beauchard@cmla.ens-cachan.fr>

Stabilisation d'une EDP au moyen de commandes bilinéaires

C. Mifsud <clement.mifsud@ens-cachan.fr>,
B. Moubêche <benjamin.moubeche@ens-cachan.fr>,
A. Pauthier <antoine.pauthier@ens-cachan.fr>,
P.D. Thizy <pthizy@ens-cachan.fr>

Cachan, le 24 Juin 2010

Table des matières

1	Préliminaires	6
1.1	Modèle Physique	6
1.2	Approche fondamentale en dimension finie	7
1.3	Choix des espaces	8
1.4	Premiers résultats	12
1.4.1	Convergence forte et overdamping	12
1.4.2	Généralisation : convergence forte pour l'indicatrice d'un intervalle	13
2	Simulations et conjectures	16
2.1	Cadre	16
2.1.1	Modèle d'étude	16
2.1.2	Modèle réel	17
2.2	Implémentation et problèmes	18
2.3	Résultats	18
2.3.1	Modèle d'étude	19
2.3.2	Modèle réel	26
3	Modèle d'étude	35
3.1	Système du modèle d'étude	35
3.1.1	Choix du contrôle et existence des solutions sur \mathbb{R}_+	35
3.1.2	Ensemble invariant	37
3.2	Stabilisation pour le modèle d'étude	38
3.2.1	Résultats préliminaires	38
3.2.2	Stabilisation faible du modèle d'étude	42
4	Modèle réel	44
4.1	Système pour le modèle réel	44
4.1.1	Choix du contrôle et existence des solutions sur \mathbb{R}_+	44
4.1.2	Ensemble invariant	45
4.2	Stabilisation du modèle réel	46
4.2.1	Résultats préliminaires	46
4.2.2	Stabilisation faible du modèle réel	48
4.2.3	Stabilisation forte pour $\mu = 1$	50
5	Annexes	56

Introduction

Ce stage se situe dans le domaine de l'Automatique. Dans ce domaine, nous considérons un système physique, modélisé par une équation aux dérivées partielles, sur laquelle nous pourrions agir au moyen d'une commande bilinéaire, appelée contrôle.

Nous sommes alors naturellement amenés à nous poser la question suivante : étant donné une condition initiale du système et une condition finale, existe-t-il une commande qui permette d'amener notre système de l'une à l'autre ?

Plus précisément, nous étudions le système suivant, obtenu à partir de l'équation des ondes, à laquelle nous avons ajouté un terme de frottement :

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) + u(t)\mu(x)w_t(t, x) = 0, x \in]0, 1[\\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x) \end{cases}$$

Nous cherchons donc un contrôle $u : t \mapsto u((w, w_t)(t))$ qui force la stabilisation du problème. Un tel contrôle sera appelé "loi feedback", car il impose au système un état en fonction de ses paramètres actuels. Cela revient à considérer un système automatique asservi en boucle fermée.



L'intérêt de ce modèle est qu'il correspond, peu ou prou, à une certaine réalité physique. C'est pourquoi, dans la suite du rapport, nous l'appelons "modèle réel". Nous sommes aussi amenés à considérer le modèle suivant, que nous appelons modèle d'étude :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)\mu(x)w = 0, t \in]0, T[, x \in]0, 1[\\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x) \end{cases}$$

Ce système n'a, à priori, aucune représentation physique. Son intérêt est purement mathématique, car certaines démonstrations s'avèrent plus simples dans ce cas. Nous pouvons ainsi nous familiariser avec les techniques mathématiques à employer.

L'objectif général de ce stage est donc de déterminer un contrôle de type loi feedback qui force la convergence vers la fonction nulle d'hypothétiques solutions du modèle réel et/ou du modèle d'étude.

Notre démarche au cours du stage a été la suivante :

1. Assimiler des connaissances théoriques pour étudier le problème, principalement en analyse fonctionnelle.
2. Etudier le cas de la dimension finie, notamment l'intérêt d'outils tels que le principe d'invariance de LaSalle et les fonctions de Lyapunov.
3. Etudier des cas simplifiés, afin d'obtenir des premières réponses et conjectures.
4. Déterminer la loi feedback la plus naturelle, sinon la plus efficace.
5. Etudier l'invariant de LaSalle dans les deux cas et déterminer sa dépendance à la fonction μ .
6. Etudier la convergence faible vers l'invariant.
7. Montrer la convergence forte dans certains cas.

Nous nous sommes également appuyés sur des simulations numériques, présentées dans ce rapport, pour déterminer les bonnes conjectures et illustrer nos raisonnements.

Le chapitre 1 pose les préliminaires de ce stage, notamment l'approche en dimension finie étudiée dans le cours de K. Beauchard [1], et présente deux résultats classiques dans des cas simplifiés. Le chapitre 2 présente toutes les simulations numériques effectuées pendant ce stage. Le chapitre 3 est consacré à l'étude du modèle d'étude ; nous y démontrons notamment la convergence faible des solutions vers 0, sous réserve que l'invariant associé au système soit réduit à $\{0\}$. Le chapitre 4 est lui consacré à l'étude du modèle réel. Après l'étude de l'invariant, nous y démontrons la convergence faible des solutions dans un cadre plus restrictif ($\mu(x) > 0$ presque partout), et la convergence forte dans le cas particulier $\mu = 1$.

Glossaire

Ce glossaire comprend une liste des symboles et notations utilisés dans ce rapport. Il n'est pas nécessaire à la bonne compréhension du rapport, tous les symboles et notations étant définis et expliqués au fur et à mesure de leur introduction.

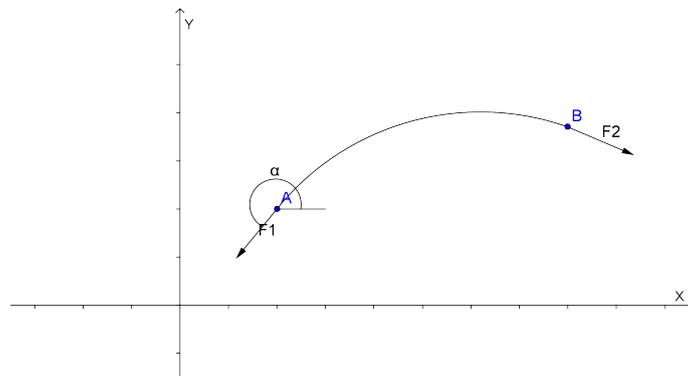
- $\mathcal{L}(t)$: fonction de Lyapunov associée au système étudié. La plupart du temps, elle s'identifie à la moitié de la norme au carré des solutions : $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}((w, w_t)(t)) = \frac{1}{2} \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}^2$.
- $\varphi_k(x)$: k -ième vecteur de la base orthogonale en sinus de $H_0^1(0, 1)$. $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: correspond au produit scalaire sur $L^2(0, 1)$, quand ce n'est pas spécifié.
- μ : fonction appartenant à $L^\infty(0, 1)$ imposée par le système.
- H_0^1 : espace de Sobolev $H_0^1(0, 1)$.
- L^2 : espace de Lebesgue $L^2(0, 1)$.
- $u, u(t)$, loi feedback : fonction avec laquelle on agit sur système, généralement de la forme $u(t) = u((w, w_t)(t))$.
- \mathcal{A} : opérateur maximal monotone de l'équation des ondes.
$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xx} \end{pmatrix}$$
- $e^{\mathcal{A}t}$: semi-groupe continu de contractions généré par l'opérateur \mathcal{A} .
- \mathcal{B} : opérateur continu, correspondant dans notre étude aux termes de frottement.
- A, B : matrices correspondant respectivement aux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} dans l'approximation de Galerkin en dimension finie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Modèle Physique

Pour modéliser physiquement le problème, on peut imaginer une corde, dont les deux extrémités sont fixées, soumise à une action extérieure.



On va alors procéder à un bilan des forces, en x et en $x + dx$, et faire l'approximation $\alpha \ll 1$

$$\vec{F}_1 = -T(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) \simeq -T \left(\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \vec{e}_y \right),$$

et de même

$$\vec{F}_2 = +T \left(\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x}(t, x + dx) \vec{e}_y \right),$$

où T représente la norme de la tension exercée sur la corde. Puis, un développement limité au premier ordre nous donne :

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_1 \simeq T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x) dx \vec{e}_y.$$

On peut alors appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique, qui nous donne, en notant μ la masse linéique de la corde et \vec{v} la vitesse du centre de masse

$$\mu dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \vec{e}_y,$$

soit,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient ainsi l'équation dite "des ondes", à laquelle nous ajouterons notre terme de frottement, $u(t)\mu(x)w_t(t, x)$ où :

- u représente notre contrôle,
- μ modélise l'interaction entre la corde et le contrôle,
- w_t est la différentielle en temps de la fonction w , avec $w(t, x)$ l'écart vertical de la corde en x à l'instant t .

1.2 Approche fondamentale en dimension finie

La stabilisation en dimension finie inspire certains résultats similaires, démontrés dans un cadre plus général dans la suite du rapport. Ces résultats sont déjà bien connus, et sont ici tirés de [1].

Principe d'invariance de LaSalle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $E := \mathbb{R}^n$. Soient $X_0 \in E$, $(A, B) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $u \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. On dit que $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ est solution du système bouclé de condition initiale X_0 si

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = AX(t) + (u \circ X)(t)BX(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

On suppose aussi qu'il existe une *fonction de Lyapounov* (c'est-à-dire décroissante le long des trajectoires) $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ telle que, si X est solution du système bouclé (1.2.1), alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{d}{dt}(\mathcal{L} \circ X)(t) = -(u \circ X)(t)^2 \leq 0 \quad (1.2.2)$$

$$\exists C > 0, \forall Y \in E, \|Y\|_E^2 \leq C\mathcal{L}(Y). \quad (1.2.3)$$

Théorème 1.2.1

Soit $X_0 \in E$. Soit X solution du système bouclé (1.2.1) de condition initiale X_0 . On suppose que

$$Inv := \{Y \in E \mid \forall t \geq 0, (u \circ \hat{Y})(t) = 0\} = \{0\}, \quad (1.2.4)$$

où l'on note \hat{Y} la solution de (1.2.1) de condition initiale Y . On a alors

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{E} 0.$$

Preuve :

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tendant en croissant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après (1.2.2) et (1.2.3), la suite $(X(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E , car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|X(t_n)\|_E^2 \leq C\mathcal{L}(X(t_n)) \leq C\mathcal{L}(X_0). \quad (1.2.5)$$

On montre que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite $(X(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $Y_0 \in E$, une valeur d'adhérence de $(X(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe φ extraction telle que

$$X(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} Y_0.$$

D'autre part, par (1.2.2) et (1.2.3), $\mathcal{L} \circ X$ est décroissante positive. Notons donc

$$L := \lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathcal{L} \circ X)(t). \quad (1.2.6)$$

Soit maintenant Y , solution du système bouclé de condition initiale Y_0 . Par théorème de continuité par rapport aux conditions initiales, en remarquant que $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X(t_{\varphi(n)} + t)$ est solution du système bouclé (1.2.1) de condition initiale $X(t_{\varphi(n)})$, on a

$$\forall t \geq 0, X(t_{\varphi(n)} + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} Y(t). \quad (1.2.7)$$

D'où, par continuité de \mathcal{L} , (1.2.6) et (1.2.7),

$$\forall t \geq 0, L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{L} \circ X)(t + t_{\varphi(n)}) = (\mathcal{L} \circ Y)(t).$$

D'où

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \circ Y)(t) = -(u \circ Y)(t)^2 = 0.$$

Ainsi, par l'hypothèse (1.2.4), $Y_0 = 0$. D'où, le résultat annoncé. On a enfin la convergence cherchée :

$$X(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} 0$$

par (1.2.5), les fermés bornés étant compacts dans E .

□

Remarque

Notons que l'ensemble invariant Inv doit nécessairement être réduit à $\{0\}$ pour espérer la stabilisation en 0, dans le cas où A n'admet que des valeurs propres positives. En effet, si un élément X_0 non nul est dans l'ensemble Inv , la solution du système (1.2.1) de condition initiale X_0 est aussi solution de l'équation $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ et la norme de cette solution ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

1.3 Choix des espaces

Dans toute la suite du rapport, quand on ne précise pas l'intervalle de définition des fonctions, on se place sur l'intervalle $(0, 1)$. L'équation des ondes peut être résolue dans les espaces \mathcal{C}^k en développant en séries de Fourier :

Théorème 1.3.1

Soit $w_0 \in C^3([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $w_0 = w_0'' = 0$ en $x=0$ et $x=1$, et $w_1 \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $w_1 = w_1'' = 0$ en $x=0$ et $x=1$.

Alors $w(t, x) = \sum_{k \geq 1} \left(\langle w_0 | \varphi_k \rangle \cos(k\pi t) + \frac{\langle w_1 | \varphi_k \rangle}{k\pi} \sin(k\pi t) \right) \varphi_k(x)$,

appartient à $C^2([0, T] \times [0, 1], \mathbb{R})$ et vérifie l'équation des ondes point par point :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, t \in]0, T[, x \in]0, 1[\\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases}$$

Cependant, on peut remarquer que ce résultat part d'une condition C^3 et arrive à une solution C^2 . Cette perte de régularité nous empêche toute tentative de démonstration d'existence de solution via une méthode du point fixe pour l'équation. Il apparaît donc nécessaire de se placer dans des espaces où n'apparaît pas cette perte de régularité, comme les espaces de Sobolev.

Definition 1.3.2

On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{k,p} := \{u \in L^p \mid \forall n \leq k, \exists g \in L^p, \forall \varphi \in C_c^k, \int u^{(n)} \varphi' = - \int g \varphi\}.$$

On pose alors $H^k = W^{k,2}$.

Definition 1.3.3 Norme

$$\text{Soit } u \in W^{k,p}, \|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{n=0}^k \|u^{(n)}\|_{L^p} \simeq \left(\sum_{n=0}^k \|u^{(n)}\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Definition 1.3.4

On pose $H_0^1 := \overline{C_c^\infty}$, dans H^1 .

Remarque

On a alors, $\|u\|_{H_0^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}$. Cependant, nous utilisons plutôt dans la suite sur H_0^1 la norme définie par $\|u\|_{H_0^1} = \|u'\|_{L^2}$. On peut en effet montrer, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, que cette norme est équivalente à celle de la définition (1.3.3).

Proposition 1.3.5

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H_0^1(0, 1) &= \{u \in H^1(0, 1) \mid u(0) = u(1) = 0\} \\ &= \{u \in L^2(0, 1) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |k \int_0^1 u(x) \sin(k\pi x) dx|^2 < \infty\}. \end{aligned}$$

Preuve :

– Pour la première égalité, voir [2] page 133.

– Soit $u \in H_0^1(0, 1)$, alors $u(0) = u(1) = 0$. En intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^1 u(x) \sin(k\pi x) dx = \left[-u(x) \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 u'(x) \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| k \int_0^1 u(x) \sin(k\pi x) dx \right|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^1 u'(x) \cos(k\pi x) dx \right|^2 \\ &\leq C \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (\text{Bessel-Parseval}). \end{aligned}$$

Soit $u \in L^2(0, 1)$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \left| k \int_0^1 u(x) \sin(k\pi x) dx \right|^2 < \infty$.

Calculons u' dans \mathcal{D}' .

Soit $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\langle u', \varphi \rangle = \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \sum_{k=1}^{\infty} b_k(u) b_k(\varphi'),$$

où $b_k(f) = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx$. Ainsi

$$\begin{aligned} b_k(\varphi') &= -k\pi \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \cos(k\pi x) dx \\ &= -k\pi b_k(\varphi) \\ \langle u', \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(u) k\pi b_k(\varphi) \\ &= \int_0^1 \psi(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

où $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k(u) \cos(k\pi x)$, qui est bien définie dans L^2 .

□

Proposition 1.3.6

1. $W^{1,p}$ est un espace de Banach.
2. H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Preuve :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$; donc (u_n) et (u_n') sont des suites de Cauchy dans L^p . Par conséquent, $u_n \xrightarrow{L^p} u$ et $u_n' \xrightarrow{L^p} g$. On a

$$\forall \varphi \in C_c^1 \quad \int u_n \varphi' = - \int u_n' \varphi$$

et à la limite

$$\forall \varphi \in C_c^1 \quad \int u \varphi' = - \int g \varphi.$$

Donc $u \in W^{1,p}$, $u' = g$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$.

2. Voir démonstration dans [2] page 122.

□

Definition 1.3.7

Nous utiliserons aussi l'espace $H^{-1}(0, 1)$ qui est le dual de $H_0^1(0, 1)$ pour le produit scalaire L^2 .

$$\|f\|_{H^{-1}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{k\pi} \right|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in H^{-1}(0, 1)$$

Proposition 1.3.8

Les injections

1. $H_0^1(0, 1) \hookrightarrow L^2(0, 1)$
2. $L^2(0, 1) \hookrightarrow H^{-1}(0, 1)$

sont compactes.

Preuve

1. voir [2] page 134.
2. Identifions au préalable $L^2(0, 1)$ avec $l^2(\mathbb{N}^*)$ et $H^{-1}(0, 1)$ à $h^{-1}(\mathbb{N}^*)$. Il faut montrer que la boule unité de $l^2(\mathbb{N}^*)$ est relativement compacte dans $h^{-1}(\mathbb{N}^*)$. Soit donc $(x_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $l^2(\mathbb{N}^*)$, vérifiant

$$\sum_{k \geq 1} |x_k^n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a, en appliquant le procédé d'extraction diagonale,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_1^n| \leq 1$, donc il existe une extractrice φ_1 telle que $x_1^{\varphi_1(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} x_1^\infty \leq 1$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_2^n| \leq 1$, donc il existe une extractrice φ_2 telle que $x_2^{\varphi_2(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} x_2^\infty \leq 1$,
- ...
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_j^n| \leq 1$, donc il existe une extractrice φ_j telle que $x_j^{\varphi_j(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} x_j^\infty \leq 1, \quad (j \geq 1)$.

On pose alors $\psi(n) := \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$. On vérifie enfin que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_k^{\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} x_k^\infty.$$

Montrons enfin que $\|x^{\psi(n)} - x^\infty\|_{h^{-1}(\mathbb{N}^*)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On a en effet pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- $\left| x_k^{\psi(n)} - x_k^\infty \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$,
- $\left| x_k^{\psi(n)} - x_k^\infty \right|^2 \leq \frac{4}{(k\pi)^2}$ et $\left(\frac{4}{(k\pi)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^1(\mathbb{N}^*)$.

D'où par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 1} \left| x_k^{\psi(n)} - x_k^\infty \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} 0,$$

$$\text{d'où } \|x^{\psi(n)} - x^\infty\|_{h^{-1}(\mathbb{N}^*)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

1.4 Premiers résultats

1.4.1 Convergence forte et overdamping

On se place dans le cas diagonal du modèle réel, avec $\mu = 1$ et un contrôle constant. Ce cas permet de mettre en évidence un phénomène intéressant que l'on peut trouver dans la littérature, celui de l'overdamping, à savoir que pour une fréquence donnée, augmenter le freinage n'entraîne pas forcément une plus forte décroissance de la solution, bien au contraire.

Cadre

Le cas considéré est donc

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)w_t = 0 \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Où $u(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$.

On décompose $w(t, \cdot)$ sur une base orthogonale $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de H_0^1 , en posant

$$w(t, x) = \sum_{k \geq 1} a_k(t) \varphi_k(x),$$

où $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Résolution

On résout en décomposant sur la base orthogonale, composante par composante. Les a_k vérifient alors :

$$a_k'' + \alpha a_k' + (k\pi)^2 a_k = 0.$$

En posant $\Delta_k = \frac{\alpha^2 - 4(k\pi)^2}{2}$, on distingue deux cas.

Premier cas : $\alpha \leq 2k\pi$. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors

$$r_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4(k\pi)^2 - \alpha^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4(k\pi)^2 - \alpha^2}}{2}.$$

Donc $t \mapsto a_k(t)$ décroît en $\exp(-\frac{\alpha t}{2})$.

Second cas : $\alpha \geq 2k\pi$. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors

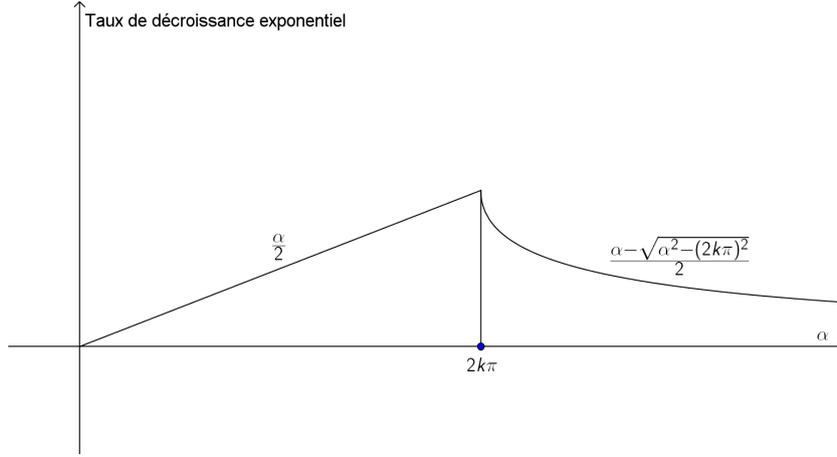
$$r_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(k\pi)^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4(k\pi)^2}}{2}.$$

Dans ce cas, $t \mapsto a_k(t)$ décroît en $\exp(-\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(k\pi)^2}}{2} t)$.

Ainsi, $t \mapsto \|a_k(t)\|$ décroît exponentiellement en

$$\begin{cases} \exp(-\frac{\alpha t}{2}) & \text{quand } \alpha \leq 2k\pi \\ \exp(-\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(k\pi)^2}}{2} t) & \text{quand } \alpha \geq 2k\pi. \end{cases}$$

Le taux de décroissance exponentielle augmente donc linéairement avec le freinage α , jusqu'à $\alpha = 2\pi$; puis décroît, et même tend vers 0. C'est le phénomène paradoxal "d'overdamping".



1.4.2 Généralisation : convergence forte pour l'indicatrice d'un intervalle

Le but de cette section est de montrer que, pour le modèle réel avec $\mu(x) = \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$, où $(a, b) \subset (0, 1)$, la loi feedback $u(t) = 1$ permet la stabilisation forte et exponentielle. Ce résultat, bien que classique, est détaillé ici. Il repose sur une inégalité d'observabilité et un argument d'énergie, tirés de [6] Précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.1

Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$, la solution du système

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + w_t \mathbb{1}_{(a,b)}(x) = 0, x \in (0, 1), \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

satisfait

$$\|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2} \leq \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2} K e^{-ct}.$$

Ainsi, le cas $\mu = \mathbb{1}_{(a,b)}$ ne présente pas de difficulté : on n'a pas besoin de recourir à des lois feedback élaborées. Cependant, les techniques classiques utilisées pour démontrer ce théorème ne sont pas adaptables au cas général (μ quelconque). C'est la raison pour laquelle nous nous sommes tout de même penchés sur la stabilisation dans le cas $\mu = 1$, avec la loi feedback $u(t) = \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2$, dans l'espoir de trouver des techniques marchant aussi sur le cas général.

La preuve du théorème précédent repose sur l'inégalité d'observabilité suivante (le terme 'observabilité' vient de l'interprétation suivante de l'inégalité : si l'observation sur (a, b) est toujours nulle alors la solution est nulle partout).

Théorème 1.4.2

Pour tout $T > 2 \max\{a, 1 - b\}$ et pour tout intervalle non vide $(a, b) \subset (0, 1)$, il existe $C_1 = C_1(T, (a, b)) > 0$ telle que, pour tout $(W_0, W_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$, la solution de

$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = 0, x \in (0, 1), \\ W(t, 0) = W(t, 1) = 0, \\ W(0, x) = W_0(x), W_t(0, x) = W_1(x) \end{cases}$$

satisfait

$$\int_0^T \int_{(a,b)} W_t(t, x)^2 dx dt \geq C_1 \int_0^1 W_0'(x)^2 + W_1(x)^2 dx.$$

Preuve :

C'est relativement aisé quand $(a, b) = (0, 1)$ et $T \geq 2$ (pour $T = 2$, on applique deux fois l'inégalité de Parseval ; on trouve $C_1 = 1$. Le cas $T > 2$ quelconque s'en déduit évidemment). Le cas (a, b) quelconque est traité dans le livre de S. Erzedova et E. Zuazua [6].

□

On déduit du Théorème 1.4.2 le résultat suivant.

Théorème 1.4.3

Pour tout intervalle non vide $(a, b) \subset (0, 1)$ et pour tout $T > 2 \max\{a, 1 - b\}$, il existe $C_2 = C_2(T, (a, b)) > 0$ telle que, pour tout $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$, la solution de (1.4.2) satisfait

$$\int_0^T \int_{(a,b)} w_t(t, x)^2 dx dt \geq C_2 \int_0^1 w_0'(x)^2 + w_1(x)^2 dx.$$

Preuve :

En appliquant le Théorème 1.4.2 avec $W_0 = w_0$ et $W_1 = w_1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_0'(x)^2 + w_1(x)^2 dx &\leq \frac{1}{C_1} \int_0^T \int_{(a,b)} W_t(t, x)^2 dx \\ &\leq \frac{2}{C_1} \int_0^T \int_{(a,b)} w_t(t, x)^2 + y_t(t, x)^2 dx \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

où $y := w - W$. On a, en notant $\mathcal{L}[(y, y_t)(t)] := \frac{1}{2} \int_0^1 y_x(t, x)^2 + y_t(t, x)^2 dx$ l'énergie du système

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}[(y, y_t)(t)] &= \int_{(a,b)} w_t(t, x) y_t(t, x) dx \\ &\leq \|w_t(t)\|_{L^2(a,b)} \|y_t(t)\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)} \sqrt{\mathcal{L}[(y, y_t)(t)]}; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{L}[(y, y_t)(t)]} \leq \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_{L^2(a,b)},$$

donc

$$\sqrt{\mathcal{L}[(y, y_t)(t)]} \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|w_t(s)\|_{L^2(a,b)} ds.$$

Ainsi, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathcal{L}[(y, y_t)(t)] \leq \frac{t}{4} \int_0^t \|w_t(s)\|_{L^2(a,b)}^2 ds.$$

On déduit alors de (1.4.3) que

$$\int_0^1 w_0'(x)^2 + w_1(x)^2 dx \leq \frac{2}{C_1} \left(1 + \frac{T}{4}\right) \int_0^T \int_{(a,b)} w_t(t,x)^2 dx dt.$$

□

Preuve du Théorème 1.4.1 :

Fixons $T > 2 \max\{a, 1 - b\}$ et $C_2 = C_2(T, a, b)$ comme dans la Proposition (1.4.3). En notant \mathcal{L} l'énergie habituelle, on a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\|w_t(t)\|_{L^2(\omega)}^2,$$

donc

$$\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}(0) \leq - \int_0^T \int_{(a,b)} w_t(t,x)^2 dx dt \leq -C_2 \mathcal{L}(0).$$

L'équation étant autonome, on en déduit que

$$\mathcal{L}(NT) \leq (1 - C_2)^N \mathcal{L}(0), \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Comme \mathcal{L} est décroissante, on obtient la décroissance exponentielle de tout le profil.

En effet, soit $t \in [0, T[$, alors

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T) \leq (1 - C_2)^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \mathcal{L}(0) \leq (1 - C_2)^{\frac{t}{T}-1} \mathcal{L}(0) \leq e^{-t(-\ln(1-C_2))/T} (1 - C_2)^{-1} \mathcal{L}(0).$$

Donc en posant $c = -\frac{\ln(1-C_2)}{T} > 0$ et $K = (1 - C_2)^{-1}$ on obtient le résultat énoncé.

□

Chapitre 2

Simulations et conjectures

2.1 Cadre

On étudiera ici le modèle réel ainsi que le modèle d'étude. Les simulations se font à partir de l'approximation de Galerkin : l'idée est d'approximer la solution globale en négligeant les hautes fréquences de sa série de Fourier.

Nous nous ramenons donc à l'étude d'une équation différentielle ordinaire (EDO).

2.1.1 Modèle d'étude

Pour rappel, le système étudié est le suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)\mu(x)w = 0 \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x) \quad (w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1) \\ u(t) = \langle \mu w, w_t \rangle_{L^2} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Le choix du feedback " $u(t) = \langle \mu w, w_t \rangle_{L^2}$ " sera justifié au chapitre suivant.

En écrivant $w(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)\varphi_k(x)$ où $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} &= \int_0^1 (w_{xx} + u\mu w)\varphi_k \\ \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} &= \int_0^1 (-(k\pi)^2 w + u\mu w)\varphi_k \\ \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} &= -(k\pi)^2 y_k(t) + u(t) \sum_{j=0}^{+\infty} y_j(t) \langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle. \end{aligned}$$

Formellement, l'EDP est équivalente à

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} - u(t)B \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où

$$A = (A_{j,k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\pi^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -4\pi^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; B = (B_{j,k}) = (\langle \mu \varphi_j, \varphi_k \rangle)_{1 \leq j, k \leq +\infty}$$

Par approximation spectrale, on obtient le système d'ordre 1 suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} - u(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

où $\tilde{A} = (A_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$ et $\tilde{B} = (B_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$.

2.1.2 Modèle réel

Ici, le système étudié est

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)\mu(x)w_t = 0 \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x) \quad (w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1) \\ u(t) = \langle \mu w_t, w_t \rangle_{L^2}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

On obtient de même l'EDO d'ordre 1 suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} - u(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Objectifs

Nous résolvons numériquement les EDO (2.1.2) et (2.1.4) sur un intervalle $[0, T]$ fixé pour un n donné et en augmentant n et T , nous essayons de conclure sur une éventuelle convergence faible ou forte vers $(0, 0)$ dans $(H_0^1 \times L^2)$.

2.2 Implémentation et problèmes

La résolution des EDO s'est faite sous Matlab 7.4.0 (R2007a) via la fonction `ode45`.

Nous créons d'abord les matrices $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$ de manière itérative (complexité de calcul : $O(n^2)$, taille des données stockées : $O(n^2)$).

Il faut noter que le calcul d'intégrale n'a pas été reprogrammé, car ces calculs ne sont déterminants que lors des calculs préliminaires de y_0 et des matrices précédentes.

Ensuite il nous faut calculer (dans le cas du modèle réel)

$$u\left(\begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}\right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Y'_k Y'_l \langle \mu \varphi_l, \varphi_k \rangle.$$

Il suffit de remarquer que $u\left(\begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}\right) = (BY')^t Y'$ où A^t est la transposée de A .

Puis, il nous faut résoudre le système différentiel (2.1.2) (et (2.1.4) de manière similaire).

Le programme est limité par cette dernière étape. En effet, la complexité des calculs demandés par `ode45` limite notre travail ; nous avons essayé de limiter les données stockées, mais l'efficacité du programme ne s'en est pas trouvée améliorée.

Temps de calcul pour $N=150, T=10$: ~ 30 min.

Temps de calcul pour $N=40, T=1000$: ~ 90 min.

Enfin, nous calculons l'énergie associée au système

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{k=1}^n (k\pi Y_k(t))^2 + Y'_k(t)^2 \quad (\text{norme } (H_0^1 \times L^2) \text{ au carré}),$$

et pour le modèle réel nous calculons aussi l'énergie

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{Y_k(t)}{k\pi}\right)^2 + Y'_k(t)^2 \quad (\text{norme } (L^2 \times H^{-1}) \text{ au carré})$$

qui nous permet de tester une éventuelle convergence faible dans $(H_0^1 \times L^2)$, car s'il y a convergence faible dans $(H_0^1 \times L^2)$ alors il y a convergence forte dans $(L^2 \times H^{-1})$ par injection compacte de $(H_0^1 \times L^2)$ dans $(L^2 \times H^{-1})$.

Pour mieux comparer les différents résultats, nous avons tracé l'approximation linéaire par la méthode des moindres carrés de ces énergies pour évaluer la vitesse de décroissance en temps court de ces dernières par rapport à l'augmentation de la fréquence de coupure.

2.3 Résultats

Nous avons effectué ces manipulations avec deux fonctions μ différentes et pour la même condition initiale ($w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x), w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$) dont le développement en série de Fourier est évident (ce qui nous a permis de contrôler nos résultats).

2.3.1 Modèle d'étude

Dans un premier temps, nous considérons le cas $\mu = 1$. Pour une même condition initiale, nous traçons la norme $(H_0^1 \times L^2)$ de $\mathcal{L}(t)$ pour différentes fréquences de coupure N ($N = 25, 75, 150$). Puis nous regardons l'influence de la fréquence de coupure en temps long.

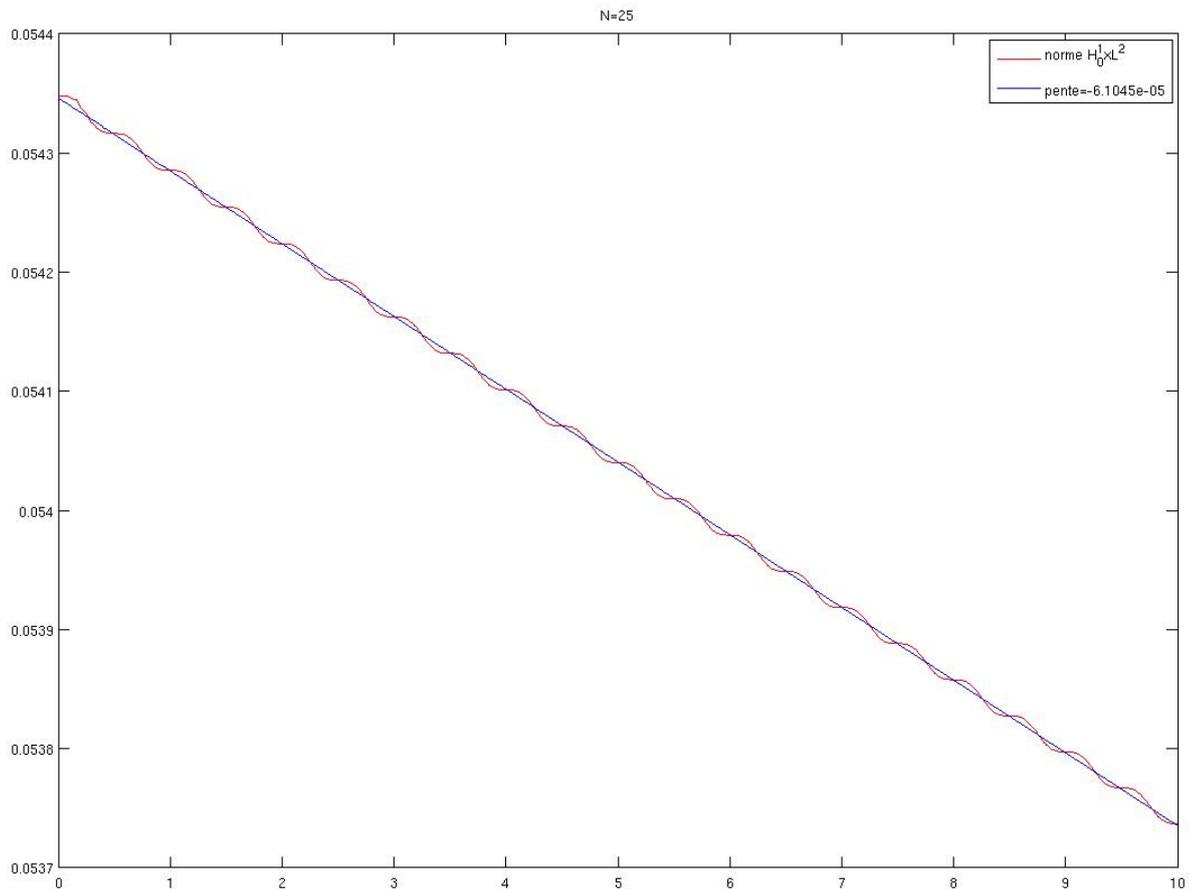


FIG. 2.1 - $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît, ce qui est normal d'après le choix de u , selon une pente -6.1045×10^{-5} .

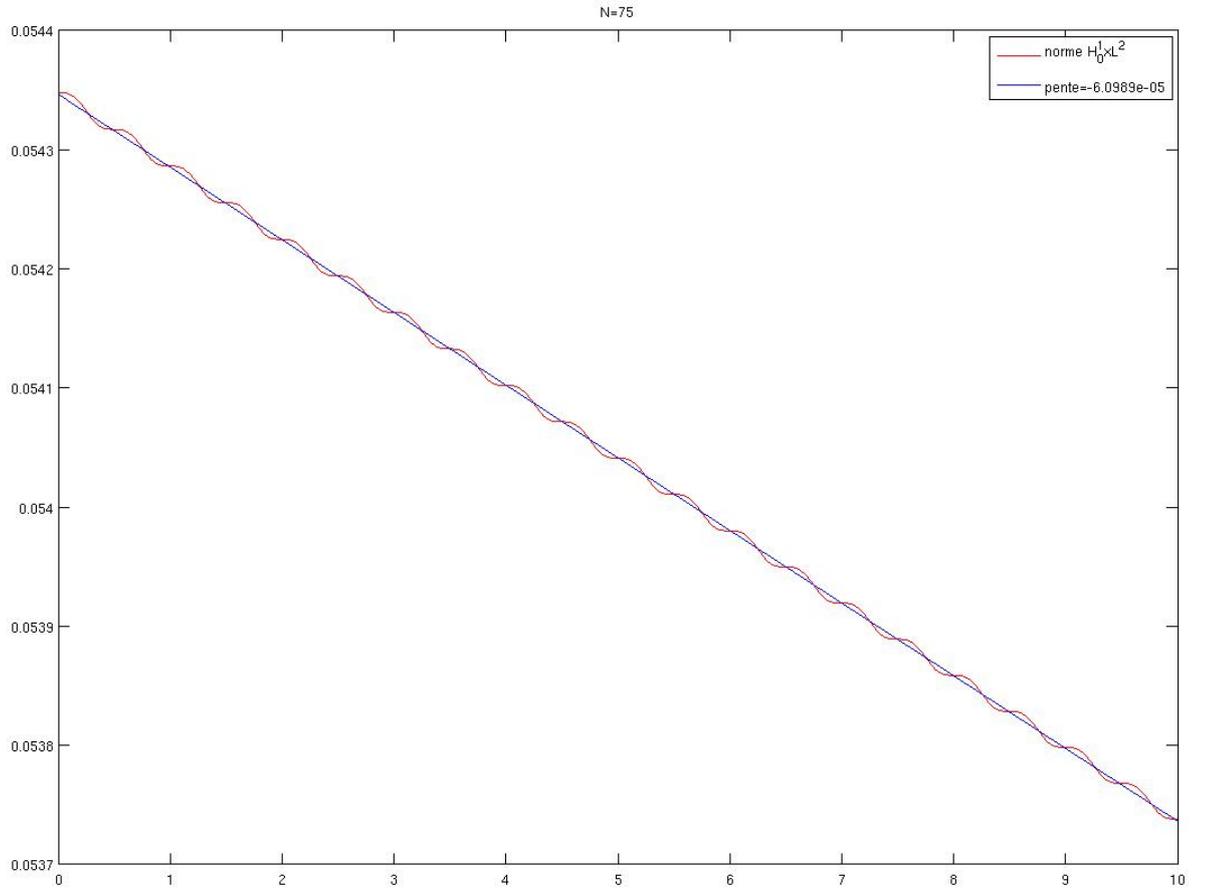


FIG. 2.2 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -6.0989×10^{-5} .

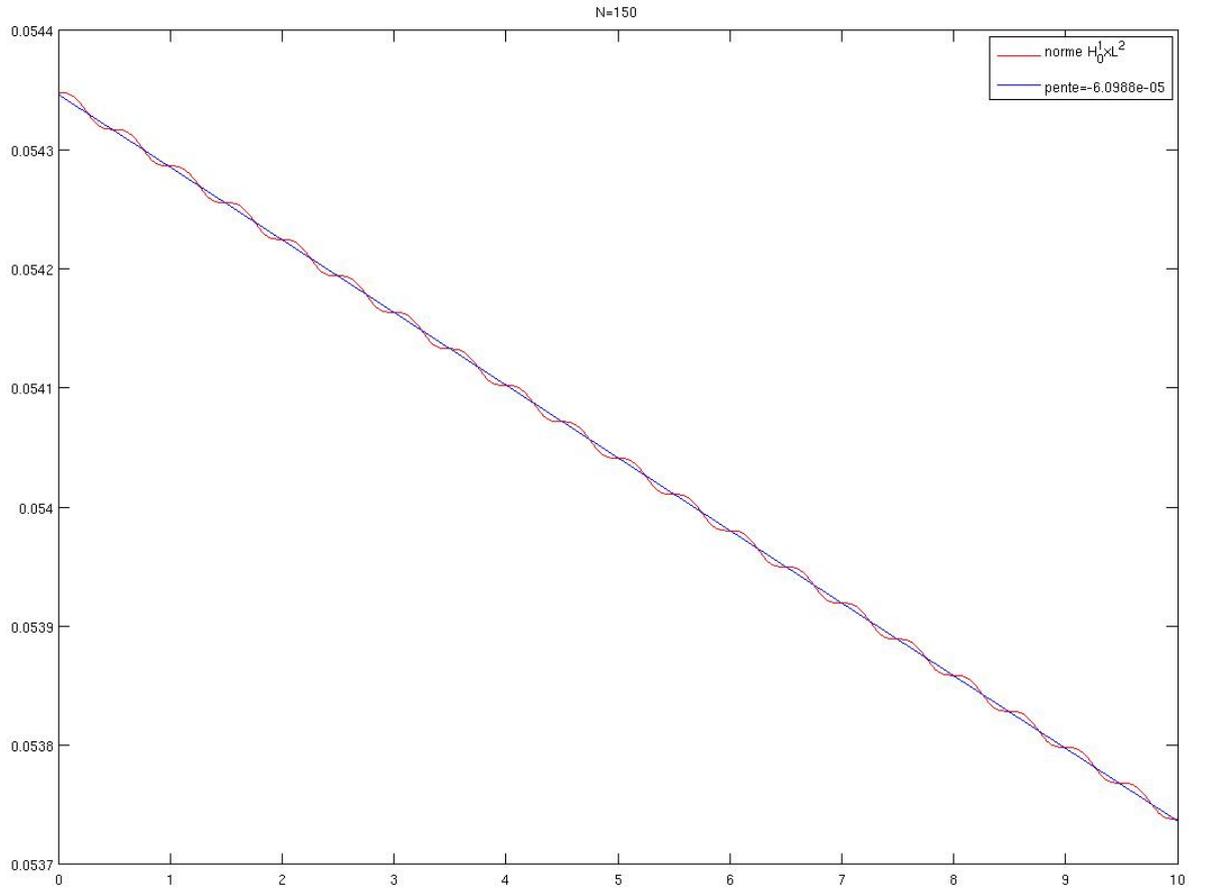


FIG. 2.3 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -6.0988×10^{-5} .

Grâce à ces trois simulations, on constate que la décroissance de \mathcal{L} ne se détériore pas quand N croît ; ce qui incite à penser que la stabilisation forte du modèle d'étude a lieu en dimension infinie pour $\mu = 1$.

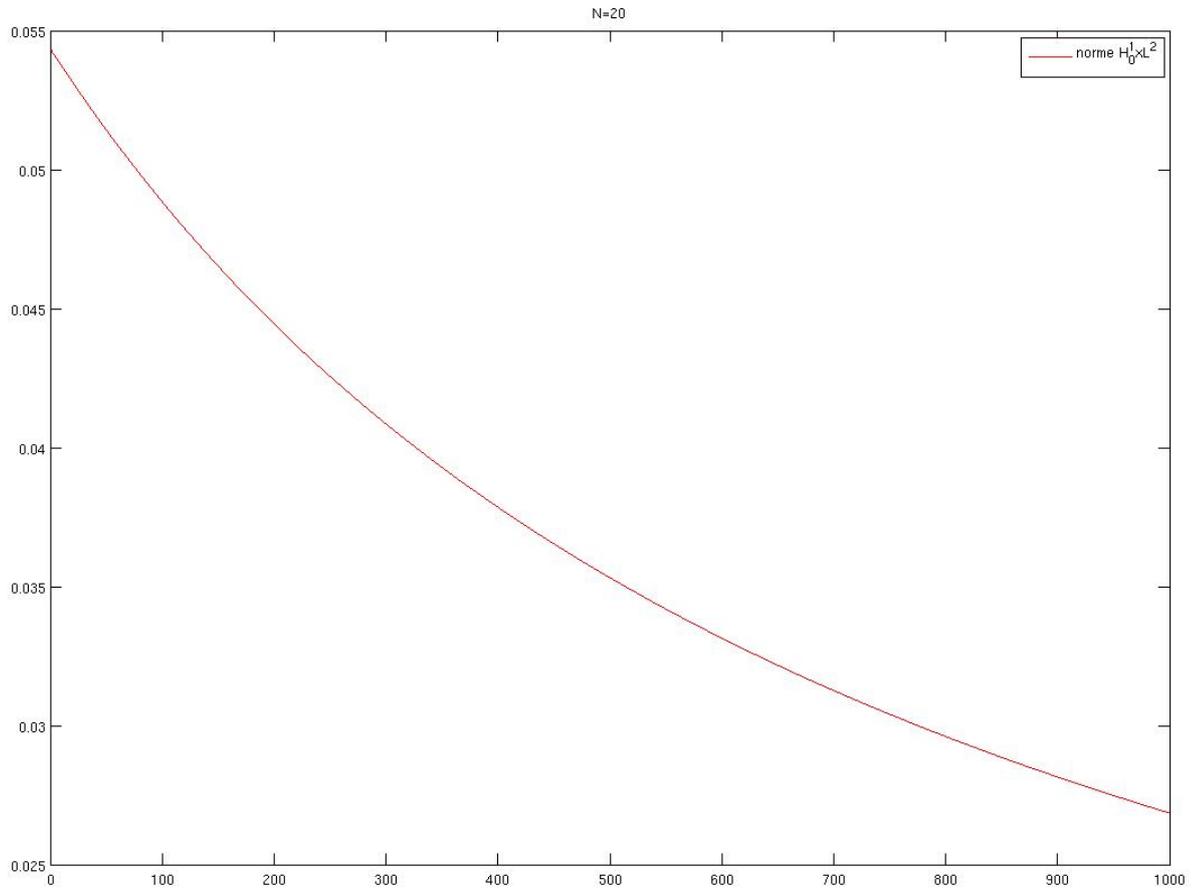


FIG. 2.4 - $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons qu'en temps long \mathcal{L} décroît de moins en moins rapidement.

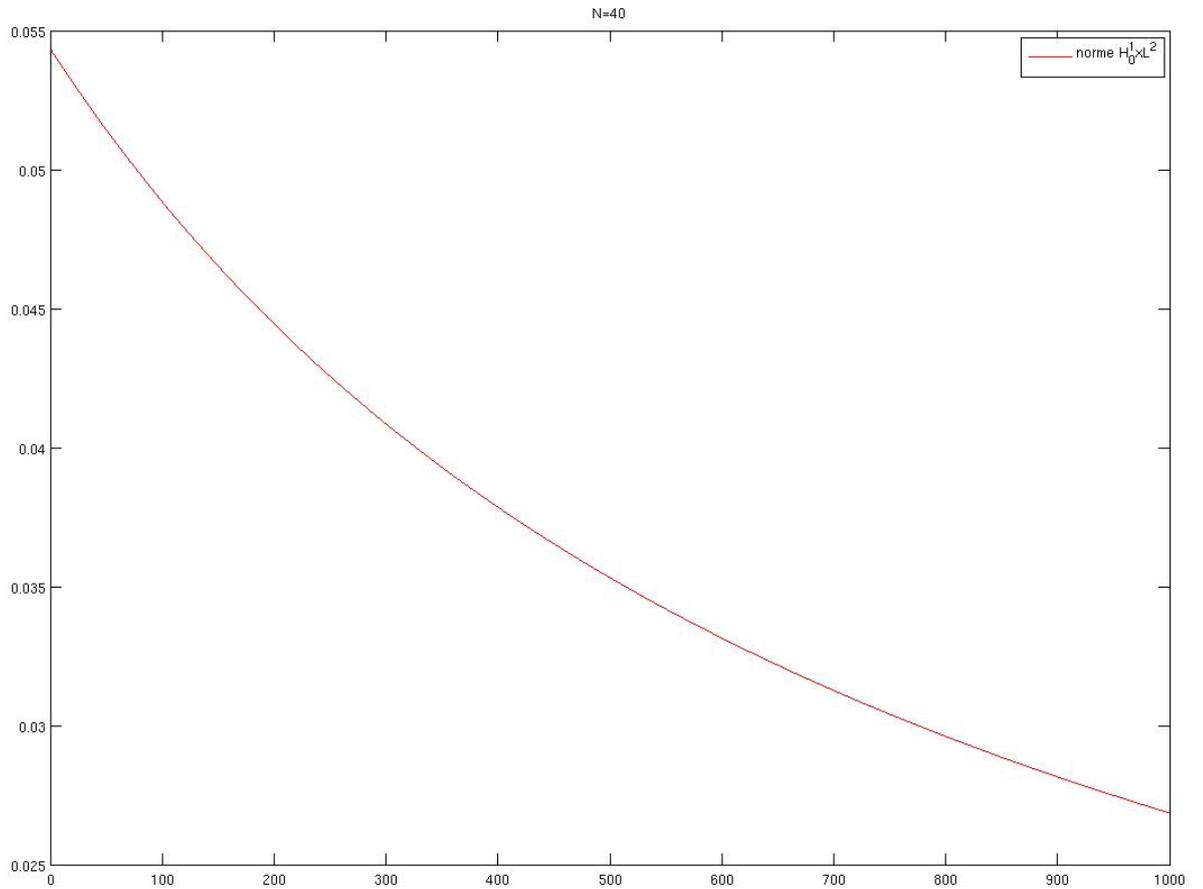


FIG. 2.5 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons qu'en temps long \mathcal{L} décroît de moins en moins rapidement de manière quasiment indépendante de N .

Dans un deuxième temps, nous considérons le cas $\mu(x) = x^2$. Pour une même condition initiale, nous traçons la norme $(H_0^1 \times L^2)$ de $\mathcal{L}(t)$ pour différentes fréquences de coupure N ($N = 75, 150$).

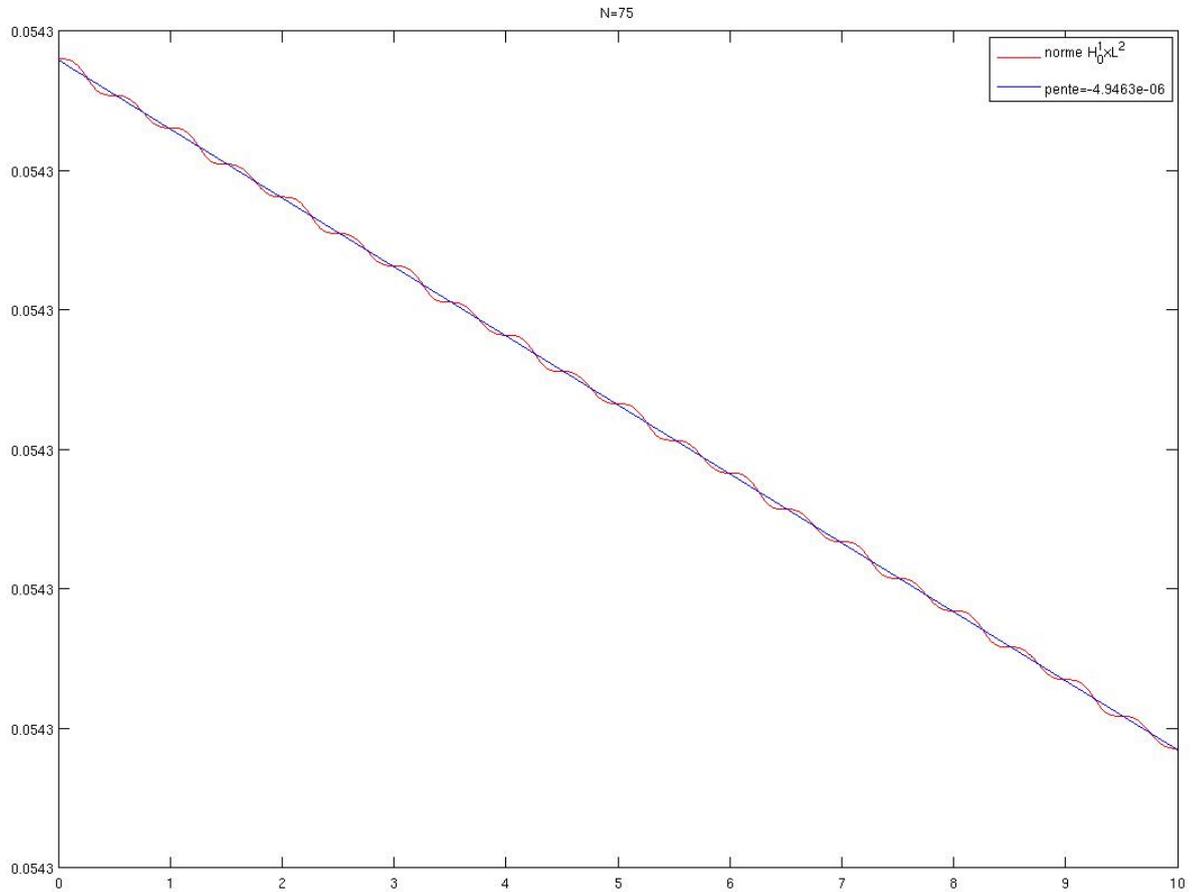


FIG. 2.6 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x); w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît, selon une pente -4.9463×10^{-6} .

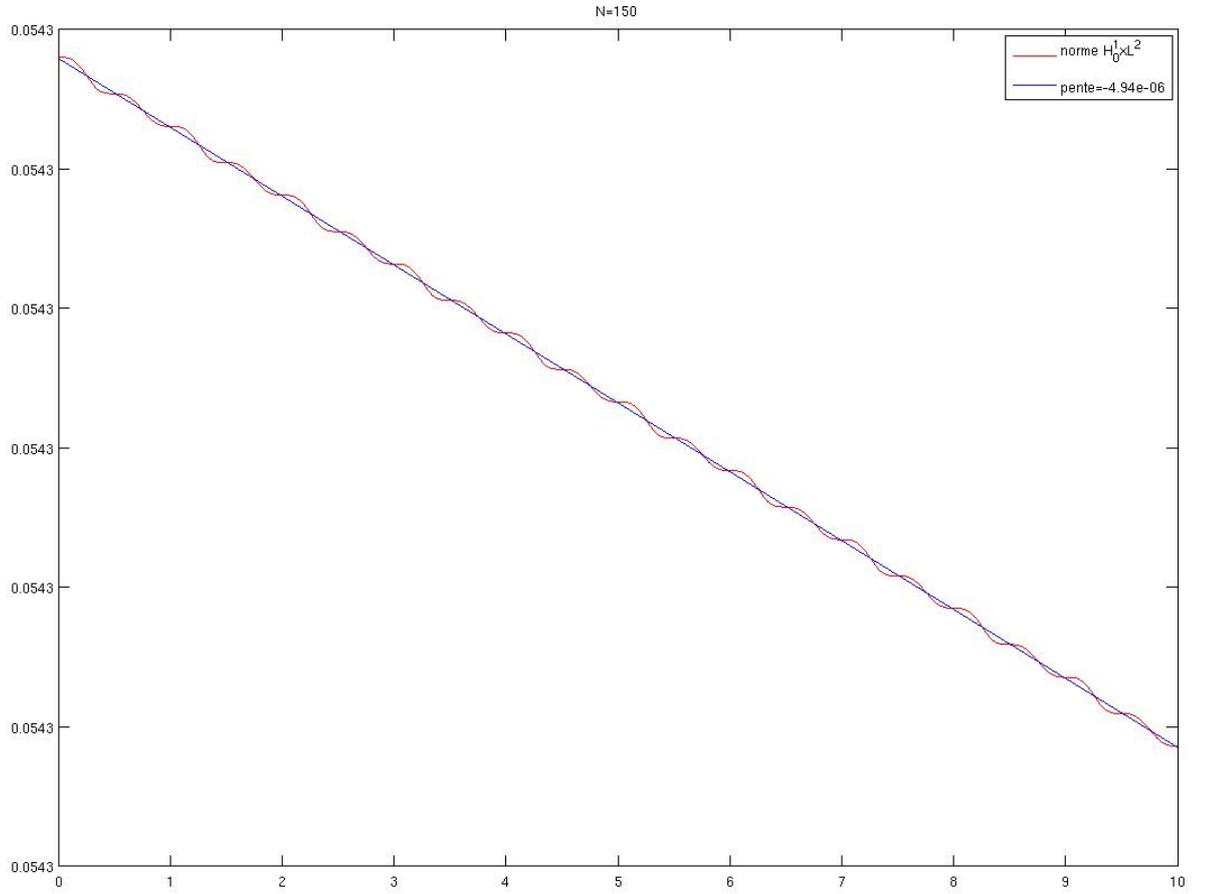


FIG. 2.7 - $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -4.94×10^{-6} .

Grâce à ces deux simulations, on constate que la décroissance de \mathcal{L} ne se détériore pas quand N croît ; ce qui incite à penser que la stabilisation forte du modèle d'étude a lieu en dimension infinie pour $\mu \geq 0$.

2.3.2 Modèle réel

Dans un premier temps, nous considérons le cas $\mu = 1$. Pour une même condition initiale, nous traçons les normes $(H_0^1 \times L^2)$ et $(L^2 \times H^{-1})$ de $\mathcal{L}(t)$ pour différentes fréquences de coupure N ($N = 25, 75, 150$). Puis nous regardons l'influence de la fréquence de coupure en temps long.

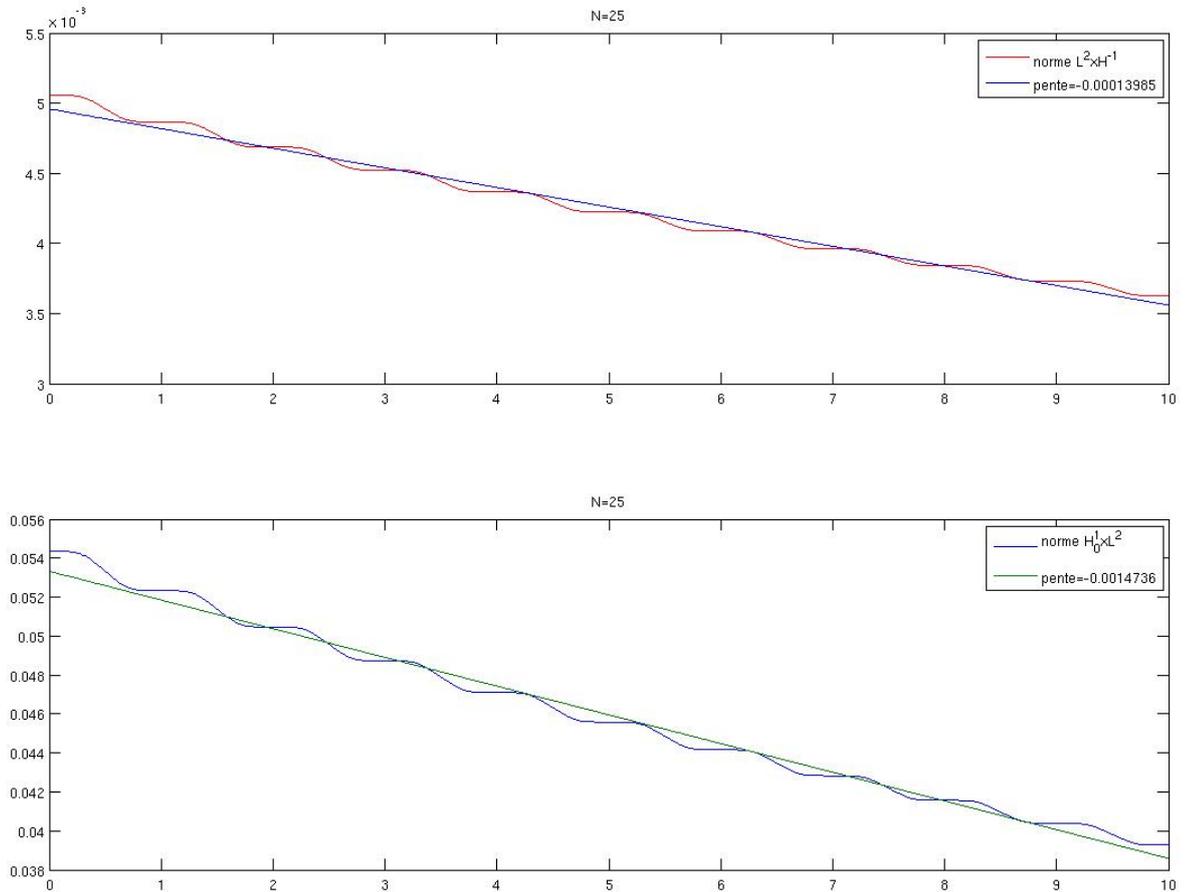


FIG. 2.8 - $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.3985×10^{-4} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.4736×10^{-3} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

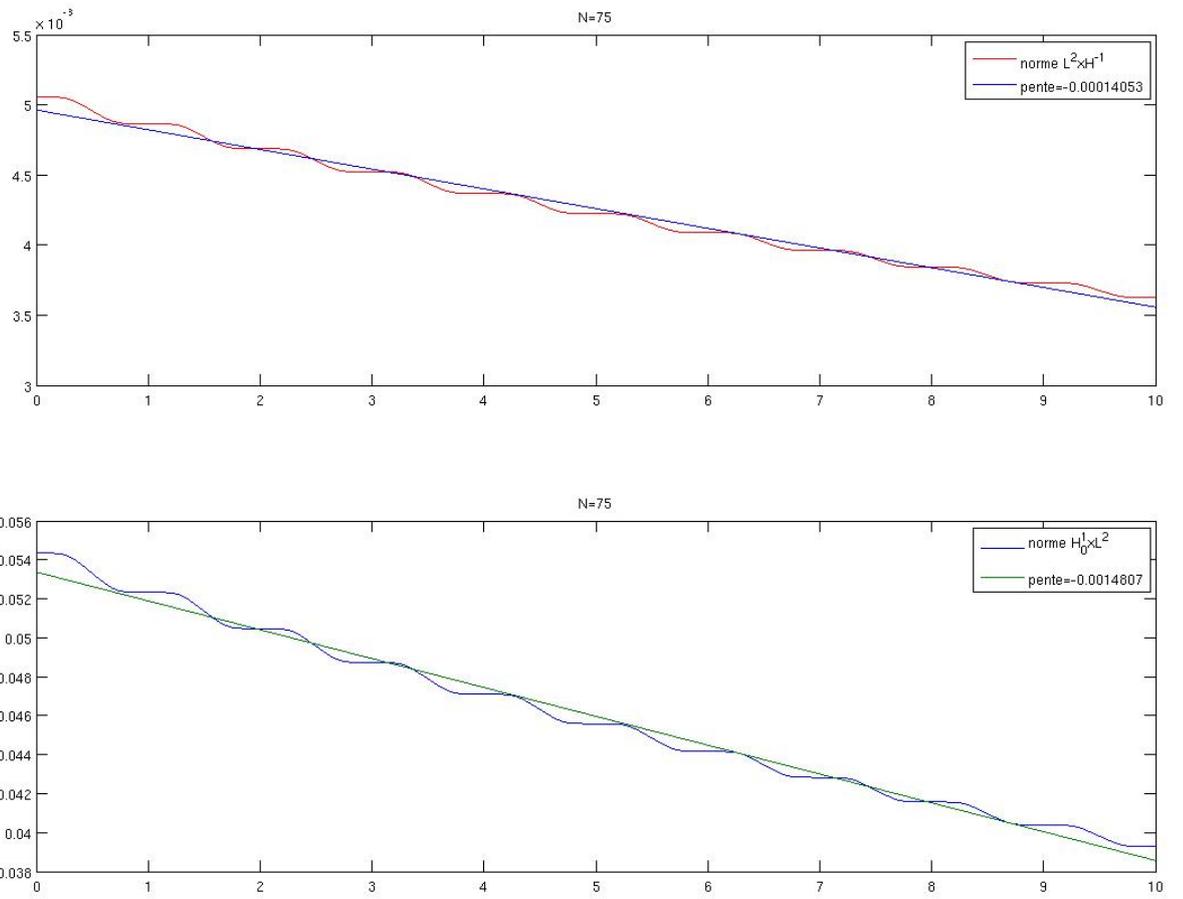


FIG. 2.9 - $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.4053×10^{-4} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.4807×10^{-3} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

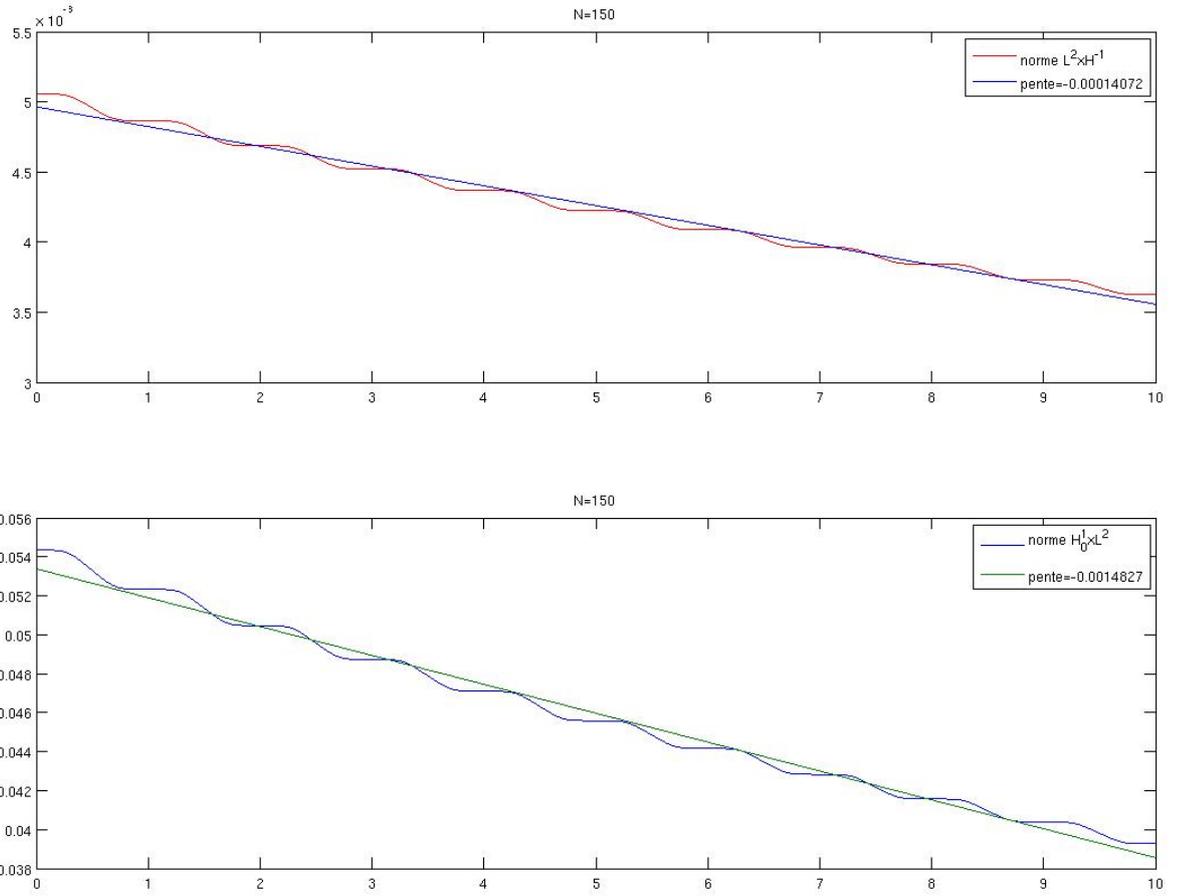


FIG. 2.10 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.4072×10^{-4} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.4827×10^{-3} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

Grâce à ces trois simulations, on constate que la décroissance de \mathcal{L} ne se détériore pas quand N croît ; ce qui incite à penser que les stabilisations faible et forte du modèle réel ont lieu en dimension infinie pour $\mu = 1$.

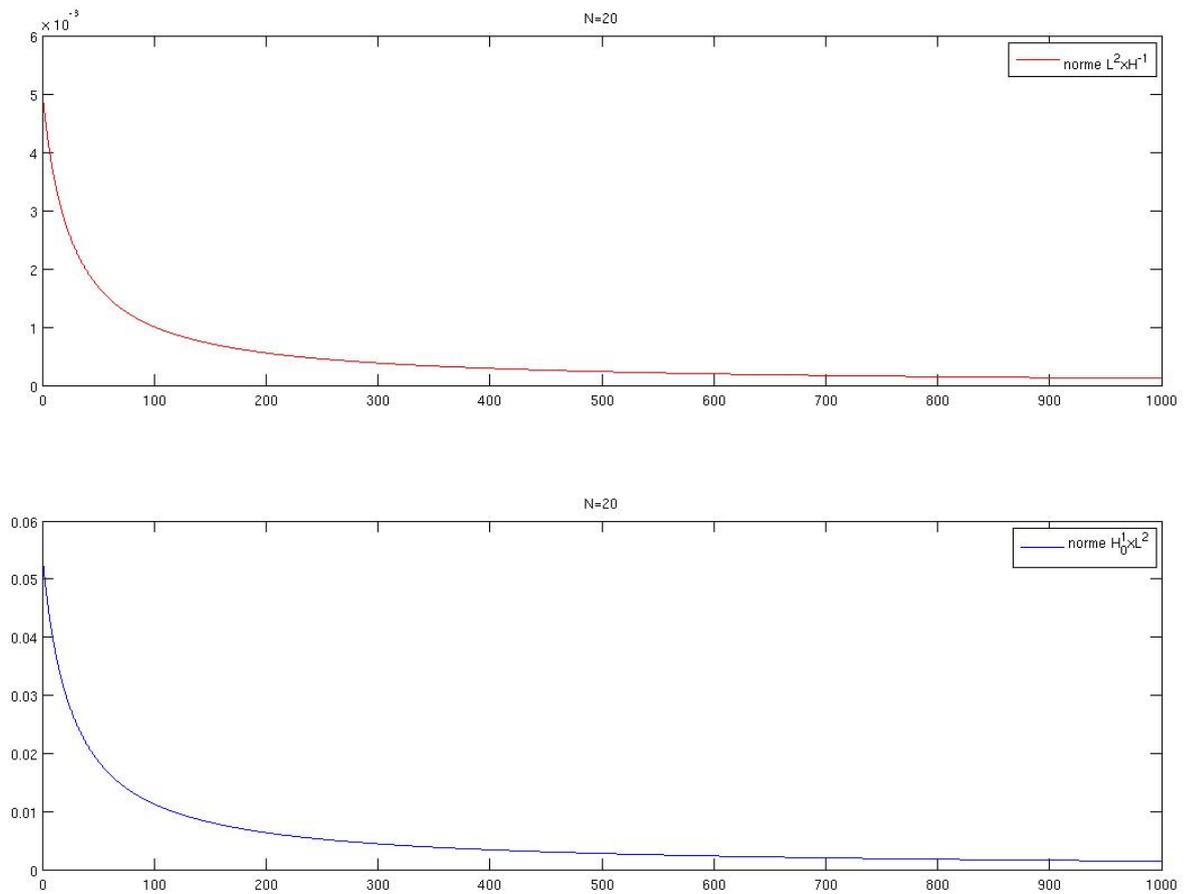


FIG. 2.11 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons qu'en temps long \mathcal{L} décroît de moins en moins rapidement comme dans le cas du modèle d'étude.

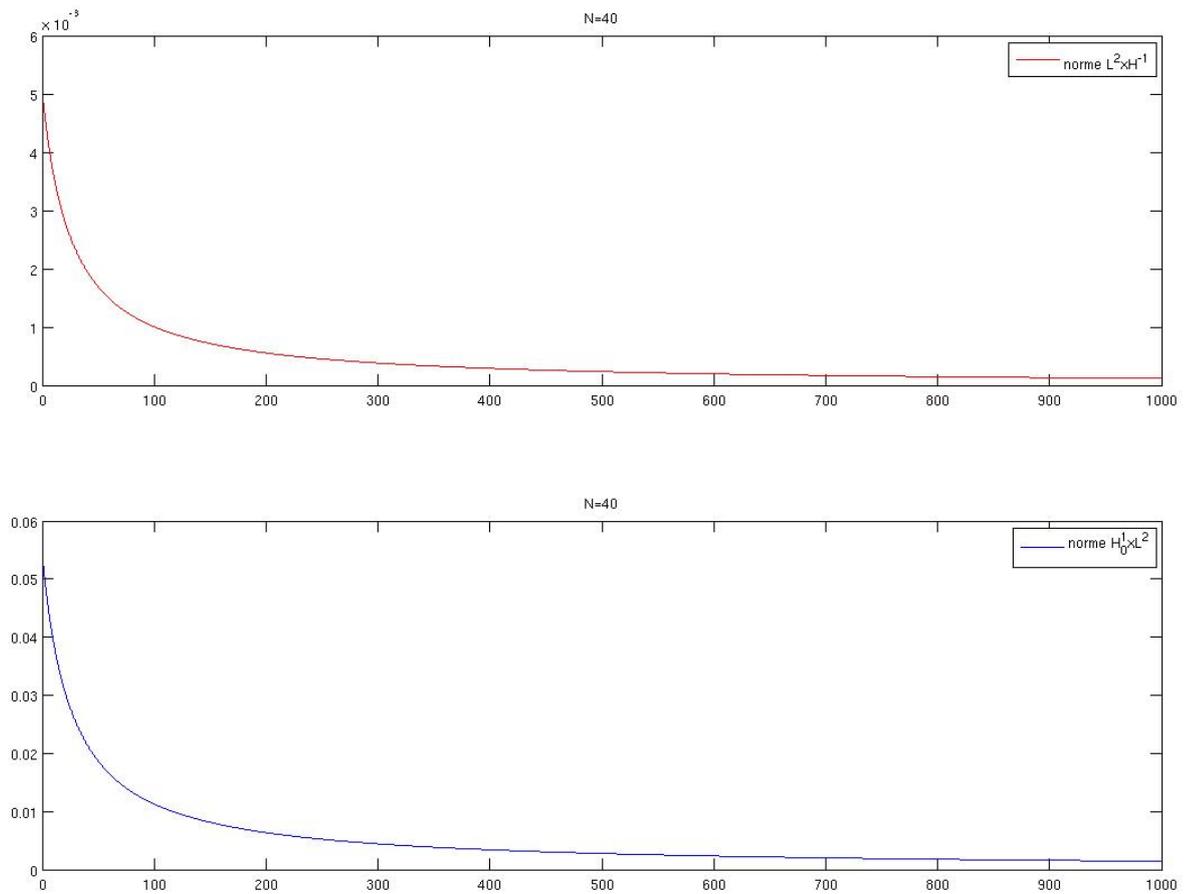


FIG. 2.12 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons qu'en temps long \mathcal{L} décroît de moins en moins rapidement de manière quasiment indépendante de N comme dans le cas du modèle d'étude.

Dans un deuxième temps, nous considérons le cas $\mu(x) = x^2$. Pour une même condition initiale, nous traçons les normes $(H_0^1 \times L^2)$ et $(L^2 \times H^{-1})$ de $\mathcal{L}(t)$ pour différentes fréquences de coupure N ($N = 25, 75, 150$).

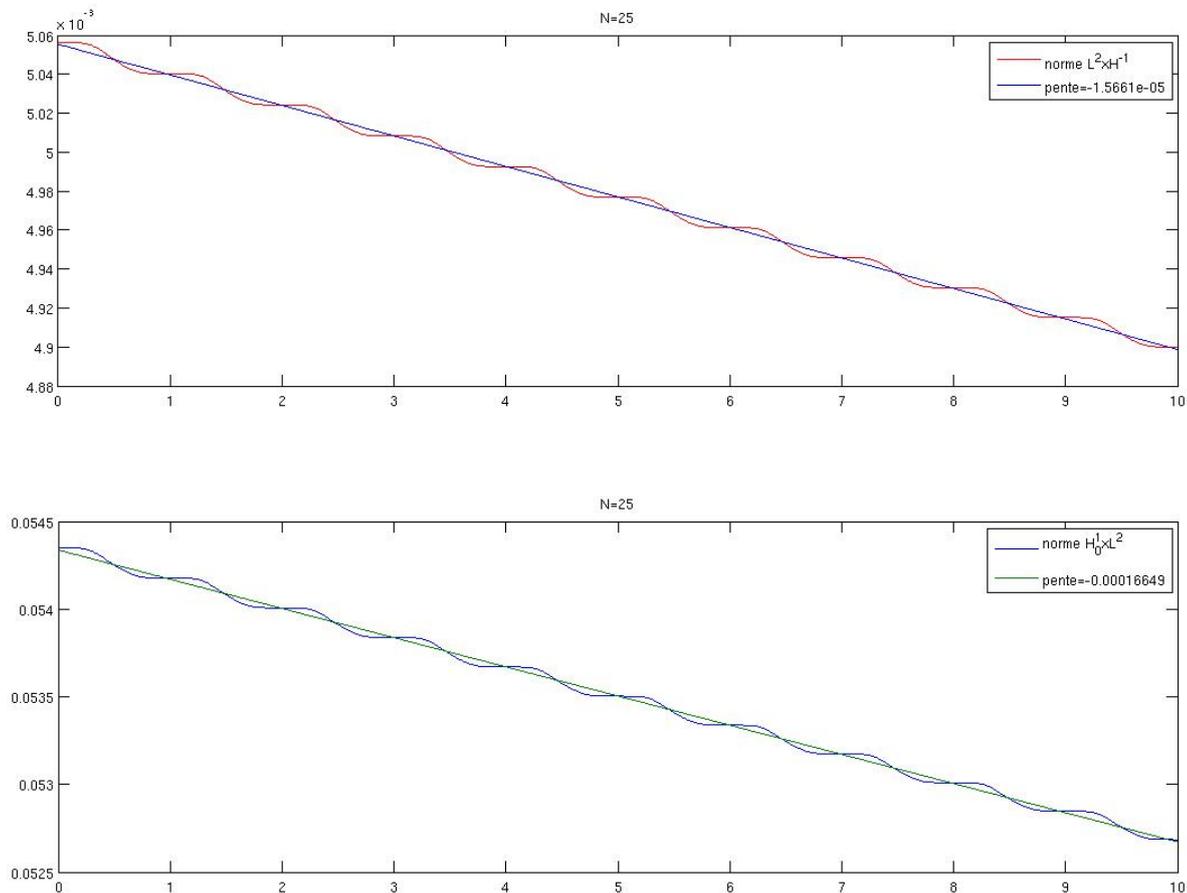


FIG. 2.13 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.5661×10^{-5} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.6649×10^{-4} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

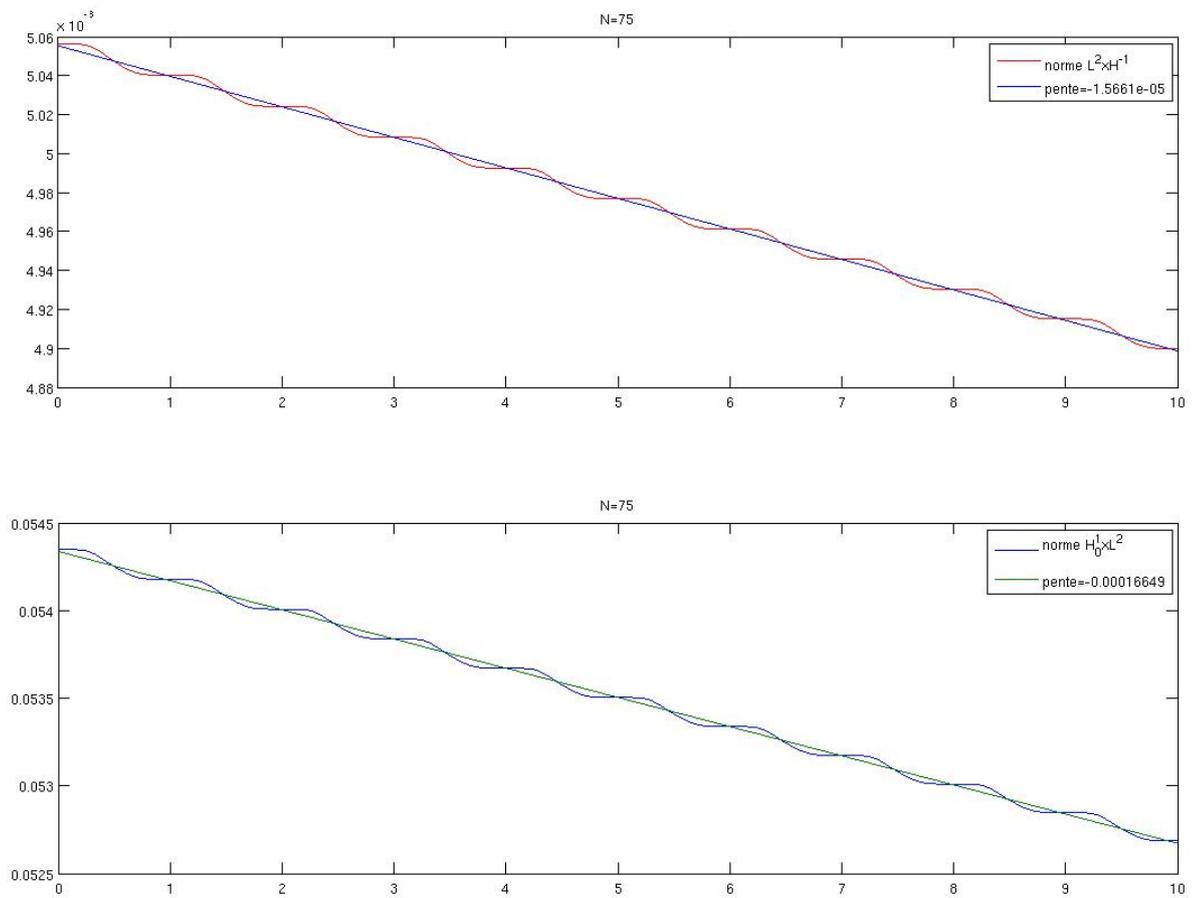


FIG. 2.14 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.5661×10^{-5} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.6649×10^{-4} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

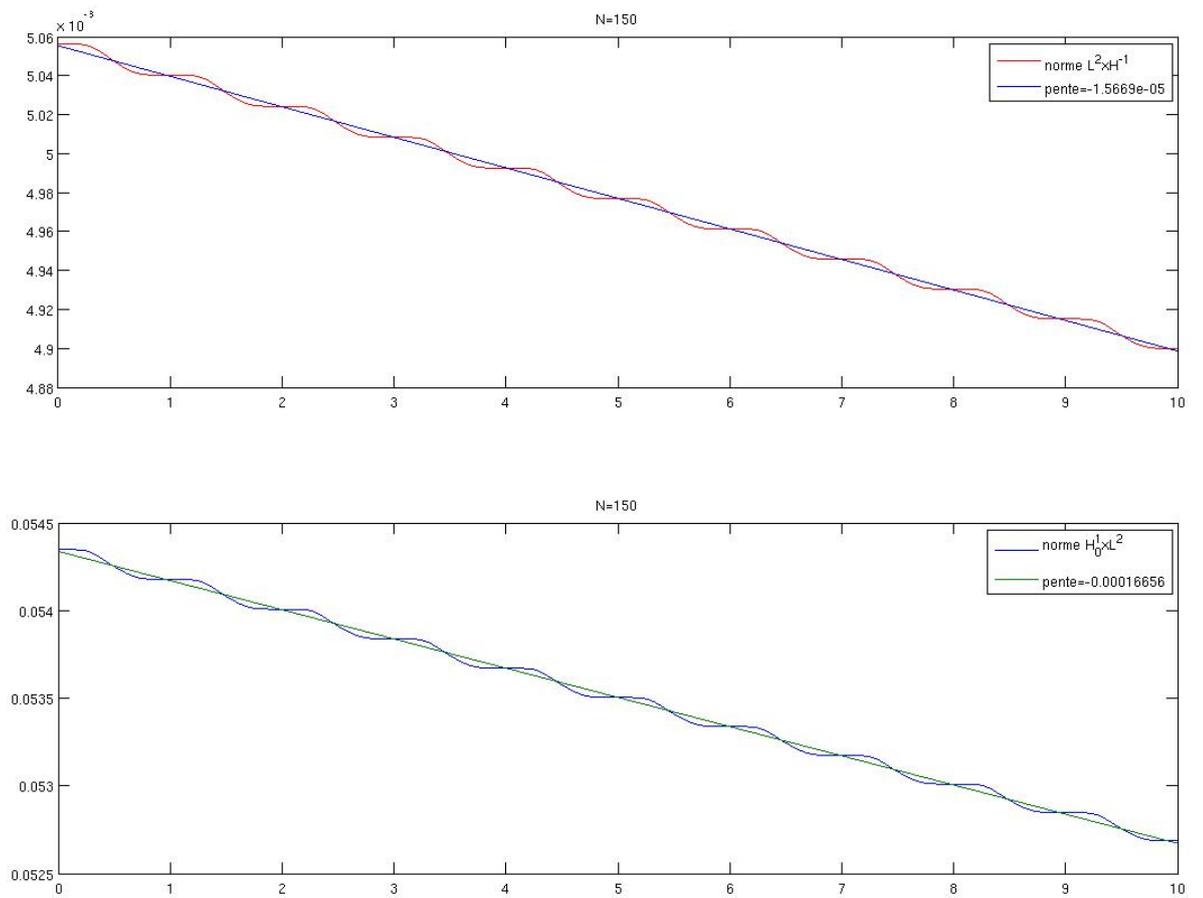


FIG. 2.15 – $w_0 = 0.1 \times \sin(\pi x)$; $w_1 = 0.1 \times \sin(3\pi x)$

Dans cette figure, nous observons que \mathcal{L} décroît selon une pente -1.5669×10^{-5} pour la norme $(L^2 \times H^{-1})$, selon une pente -1.6656×10^{-4} pour la norme $(H_0^1 \times L^2)$.

Grâce à ces trois simulations, on constate que la décroissance de \mathcal{L} ne se détériore pas quand N croît ; ce qui incite à penser que les stabilisations faible et forte du modèle réel ont lieu en dimension infinie pour $\mu(x) = x^2$

En définitive, nous observons que la vitesse de décroissance ne varie quasiment pas en augmentant la fréquence de coupure N . Mais si la vitesse de décroissance est fortement ralentie en temps long, il semble malgré tout que les convergences faibles et fortes dans $(H_0^1 \times L^2)$ aient lieu pour les deux modèles au vu des précédents tracés.

Au cours de ce stage, nous avons démontré la convergence faible vers la fonction nulle dans tous les cas simulés ci-dessus. Les résultats numériques viennent l'illustrer. Il semblerait que l'on ait aussi une convergence forte dans tous les cas simulés. Dans le cas du modèle réel, la convergence forte a été établie pour le cas $\mu(x) = 1$, ce qui est en accord avec nos résultats numériques. En conclusion, cela pourrait nous amener à conjecturer une convergence forte dans le cas d'une fonction μ positive.

L'ensemble des codes Matlab ayant servi à implémenter les simulations numériques se trouvent en annexe.

Chapitre 3

Modèle d'étude

3.1 Système du modèle d'étude

Soit $T > 0$. Nous nous intéressons dans cette partie aux équations du modèle d'étude, avec $t \in]0, T[$ pour commencer :

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) + u(t)\mu(x)w(t, x) = 0, x \in]0, 1[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.1.1 Choix du contrôle et existence des solutions sur \mathbb{R}_+

Utilisons dorénavant la notation plus générique suivante. Avec $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, l'équation (3.1.1) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + u(t)\mathcal{B} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1.2)$$

où $(w, w_t) \in (H_0^1 \times L^2)$.

Choix du contrôle

Supposons momentanément qu'il existe une solution locale (w, w_t) au système (3.1.1), définie en temps sur $(0, T)$, avec une condition initiale (w_0, w_1) .

Posons $\mathcal{L}(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(t, x) + w_t^2(t, x) dx$. On a alors formellement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L} &= \int_0^1 w_t w_{tt} + w_x w_{xt} \\ &= \int_0^1 w_t (w_{xx} - u\mu w w_t) + w_x w_{xt} \\ &= [w_t w_x]_0^1 - \int_0^1 w_x w_{xt} - \int_0^1 u\mu w w_t + \int_0^1 w_x w_{xt} \\ &= -u \int_0^1 \mu w w_t, \end{aligned}$$

par intégration par parties, en remarquant que $w_t(t, 0) = w_t(t, 1) = 0$. Etant donné que nous cherchons ultimement à stabiliser les solutions en 0, nous voulons essentiellement faire décroître leur norme. **Ceci suggère donc de choisir le feedback $\mathbf{t} \in (0, \mathbf{T}) \mapsto \langle \mathbf{w}(\mathbf{t}), \mathbf{w}_t(\mathbf{t}) \mu \rangle$.** C'est ce que nous ferons dans la suite quand nous nous intéresserons au modèle d'étude.

Existence des solutions

Théorème 3.1.1

Soit $w : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto w(t) \in X$, avec X un Banach.

Soit $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ lipschitzienne, et soit \mathcal{A} un opérateur linéaire qui génère un semi-groupe continu sur X .

Alors, il existe $T > 0$, tel que pour tout $w_0 \in X$, $u \in L^1(0, T)$, il existe un unique

$$w \in C^0((0, T), X) \text{ vérifiant } w(t) = e^{\mathcal{A}t}w_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}u(s)\mathcal{B}(w(s))ds, \quad \forall t \in (0, T),$$

appelé $w \in C^0((0, T), X)$ "solution faible" du système (3.1.2).

Preuve :

Soient $R > 0$, $T > 0$ et $(w_0, w_1) \in X$ tels que $\|(w_0, w_1)\|_X \leq R$.

Soient $B_R := \{w \in C^0([0, T], X) \mid \|w(t) - w_0\|_X \leq R\}$ et $F : B_R \rightarrow C^0([0, T], X)$ tels que

$$(Fw)(t) = e^{\mathcal{A}t}w_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}u(s)\mathcal{B}(w(s))ds.$$

D'après les hypothèses sur \mathcal{A} , on a l'existence de M et β dans \mathbb{R}_+^* , tels que $\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Me^{\beta t}$, pour tout t dans $[0, +\infty[$.

Donc, en notant C_R une constante telle que

$$\|w(t) - w_0\| \leq R \Rightarrow \|\mathcal{B}w\| \leq C_R,$$

on a

$$\|(Fw)(t) - w_0\| \leq \|e^{\mathcal{A}t}w_0 - w_0\| + Me^{\beta T}C_R \int_0^T |u(s)|ds \leq R \quad \text{pour tout } t \leq T \text{ bien choisi.}$$

Finalement, on vérifie que F envoie bien B_R sur elle-même.

Par ailleurs, F est contractante. En effet, en notant k le rapport de Lipschitz de \mathcal{B} sur B_R , on a :

$$\forall (w_1, w_2) \in (B_R)^2, \quad \|F(w_1) - F(w_2)\| \leq (kMe^{\beta T} \int_0^T |u(s)|ds) \|w_1 - w_2\|$$

et

$$kMe^{\beta T} \int_0^T |u(s)|ds < 1 \quad (\text{pour } \|u\|_{L^1(0, T)} \text{ suffisamment petit}).$$

On peut alors conclure par le théorème du point fixe.

□

Ce théorème peut s'appliquer pour des contrôles u ne dépendant pas de w . Dans notre cas, nous avons, $u : t \mapsto u((w, w_t)(t))$. Il va donc falloir adapter cette preuve. Pour cela, nous allons utiliser l'article [3]. Prenons pour X , l'espace $(H_0^1 \times L^2)$.

Notons

$$f\left(\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}\right) = u(w, w_t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}$$

i.e. $f\left(\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \mu w, w_t \rangle \mu w \end{pmatrix},$

de sorte que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} - f\left(\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}\right)$$

Il suffit alors que f soit localement lipschitzienne sur $(H_0^1 \times L^2)$ pour appliquer les articles [3] et [7], et obtenir l'existence locale des solutions avec notre nouveau feedback.

Montrons que f est localement lipschitzienne.

$$\begin{aligned} & \|f\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)\|_{H_0^1 \times L^2} \\ &= \|\langle \mu w_1, w_2 \rangle \mu w - \langle \mu v_1, v_2 \rangle \mu v_1\|_{L^2} \\ &= \|\langle \mu w_1, w_2 \rangle \mu [w_1 - v_1] + \langle \mu w_1, [w_2 - v_2] \rangle \mu v_1 + \langle \mu [w_1 - v_1], v_2 \rangle \mu v_1\|_{L^2} \\ &\leq \|\langle \mu w_1, w_2 \rangle \mu [w_1 - v_1]\|_{L^2} + \|\langle \mu w_1, [w_2 - v_2] \rangle \mu v_1\|_{L^2} + \|\langle \mu [w_1 - v_1], v_2 \rangle \mu v_1\|_{L^2} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement le résultat annoncé. □

Corollaire 3.1.2

Avec le contrôle $u : t \mapsto \langle w(t), w_t(t) \mu \rangle_{L^2}$, pour tout $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$, il existe une unique solution $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (w, w_t)(t) \in (H_0^1 \times L^2)$ du système (3.1.1).

Preuve

D'après ce qui précède le Corollaire 3.1.2, on a existence et unicité locale de telles solutions. L'unicité globale découle immédiatement de l'unicité locale. Il faut alors remarquer que la norme $(H_0^1 \times L^2)$ des solutions locales est décroissante. Les équations considérées étant autonomes, si la solution est définie sur un intervalle $[0, T]$, alors elle est définie sur $[T, 2T]$, donc sur $[0, 2T]$, et ainsi de suite. □

3.1.2 Ensemble invariant

On rappelle l'équation des ondes :

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) = 0, t \in]0, +\infty[, x \in]0, 1[\\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Soit $\mu \in L^\infty(0,1)$. Les solutions de l'équation (3.1.1) étant définies sur \mathbb{R}_+ , on peut s'intéresser à l'ensemble invariant associé au μ donné :

$$\left\{ (w_0, w_1) : w \text{ tq } w \text{ vérifie (3.1.3) et } \forall t \geq 0 : \int_0^1 \mu(x)w(t,x)w_t(t,x) dx = 0 \right\} \quad (3.1.4)$$

Trouver des conditions suffisantes sur μ pour que $Inv = \{0\}$ (condition nécessaire de stabilisation, comme précisé dans la section 1.2) semble difficile. Nous étudions plus en détail le cas du modèle réel au chapitre suivant.

Remarque

Les solutions de l'équation des ondes utilisée dans cet invariant sont 2-périodiques. On peut donc sans perte de généralité affaiblir la condition

$$\forall t \geq 0 : \int_0^1 \mu(x)w(t,x)w_t(t,x) dx = 0$$

en

$$\forall t \in (0, T) : \int_0^1 \mu(x)w(t,x)w_t(t,x) dx = 0$$

avec $T > 2$. On pourrait faire le même type de remarque pour l'invariant du modèle réel. C'est la raison pour laquelle on prend $T > 2$ dans les preuves de stabilisation faible.

3.2 Stabilisation pour le modèle d'étude

3.2.1 Résultats préliminaires

On rappelle tout d'abord que pour l'équation (3.1.1) du modèle d'étude, on utilise l'opérateur $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 3.2.1

L'opérateur \mathcal{B} est continu aussi bien sur $(H_0^1 \times L^2)$ que sur $(L^2 \times H^{-1})$. Dans tous les cas, $\|\mathcal{B}\| \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)}$.

Preuve

Si $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$, on a

$$\|\mathcal{B} \cdot (w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2} = \|\mu w_0\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty} \|w_0\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty} \|w_0\|_{H_0^1} \leq \|\mu\|_{L^\infty} \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2}.$$

Si $(w_0, w_1) \in (L^2 \times H^{-1})$, on a

$$\|\mathcal{B} \cdot (w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}} = \|\mu w_0\|_{H^{-1}} \leq \|\mu w_0\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} \|w_0\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} \|(w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}.$$

□

Lemme 3.2.2

Soit $s \in \mathbb{R}$. L'opérateur e^{sA} est une isométrie de $(H_0^1 \times L^2)$, comme de $(L^2 \times H^{-1})$. En particulier, cet opérateur est continu pour les topologies fortes de ces deux espaces.

Preuve

On rappelle que pour tout $k \geq 1, x \in (0, 1)$, $\varphi_k(x) := \sin(k\pi x)\sqrt{2}$, et que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée de $L^2(0, 1)$.

Montrons le résultat pour $(L^2 \times H^{-1})$, par exemple. Si $(w_0, w_1) = \sum_{k \geq 1} (a_k \varphi_k, b_k \varphi_k) \in (L^2 \times H^{-1})$, on a

$$\begin{aligned}
\|e^{sA}(w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 &= \left\| \sum_{k \geq 1} \begin{pmatrix} (a_k \cos(k\pi s) + \frac{b_k}{k\pi} \sin(k\pi s)) \varphi_k \\ (-a_k k\pi \sin(k\pi s) + b_k \cos(k\pi s)) \varphi_k \end{pmatrix} \right\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 \\
&= \sum_{k \geq 1} \left(a_k^2 \cos(k\pi s)^2 + \frac{b_k^2}{(k\pi)^2} \sin(k\pi s)^2 + 2a_k \frac{b_k}{k\pi} \cos(k\pi s) \sin(k\pi s) \right) \\
&\quad + \sum_{k \geq 1} \left(a_k^2 \sin(k\pi s)^2 + \frac{b_k^2}{(k\pi)^2} \cos(k\pi s)^2 - 2a_k \frac{b_k}{k\pi} \cos(k\pi s) \sin(k\pi s) \right) \\
&= \sum_{k \geq 1} \left(a_k^2 + \left(\frac{b_k}{k\pi} \right)^2 \right) \\
&= \|(w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2.
\end{aligned}$$

On montrerait de même le résultat pour $(H_0^1 \times L^2)$.

□

Lemme 3.2.3

Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout (w_0, w_1) dans $(H_0^1 \times L^2)$ et pour tout $t > 0$

$$\| [e^{At} - Id](w_0, w_1) \|_{L^2 \times H^{-1}} \leq Kt \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2}.$$

Preuve :

On note ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $L^2(0, 1)$. On a par définition de \mathcal{A}

$$[e^{At} - Id](w_0, w_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \{ \langle w_0, \varphi_k \rangle (\cos(k\pi t) - 1) + \frac{\langle w_1, \varphi_k \rangle}{k\pi} \sin(k\pi t) \} \varphi_k \\ \{ -\langle w_0, \varphi_k \rangle (k\pi) \sin(k\pi t) + \langle w_1, \varphi_k \rangle (\cos(k\pi t) - 1) \} \varphi_k \end{pmatrix}.$$

D'où, en utilisant $|\cos(k\pi t) - 1| \leq k\pi t$ et $|\sin(k\pi t)| \leq k\pi t$

$$\begin{aligned}
\| [e^{At} - Id](w_0, w_1) \|_{L^2 \times H^{-1}}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \langle w_0, \varphi_k \rangle (\cos(k\pi t) - 1) + \frac{\langle w_1, \varphi_k \rangle}{k\pi} \sin(k\pi t) \right|^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \left| -\langle w_0, \varphi_k \rangle \sin(k\pi t) + \frac{\langle w_1, \varphi_k \rangle}{k\pi} (\cos(k\pi t) - 1) \right|^2 \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\langle w_0, \varphi_k \rangle (\cos(k\pi t) - 1)|^2 + \frac{|\langle w_1, \varphi_k \rangle|^2}{(k\pi)^2} |\sin(k\pi t)|^2 \right) \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\langle w_0, \varphi_k \rangle|^2 |\sin(k\pi t)|^2 + |\langle w_1, \varphi_k \rangle|^2 \frac{|\cos(k\pi t) - 1|^2}{(k\pi)^2} \right) \\
&\leq 4t^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left((k\pi)^2 |\langle w_0, \varphi_k \rangle|^2 + |\langle w_1, \varphi_k \rangle|^2 \right) \\
&\leq 4t^2 \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2}^2.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.4

Soit $(w_0^n, w_1^n)_{n \in \mathbb{N}} \in (H_0^1 \times L^2)^\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned} (w_0^n, w_1^n) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty) \\ (w_0^n, w_1^n) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (w^n, w_t^n) la solution de (3.1.1) de condition initiale (w_0^n, w_1^n) . Alors :

$$\begin{aligned} \forall T > 0, \quad \exists N_1 \subset (0, T), \quad \forall t \in ((0, T) \setminus N_1), \quad (w^n, w_t^n)(t) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \\ (w^n, w_t^n)(t) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \end{aligned}$$

où N_1 est de mesure nulle.

Preuve :

Soit $T > 0$. La suite $(w^n, w_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0((0, T), H_0^1 \times L^2)$. En effet, comme $(w_0^n, w_1^n)_{n \geq 0}$ converge faiblement dans $H_0^1 \times L^2$ par hypothèse, elle est bornée dans $(H_0^1 \times L^2)$ par une constante C . D'où par décroissance de \mathcal{L} le long des trajectoires, pour tout $t \geq 0$

$$\mathcal{L}((w^n, w_t^n)(t)) := \frac{1}{2} \|(w^n, w_t^n)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|(w_0^n, w_1^n)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = \mathcal{L}(w_0^n, w_1^n) \leq C. \quad (3.2.1)$$

1) Montrons qu'il existe $L > 0$ telle que pour tous $t_1 < t_2$ dans $[0, T]$ et tout n entier $\|(w^n, w_{t_1}^n)(t_1) - (w^n, w_{t_2}^n)(t_2)\|_{L^2 \times H^{-1}} \leq L|t_1 - t_2|$.

On a

$$\begin{aligned} \|(w^n, w_{t_1}^n)(t_1) - (w^n, w_{t_2}^n)(t_2)\|_{L^2 \times H^{-1}} &= \|[e^{A(t_2-t_1)} - Id](w^n, w_{t_1}^n)(t_1) + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} B \cdot (w^n, w_t^n)(s) u(s) ds\|_{L^2 \times H^{-1}} \\ &\leq_{(1)} \|[e^{A(t_2-t_1)} - Id](w^n, w_{t_1}^n)(t_1)\|_{L^2 \times H^{-1}} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|e^{A(t_2-s)} B \cdot (w^n, w_t^n)(s) u(s)\|_{H_0^1 \times L^2} ds \\ &\leq_{(2)} KC|t_1 - t_2| \\ &\quad + |t_1 - t_2| \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} \|\mathcal{B}\| C^3. \end{aligned}$$

L'inégalité (1) provient du fait que pour tout $X \in (H_0^1 \times L^2)$, $\|X\|_{H_0^1 \times L^2} \geq \|X\|_{L^2 \times H^{-1}}$.

L'inégalité (2) vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au contrôle u , des Lemmes 3.2.3, 3.2.1 et de la relation (3.2.1).

2) Montrons qu'il existe $Y \in L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ et φ une extraction tels que
 $(w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})} Y$.

Soit $D \subset (0, T)$ dénombrable dense.

En utilisant l'injection compacte $(H_0^1 \times L^2) \hookrightarrow (L^2 \times H^{-1})$ et (3.2.1), on a par extraction diagonale l'existence de ψ extractrice et de $Y : D \rightarrow (L^2 \times H^{-1})$ tels que

$$\forall d \in D, \quad (w^{\psi(n)}, w_t^{\psi(n)})(d) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} Y(d).$$

Soient $t \in (0, T)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $d \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap D$. La suite $\{(w^{\psi(n)}, w_t^{\psi(n)})(d)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où il existe n_0 , tel que

$$\forall p, q \geq n_0, \quad \|(w^{\psi(p)}, w_t^{\psi(p)})(d) - (w^{\psi(q)}, w_t^{\psi(q)})(d)\|_{L^2 \times H^{-1}} \leq \varepsilon.$$

Soient $p, q \geq n_0$. Ainsi, en utilisant le paragraphe 1) de la preuve

$$\begin{aligned} \|(w^{\psi(p)}, w_t^{\psi(p)})(t) - (w^{\psi(q)}, w_t^{\psi(q)})(t)\|_{L^2 \times H^{-1}} &\leq \|(w^{\psi(p)}, w_t^{\psi(p)})(t) - (w^{\psi(p)}, w_t^{\psi(p)})(d)\|_{L^2 \times H^{-1}} \\ &\quad + \|(w^{\psi(p)}, w_t^{\psi(p)})(d) - (w^{\psi(q)}, w_t^{\psi(q)})(d)\|_{L^2 \times H^{-1}} \\ &\quad + \|(w^{\psi(q)}, w_t^{\psi(q)})(d) - (w^{\psi(q)}, w_t^{\psi(q)})(t)\|_{L^2 \times H^{-1}} \\ &\leq (2L + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

D'où la suite $\{(w^{\psi(n)}, w_t^{\psi(n)})(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge dans $(L^2 \times H^{-1})$. On note $Y(t)$ sa limite. On conclut en remarquant que $Y : (0, T) \rightarrow (L^2 \times H^{-1})$ est dans $L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ par (3.2.1) et le lemme de Fatou. D'où le résultat en posant $\varphi := \psi$.

3) Montrons que $t \in (0, T) \mapsto (w^\infty, w_t^\infty)(t)$ est la seule valeur d'adhérence forte dans $L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ de la suite $(w^n, w_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En utilisant la réciproque du théorème de Lebesgue, quitte à extraire, il existe $N_1 \subset (0, T)$ de mesure nulle tel que

$$(w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} Y(t), \forall t \in ((0, T) \setminus N_1). \quad (3.2.2)$$

Soit $t^\Lambda \in ((0, T) \setminus N_1)$. On sait que $((w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(t^\Lambda))_{n \geq 0}$ est bornée dans $(H_0^1 \times L^2)$ et sa seule valeur d'adhérence faible $(H_0^1 \times L^2)$ possible est $Y(t^\Lambda)$, donc toute la suite converge. Ainsi

$$\begin{aligned} (w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} Y(t^\Lambda) := (y_1, y_2)(t^\Lambda) \\ (w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} Y(t^\Lambda). \end{aligned}$$

D'autre part

$$u^{\varphi(n)}(t^\Lambda) := \langle \mu w^{\varphi(n)}(t^\Lambda), w_t^{\varphi(n)}(t^\Lambda) \rangle_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} \langle \mu y_1(t^\Lambda), y_2(t^\Lambda) \rangle_{L^2} := v(t^\Lambda) \quad (3.2.3)$$

car

$$\begin{aligned} w^{\varphi(n)}(t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} y_1(t^\Lambda) \\ w_t^{\varphi(n)}(t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} y_2(t^\Lambda). \end{aligned}$$

On a aussi pour tous $\tau \in (0, T), n \in \mathbb{N}$, par la majoration (3.2.1), les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2

$$\|e^{(t-\tau)A}B(w^n, w_t^n)(\tau)\|_{L^2 \times H^{-1}} \leq C\|\mu\|_{L^\infty}. \quad (3.2.4)$$

Soit maintenant $t \in ((0, T) \setminus N_1)$. On a

$$(w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(t) = e^{tA} \cdot (w_0^{\varphi(n)}, w_1^{\varphi(n)}) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B \cdot (w^{\varphi(n)}, w_t^{\varphi(n)})(\tau) u^{\varphi(n)}(\tau) d\tau.$$

En utilisant l'hypothèse du théorème, les résultats (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), les Lemmes 3.2.2 et 3.2.1, et la convergence dominée, on fait tendre n vers $+\infty$, pour la topologie forte de $L^2 \times H^{-1}$

$$Y(t) = e^{tA} \cdot (w_0^\infty, w_1^\infty) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B \cdot Y(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Enfin, $Y(t), (w_0^\infty, w_1^\infty)$ étant dans $(H_0^1 \times L^2)$, l'unicité de la solution du problème bouclé (3.1.1) assure que $Y(t) = (w^\infty, w_t^\infty)(t)$. D'où le résultat annoncé.

Ainsi toute la suite $(w^n, w_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ vers (w^∞, w_t^∞) . En reprenant les mêmes arguments avec $\varphi = \text{Id}$, on conclut que

$$\exists N_1 \subset (0, T), \forall t \in ((0, T) \setminus N_1), (w^n, w_t^n)(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w^\infty, w_t^\infty)(t)$$

où N_1 est de mesure nulle, ce qui conclut la preuve. □

3.2.2 Stabilisation faible du modèle d'étude

Théorème 3.2.5

Soit $\mu \in L^\infty(0, 1)$. On suppose que l'ensemble invariant associé (3.1.4) est réduit à $\{0\}$. Alors, pour tout $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$, condition initiale de la solution (w, w_t) du système bouclé, on a la convergence suivante

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} 0.$$

Preuve :

On a déjà vu que les trajectoires sont bornées dans $(H_0^1 \times L^2)$, par décroissance de l'énergie.

Soient $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2$ et (w, w_t) solution du système bouclé de condition initiale (w_0, w_1) . On montre que $(0, 0)$ est la seule limite faible $(H_0^1 \times L^2)$ possible.

Soient (w_0^∞, w_1^∞) et $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant en croissant vers $+\infty$, tels qu'on ait

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty). \quad (3.2.5)$$

1) On montre que $u(t) := \int_0^1 \mu(x) w(t, x) w_t(t, x) dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 0$ dans un certain sens.

Soit $T > 2$. $(t \in (0, T) \mapsto u(t_n + t))_{n \geq 0}$ converge vers 0 dans $L^2(0, T)$, car $u \in L^2(0, +\infty)$. Donc, il existe une extractrice φ et $N \subset (0, T)$ de mesure nulle tels que

$$\forall t \in ((0, T) \setminus N), u(t_{\varphi(n)} + t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} 0 \quad (3.2.6)$$

par la réciproque du théorème de Lebesgue.

2) On montre que $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto u^\infty(t) := \int_0^1 \mu(x) w^\infty(t, x) w_t^\infty(t, x) dx$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , où (w^∞, w_t^∞) est la solution du système bouclé de condition initiale (w_0^∞, w_1^∞) .

Quitte à extraire dans (3.2.5) dès le départ, $(H_0^1 \times L^2)$ s'injectant compactement dans $(L^2 \times H^{-1})$, on suppose la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle qu'on ait

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty).$$

Grâce au Lemme 3.2.4, on a

$$\begin{aligned} \exists N_1 \subset ((0, T) \setminus N), \forall t \in ((0, T) \setminus N_1), (w, w_t)(t_{\varphi(n)} + t) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2 \times H^{-1}} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \\ (w, w_t)(t_{\varphi(n)} + t) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w^\infty, w_t^\infty)(t) \end{aligned}$$

où N_1 est de mesure nulle.

Soit $t^\Lambda \in ((0, T) \setminus (N_1 \cup N))$. Par définition, on a

$$u(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda) = -\langle \mu w(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda), w_t(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda) \rangle_{L^2}.$$

Donc

$$u(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} -\langle \mu w^\infty(t^\Lambda), w_t^\infty(t^\Lambda) \rangle_{L^2} := u^\infty(t^\Lambda), \quad (3.2.7)$$

car

$$\begin{aligned} w(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} w^\infty(t^\Lambda) \\ w_t(t_{\varphi(n)} + t^\Lambda) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} w_t^\infty(t^\Lambda). \end{aligned}$$

Enfin, par unicité de la limite, (3.2.6) et (3.2.7), $u^\infty(t^\Lambda) = 0$. On a donc le résultat, par hypothèse sur l'invariant (3.1.4).

□

Chapitre 4

Modèle réel

4.1 Système pour le modèle réel

Soit $T > 0$. Nous nous intéressons dans cette partie aux équations du modèle réel, avec pour commencer $t \in]0, T[$:

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) - w_{xx}(t, x) + u(t)\mu(x)w_t(t, x) = 0, x \in]0, 1[, \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

4.1.1 Choix du contrôle et existence des solutions sur \mathbb{R}_+

Utilisons dorénavant la notation plus générique suivante, avec $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + u(t)\mathcal{B} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1.2)$$

où $(w, w_t) \in (H_0^1 \times L^2)$.

On peut montrer, comme pour le modèle d'étude, qu'en choisissant pour feedback dans l'équation (4.1.1) $u : t \mapsto \langle w_t(t), w_t(t)\mu \rangle$, on obtient que les solutions (w, w_t) de (4.1.1) vérifient

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) = - \left(\int_0^1 \mu(x)w_t^2(t, x)dx \right)^2 \quad (4.1.3)$$

avec toujours $\mathcal{L}(t) := \frac{1}{2} \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 \geq 0$.

Le corollaire (3.1.2), prouvant l'existence et l'unicité de solutions $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (w, w_t)(t) \in (H_0^1 \times L^2)$ du système bouclé (3.1.1) pour des conditions initiales $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$ (même quand le feedback u dépend de $(w, w_t)(t)$) est applicable ici. On peut en effet montrer que la fonction

$$f : (w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2) \mapsto (0, \langle w_1, w_1\mu \rangle_{L^2} \mu w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$$

est localement lipschitzienne, en utilisant des techniques analogues.

On a donc que les solutions de (4.1.1) sont uniques et définies sur \mathbb{R}_+ , comme pour le modèle d'étude, grâce à la décroissance des normes des solutions dans $(H_0^1 \times L^2)$.

4.1.2 Ensemble invariant

Soit $\mu \in W^{1,\infty}(0,1)$. Les solutions de l'équation (4.1.1) étant définies sur \mathbb{R}_+ , on peut s'intéresser à l'ensemble invariant associé au μ donné :

$$\left\{ (w_0, w_1) : w \text{ tq } w \text{ vérifie (3.1.3) et } \forall t \geq 0 : \int_0^1 \mu(x) w_t^2(t, x) dx = 0 \right\} \quad (4.1.4)$$

Conditions pour que l'invariant soit réduit à $\{0\}$

Soit $\mu \in L^\infty(0,1)$. Soit $\varphi_k : x \in (0,1) \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi x), \forall k \geq 0$. Soient $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2$, (w, w_t) la solution du modèle réel de condition initiale (w_0, w_1) , et $u : t \in [0, +\infty) \mapsto \int_0^1 \mu(x) w_t^2(t, x) dx$. On rappelle qu'on a

$$w_t(t, x) = \sum_{k \geq 1} (-(k\pi) \langle w_0, \varphi_k \rangle_{L^2} \sin(k\pi t) + \langle w_1, \varphi_k \rangle_{L^2} \cos(k\pi t)) \varphi_k(x).$$

En particulier, on peut définir la suite de nombres complexes $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, où pour $k \geq 1$, c_k est défini par :

$$\begin{cases} c_k = -\frac{k\pi \langle w_0, \varphi_k \rangle_{L^2}}{2i} + \frac{\langle w_1, \varphi_k \rangle_{L^2}}{2} \\ c_0 = 0 \\ c_{-k} = \frac{k\pi \langle w_0, \varphi_k \rangle_{L^2}}{2i} + \frac{\langle w_1, \varphi_k \rangle_{L^2}}{2} \end{cases}$$

On a alors la nouvelle formulation

$$w_t(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi t} \varphi_{|k|}(x).$$

Lemme 4.1.1

Avec les notations précédentes, la fonction u est identiquement nulle si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l c_{n-l} \langle \varphi_{|l|}, \varphi_{|n-l|} \mu \rangle_{L^2} = 0.$$

Preuve :

Ceci est une simple conséquence de l'unicité de la décomposition en série de Fourier complexe. On a en effet

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_k c_l e^{i(k+l)\pi t} \langle \varphi_{|l|}, \varphi_{|k|} \mu \rangle_{L^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\pi t} \left\{ \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l c_{n-l} \langle \varphi_{|l|}, \varphi_{|n-l|} \mu \rangle_{L^2} \right\}.$$

D'où le résultat annoncé. □

Corollaire 4.1.2

Si $\forall k \geq 1, \langle \varphi_k, \varphi_k \mu \rangle_{L^2} > 0$, (resp. < 0), alors l'invariant associé est réduit à $\{0\}$.

Preuve :

On suppose $\forall k \geq 1, \langle \varphi_k, \varphi_k \mu \rangle_{L^2} > 0$, (*resp.* < 0). Soit (w_0, w_1) dans l'invariant. D'après le Lemme 4.1.1 et en reprenant les mêmes notations, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l c_{n-l} \langle \varphi_{|l|}, \varphi_{|n-l|} \mu \rangle_{L^2} = 0.$$

En particulier pour $n = 0$,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l c_{-l} \langle \varphi_{|l|}, \varphi_{|-l|} \mu \rangle_{L^2} = 1/4 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \{(k\pi)^2 \langle w_0, \varphi_{|k|} \rangle_{L^2}^2 + \langle w_1, \varphi_{|k|} \rangle_{L^2}^2\} \langle \varphi_{|k|}, \varphi_{|k|} \mu \rangle_{L^2} = 0.$$

D'où, $\forall k \geq 1, \langle w_0, \varphi_k \rangle_{L^2} = 0$ et $\langle w_1, \varphi_k \rangle_{L^2} = 0$, d'où $(w_0, w_1) = (0, 0)$ et le résultat annoncé. □

Corollaire 4.1.3

Soit $\mu \neq 0 \in L^\infty(0, 1)$, tel que $\mu \geq 0$ presque partout; alors l'invariant associé est réduit à $\{0\}$.

Preuve :

Il suffit de constater que sous ces hypothèses

$$\forall k \geq 1, \langle \varphi_k, \varphi_k \mu \rangle_{L^2} > 0,$$

et d'appliquer le Corollaire 4.1.2. □

4.2 Stabilisation du modèle réel

4.2.1 Résultats préliminaires

On s'intéresse ici seulement au modèle réel. Dorénavant, on se donne μ dans $W^{1,\infty}(0, 1)$. On rappelle tout d'abord que pour l'équation (3.1.1) du modèle d'étude, on utilise l'opérateur $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Lemme 4.2.1

L'opérateur \mathcal{B} est continu aussi bien sur $(H_0^1 \times L^2)$ que sur $(L^2 \times H^{-1})$. Dans tous les cas, $\|\mathcal{B}\| \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} + \|\mu'\|_{L^\infty(0,1)}$.

Preuve

Si $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$, on a

$$\|\mathcal{B} \cdot (w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2} = \|\mu w_1\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} \|w_1\|_{L^2} \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)} \|(w_0, w_1)\|_{H_0^1 \times L^2}.$$

Si $(w_0, w_1) \in (L^2 \times H^{-1})$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B} \cdot (w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}} &= \|\mu w_1\|_{H^{-1}} \\ &= \sup\{|\langle \mu w_1, \varphi \rangle|; \varphi \in H_0^1\} \\ &= \sup\{|\langle w_1, \mu \varphi \rangle|; \varphi \in H_0^1\} \quad (\varphi \in H_0^1 \Rightarrow \mu \varphi \in H_0^1) \\ &\leq \sup\{\|w_1\|_{H^{-1}} \|\mu \varphi\|_{H_0^1}; \varphi \in H_0^1\} \end{aligned}$$

Comme

$$\|\mu\varphi\|_{H_0^1} \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,1)}\|\varphi'\|_{L^2} + \|\mu'\|_{L^\infty(0,1)}\|\varphi\|_{L^2} \leq \left[\|\mu\|_{L^\infty(0,1)} + \|\mu'\|_{L^\infty(0,1)} \right] \|\varphi\|_{H_0^1},$$

On a

$$\|\mu w_1\|_{H^{-1}} \leq \left[\|\mu\|_{L^\infty(0,1)} + \|\mu'\|_{L^\infty(0,1)} \right] \|w_1\|_{H^{-1}} \leq \left[\|\mu\|_{L^\infty(0,1)} + \|\mu'\|_{L^\infty(0,1)} \right] \|(w_0, w_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}.$$

□

Lemme 4.2.2

Soit $\mu \in L^\infty(0, 1)$ tel que $\mu \geq 0$ presque partout.

La fonctionnelle $\Phi : f \in L^2(0, 1) \mapsto \left(\int_0^1 \mu(x) f^2(x) dx \right) \in [0, +\infty)$ est alors semi-continue inférieurement.

Preuve :

Soit λ un nombre réel. Soit $E_\lambda := \{f \in L^2(0, 1) \mid \Phi(f) \leq \lambda\}$.

Montrons que E_λ est fermé dans $L^2(0, 1)$.

Soit $(f_n)_{n \geq 0} \in (E_\lambda)^N$, telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(0,1)} f$.

Quitte à extraire, par la réciproque du théorème de Lebesgue, il existe N de mesure nulle

$$\forall x \in ((0, 1) \setminus N), f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} f(x),$$

d'où, par le lemme de Fatou

$$\Phi(f) = \int_0^1 \mu(x) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n^2(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mu(x) f_n^2(x) dx \leq \lambda,$$

d'où $f \in E_\lambda$ et le résultat annoncé.

□

Lemme 4.2.3

Soient $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$ et (w, w_t) la solution de (4.1.1) de condition initiale (w_0, w_1) .

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant en croissant vers $+\infty$. Soit $T > 0$.

Il existe $Y \in L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ et φ extractrice tels que

$$(w, w_t)(t_n + \cdot) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})} Y.$$

Preuve

La preuve est exactement celle du Lemme 3.2.3, suivie des paragraphes 1) et 2) de la preuve du Lemme 3.2.4. Par contre, on utilise maintenant le Lemme 4.2.1 à la place du Lemme 3.2.1, puisque 'il s'agit ici du modèle réel (4.1.1) au lieu du modèle d'étude (3.1.1).

□

4.2.2 Stabilisation faible du modèle réel

Théorème 4.2.4

Soit $\mu \in W^{1,\infty}$ non nul. On suppose $\mu \geq 0$ presque partout.

Alors, pour tout $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$, condition initiale de la solution (w, w_t) du système bouclé, on a :

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} 0$$

Preuve :

On a déjà vu que les trajectoires sont bornées dans $(H_0^1 \times L^2)$ par C , par décroissance de l'énergie. Soient $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$ et (w, w_t) solution du système bouclé (4.1.1) de condition initiale (w_0, w_1) . Comme dans la preuve du Théorème 3.2.2 pour le modèle d'étude, on se donne (w_0^∞, w_1^∞) et $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant en croissant vers $+\infty$, tels qu'on ait

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty). \quad (4.2.1)$$

Quitte à extraire, on suppose

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} (w_0^\infty, w_1^\infty). \quad (4.2.2)$$

On montre que $(w_0^\infty, w_1^\infty) = (0, 0)$.

Soit $T > 2$. On pose dorénavant :

$$\begin{aligned} u : t \in \mathbb{R}_+ &\mapsto \langle w_t(t), w_t(t) \mu \rangle_{L^2(0,1)} \in \mathbb{R}_+ \\ u^n : t \in (0, T) &\mapsto u(t_n + t) \in \mathbb{R}_+ \\ (w^n, w_t^n) : t \in (0, T) &\mapsto (w, w_t)(t_n + t) \in (H_0^1 \times L^2). \end{aligned}$$

La suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $L^2(0, T)$, car $u \in L^2(0, +\infty)$ par (4.1.3). Donc, par la réciproque du théorème de Lebesgue, quitte à extraire dans $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dès le début, il existe $N \subset (0, T)$ de mesure nulle tel que

$$\forall t \in ((0, T) \setminus N), \quad u^n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} 0. \quad (4.2.3)$$

D'autre part, par le Lemme 4.2.3, quitte à extraire dès le début dans $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $Y := (y_0, y_1) \in L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})$ tel que

$$(w^n, w_t^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2((0, T), L^2 \times H^{-1})} Y.$$

Enfin, quitte à extraire dans $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dès le début, on peut appliquer la réciproque du théorème de Lebesgue pour obtenir, comme dans la preuve du Lemme 3.2.4 pour le modèle d'étude, l'existence d'un ensemble $N_1 \subset (0, T)$ de mesure nulle tel que

$$\forall t \in ((0, T) \setminus N_1), (w^n, w_t^n)(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} Y(t) \quad (4.2.4)$$

$$(w^n, w_t^n)(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} Y(t). \quad (4.2.5)$$

Soit $t \in ((0, T) \setminus (N_1 \cup N))$. On a par définition

$$(w^n, w_t^n)(t) = e^{tA}(w, w_t)(t_n) + \int_0^t e^{sA} \mathcal{B} \cdot (w^n, w_t^n)(s) u^n(s) ds. \quad (4.2.6)$$

On peut alors faire tendre n vers $+\infty$, pour la topologie forte $(L^2 \times H^{-1})$, pour obtenir

$$Y(t) = e^{tA}(w_0^\infty, w_1^\infty). \quad (4.2.7)$$

Pour passer à la limite dans le membre de gauche de (4.2.6), on utilise (4.2.4). Pour le premier terme du membre de droite de (4.2.6), on utilise (4.2.2) et le Lemme 3.2.2. Enfin, pour le dernier terme de (4.2.6), on a

$$\int_0^t e^{sA} \mathcal{B} \cdot (w^n, w_t^n)(s) u^n(s) ds \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2 \times H^{-1}} 0.$$

En effet, comme $u^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(0, T)} 0$, on a d'une part

$$u^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1(0, T)} 0.$$

D'autre part, (w, w_t) étant bornée par C dans $(H_0^1 \times L^2)$ l'est à plus forte raison dans $(L^2 \times H^{-1})$. D'où par les Lemmes 3.2.2 et 4.2.1, on a

$$\forall s \in (0, T), n \in \mathbb{N}, \quad \|e^{sA} \mathcal{B} \cdot (w^n, w_t^n)(s)\|_{L^2 \times H^{-1}} \leq \|\mathcal{B}\|C.$$

Remarquons maintenant que $\Phi : f \in L^2(0, 1) \mapsto (\int_0^1 \mu(x) f^2(x) dx) \in [0, +\infty)$ est convexe (comme forme quadratique positive) et semi-continue inférieurement par le Corollaire 4.2.2. D'où (Brézis [2], Cor.3.8, p.38), en partant de (4.2.4), la convergence suivante

$$w_t^n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} y_1(t)$$

implique que

$$0 \leq \langle y_1(t), \mu y_1(t) \rangle_{L^2} \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} u^n(t) = 0, \quad (4.2.8)$$

la dernière égalité provenant de (4.2.3).

Les identités (4.2.7) et (4.2.8) montrent exactement que Y vérifie les équations de l'invariant (4.1.4). Or, d'après les hypothèses sur μ et le Lemme 4.1.3, l'invariant (4.1.4) est réduit à $\{0\}$. D'où, $Y(0) = (w_0^\infty, w_1^\infty) = (0, 0)$, ce qui est le résultat annoncé.

Enfin, chaque trajectoire étant bornée dans $(H_0^1 \times L^2)$ et $\{(w, w_t)(t), t \geq 0\}$ ayant $(0, 0)$ pour seule valeur d'adhérence faible $(H_0^1 \times L^2)$, on conclut comme dans le Théorème 3.2.2 que

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque

Ce Théorème 4.2.2 de stabilisation faible pour le modèle réel est un peu plus délicat à montrer que son analogue (3.2.2) pour le modèle d'étude. En effet

$$(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_0^1 \times L^2} (w_0^\infty, w_1^\infty)$$

implique pour le modèle d'étude

$$\langle w_t(t_n), w(t_n)\mu \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} \langle w_1^\infty, w_0^\infty \mu \rangle_{L^2(0,1)}$$

mais pas forcément

$$\langle w_t(t_n), w_t(t_n)\mu \rangle_{L^2(0,1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} \langle w_1^\infty, w_1^\infty \mu \rangle_{L^2(0,1)}$$

dans le cas du modèle réel. Il était donc fort utile de traiter au préalable la stabilisation faible du modèle d'étude pour se familiariser avec les techniques mises en oeuvre dans ce type de preuve. Enfin, la condition μ positif est nécessaire à cette preuve, car pour avoir (4.2.8), $x \in L^2(0,1) \mapsto \langle \mu x, x \rangle_{L^2(0,1)}$ doit être convexe.

4.2.3 Stabilisation forte pour $\mu = 1$

On se place dans le cas du modèle réel, étudié avec la condition $\mu = 1$, c'est à dire :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + u(t)w_t = 0 \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x) \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Où $u(t) = \langle w_t, w_t \rangle_{L^2}$ et $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0,1)$.

Ce cas diagonal simplifie considérablement les calculs. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4.2.5

Pour tout $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(0,1)$ la solution (w, w_t) du système (4.2.9) converge fortement vers $(0, 0)$ dans $H_0^1 \times L^2(0,1)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

La preuve du théorème ci-dessus s'inspire de l'article de J. M. Coron et B. d'Andréa Novel [5]. Pour prouver ce théorème, on a besoin des deux lemmes préliminaires suivant.

On propose de démontrer le premier dans un cadre un peu plus général.

Lemme 4.2.6

Soit H un espace de Hilbert, \mathcal{A} un opérateur maximal monotone linéaire générant un semi-groupe continu sur H . Soit $f : H \mapsto H$ localement lipschitzienne. Alors, pour tout $Y_0^1, Y_0^2 \in H^2$, pour tout $T > 0$, il existe $C(T)$ telle que les solutions Y^1, Y^2 de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \mathcal{A}Y(t) + f(y(t)), \quad (4.2.10)$$

de condition initiale respectivement Y_0^1 et Y_0^2 vérifient

$$\|Y^1 - Y^2\|_{L^\infty((0,T),\mathbb{H})} \leq C(T)\|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathbb{H}}. \quad (4.2.11)$$

Preuve du Lemme

Les solutions de (4.2.10) s'écrivent

$$Y(t) = e^{At}Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(Y(s))ds.$$

Soit $T > 0$, et L la constante de Lipschitz associée à f sur $(0, T)$. On a alors, pour tout $0 \leq t \leq T$ les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} Y^1(t) - Y^2(t) &= e^{At}(Y_0^1 - Y_0^2) + \int_0^t e^{A(t-s)}(f(Y^1(s)) - f(Y^2(s)))ds \\ \|Y^1(t) - Y^2(t)\|_{\mathbb{H}} &\leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t L\|Y^1(s) - Y^2(s)\|_{\mathbb{H}}ds. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on a

$$\|Y^1(t) - Y^2(t)\|_{\mathbb{H}} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathbb{H}}e^{LT},$$

d'où le résultat. □

On énonce le deuxième lemme uniquement dans notre cas précis.

Lemme 4.2.7

Soient $(w_0, w_1) \in (H_0^1 \times L^2)$ tels que la solution (w, w_t) du système bouclé (4.2.9) vérifie

$$\{(w, w_t)(t), \quad t \geq 0\} \quad \text{est compact dans } (H_0^1 \times L^2).$$

Alors, on a

$$(w, w_t)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{H_0^1 \times L^2} 0.$$

Preuve du Lemme

L'ensemble $\{(w, w_t)(t), \quad t \geq 0\}$ est compact dans $(H_0^1 \times L^2)$.

Donc, il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ et il existe $(v_0, v_1) \in (H_0^1 \times L^2)$

tels que $(w, w_t)(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0^1 \times L^2} (v_0, v_1)$.

De plus, on sait, par le choix du contrôle, que $t \mapsto \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}$ est décroissante. Ainsi $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}$ est décroissante et positive, donc elle est convergente quand $t \rightarrow +\infty$. Soit L sa limite.

Soit (v, v_t) la solution du système bouclé de condition initiale (v_0, v_1) . On a alors, d'après le Lemme 4.2.6

$$(w, w_t)(t_n + t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0^1 \times L^2} (v, v_t)(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Donc, pour tout t positif

$$\|(v, v_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(w, w_t)(t + t_n)\|_{H_0^1 \times L^2} = L,$$

ce qui donne

$$\|(v, v_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2} = L, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc (v_0, v_1) appartient à l'invariant, i.e. $(v_0, v_1) = 0$.

On a montré que $\|(w, w_t)(t_n)\|_{H_0^1 \times L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Or $t \mapsto \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}$ est décroissante, donc $\|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

□

Preuve du Théorème

On a déjà vu que pour $\mu = 1$ l'invariant correspondant au système (4.2.9) est réduit à $\{0\}$. Comme l'espace $(H_0^1 \times L^2)$ est complet, pour montrer que $\{(w, w_t)(t), t \geq 0\}$ est compact dans $(H_0^1 \times L^2)$, il suffit de montrer que cet ensemble est précompact dans $(H_0^1 \times L^2)$.

Soit $\varepsilon \geq 0$, $T > 0$.

Notons

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n \geq 1} a_n(t) \sin(n\pi x), \\ w^k(t, x) &:= \sum_{n \geq k} a_n(t) \sin(n\pi x), \\ u(t) &= \langle w_t, w_t \rangle_{L^2}, \\ u^k(t) &:= \langle w_t^k, w_t^k \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Les fonctions w et w^k vérifient alors

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} + u(t)w_t &= 0, \\ w_{tt}^k - w_{xx}^k + u(t)w_t^k &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \\ u(t) &= \langle w_t, w_t \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n'(t)^2. \end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &:= \|(w, w_t)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = \int_0^1 w_x(t, x)^2 + w_t(t, x)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n(t)^2 + a_n'(t)^2) \\ \mathcal{L}_k(t) &:= \|(w^k, w_t^k)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = \int_0^1 w_x^k(t, x)^2 + w_t^k(t, x)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq k} (a_n(t)^2 + a_n'(t)^2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_k(t) &= 2 \int_0^1 w_{tx}^k w_x^k + w_{tt}^k w_t^k dx \\ &= 2 \int_0^1 -w_t^k w_{tt}^k + w_{tt}^k w_t^k dx \\ &= 2 \int_0^1 -w_t^k (w_{tt}^k + \langle w_t, w_t \rangle w_t^k) + w_{tt}^k w_t^k dx \\ &= -2 \langle w_t, w_t \rangle \int_0^1 w_t^k w_t^k dx \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}_k(t) &= -2u(t)u^k(t). \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq u^k(t) \leq u(t),$$

et ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. De fait, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \geq 0$, on a que $\|w^k(t)\|_{H_0^1 \times L^2} \leq \|w^k(0)\|_{H_0^1 \times L^2}$. Il suffit donc de choisir la fréquence de coupure au temps $t = 0$.

$$\exists k > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \mathcal{L}_k(t) \leq \|w^k(0, \cdot)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\{(w - w^k)(t), \quad t \geq 0\}$ est un ensemble borné dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. On peut le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε . Ceci est valable pour tout ε positif, donc $\{(w, w_t)(t), \quad t \geq 0\}$ est précompact dans $H_0^1 \times L^2$; il est donc compact.

En appliquant le Lemme 4.2.7, on a immédiatement la convergence forte des trajectoires.

□

Remarques

Les deux points centraux de cette démonstration sont :

- d'abord, les propriétés de positivité $0 \leq u^k(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
- ensuite, le fait que dans le cas diagonal, les fréquences ne sont pas mélangées.

Cela permet de simplifier considérablement cette preuve de compacité. On pourrait considérer une autre preuve que celle-ci, qui aurait l'intérêt de peut-être pouvoir se généraliser plus facilement. En effet, à partir de (4.2.12), on obtient $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_k(t) \leq u(t)^2 + u^k(t)^2$ pour tout $t \geq 0$, et en intégrant $\mathcal{L}_k(t+T) \leq \mathcal{L}_k(t) + \int_t^{t+T} u(s)^2 ds + \int_t^{t+T} u^k(s)^2 ds$. En arrivant à montrer que u ET u^k sont de carrés intégrables (ce qui est le cas ici), on obtient qu'il existe T_1 , pour tous $k \in \mathbb{N}^*, t \geq 0, \mathcal{L}_k(t) \leq \sup_{t \in [0, T_1]} \|w^k(t, \cdot)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui permet de conclure de la même manière en remarquant que $[0, T_1]$ est compact.

Cette preuve s'inspire directement d'une démonstration similaire développée dans [5].

Conclusion

Durant ce stage, notre étude des systèmes (3.1.1) et (4.1.1) a permis d'obtenir des résultats de stabilisation intéressants. Pour le modèle d'étude, nous avons démontré la stabilisation faible lorsque l'ensemble invariant est réduit à $\{0\}$, cette hypothèse étant par ailleurs nécessaire pour espérer obtenir une stabilisation. Ce résultat est optimal au niveau des hypothèses sur la fonction μ . La stabilisation forte reste cependant ouverte.

Pour le modèle réel, nous avons démontré la stabilisation faible dans un cadre plus restrictif, i.e. en imposant la condition $\mu(x) \geq 0$. Nous démontrons par ailleurs que cette condition est suffisante pour obtenir un invariant réduit à $\{0\}$. De plus, nous avons démontré la stabilisation forte dans le cas particulier et très simplifié $\mu = 1$. Ces résultats positifs dans des cas particuliers permettent de conjecturer la stabilisation forte en général, comme le soulignent nos simulations numériques.

Par ailleurs, nous avons apprécié d'être guidés progressivement vers les objectifs mathématiques de ce stage, de découvrir beaucoup de nouvelles mathématiques, notamment en analyse fonctionnelle et surtout de consulter des articles de recherche relativement récents et bien appropriés pour aborder les difficultés soulevées par notre sujet. Nous tenons donc à remercier notre directrice de stage pour sa disponibilité et sa pédagogie.

Bibliographie

- [1] K. Beauchard. *Polycopié : Dynamique et contrôle de systèmes non-linéaires*.
- [2] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod.
- [3] J.M. Ball and M. Slemrod. Feedback Stabilization and Distributed Semilinear Control Systems. *Appl. Math. Optim.* 5, pages 169–179, 1979.
- [4] J.E. Marsden J.M. Ball and M. Slemrod. Controllability for Distributed Bilinear Systems. *SIAM Control and Optimization Vol. 20 N. 4*, pages 575–597, July 1982.
- [5] J.M. Coron and B. d’Andréa Novel. Stabilization of a rotating body-beam without damping. *IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 43 N. 5*, pages 608–618, May 1998.
- [6] S. Ervedoza and E. Zuazua. *Propagation, observation and numerical approximation of waves*.
- [7] A.Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. *Dept. of Mathematics, Univ. of Maryland, Lecture Notes No. 10*, 1974.

Chapitre 5

Annexes

Codes Matlab

```
function [out]=integrale01(f,g)
fg = @(x) f(x).*g(x);
out =quad(fg,0,1);
```

Modèle réel

```
function [y0,out_n,out_y,out_y2,out_t,out_1,out_2,out_3,out_4]=
pentemodelereel(freqdecoup,tmax,mu,w0,w1)
```

```
out_n=freqdecoup;
for i=1:freqdecoup
    invvect(1,i)=1/i;
    idenvect(1,i)=i;
end

B=ones(freqdecoup,freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    for l=1:freqdecoup
        B(k,l)=2*intkl(k,l,mu);
        B(k,l)=B(k,l);
    end
end

A=zeros(freqdecoup,freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    A(k,k)=-(k*pi)^2;
end

AA=zeros(2*freqdecoup,2*freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    AA(k+freqdecoup,k)=A(k,k);
    AA(k,k+freqdecoup)=1;
```

```

end
BB=zeros(2*freqdecoup,2*freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    for l=1:freqdecoup
        BB(k+freqdecoup,l+freqdecoup)=B(k,l);
    end
end

yzero=ones(2*freqdecoup,1);
for k=1:freqdecoup
    yzero(k)=sqrt(2)*intk(k,w0);
    yzero(k+freqdecoup)=sqrt(2)*intk(k,w1);
end

y0=yzero;

fresol=@(t,y) AA*y-calculureel2(y,B)*BB*y;
[TT,YY]=ode45(fresol,[0,tmax],yzero);

[m,n]=size(YY);
L=zeros(m,1);
LL=zeros(m,1);
for i=1:m
    L(i,1)=1/(pi^2)*norm(YY(i,(freqdecoup+1):(2*freqdecoup)))
    .*invvect(1,(1:freqdecoup)))^2+norm(YY(i,1:(freqdecoup)))^2;
    LL(i,1)=pi^2*norm(YY(i,1:(freqdecoup)))
    .*idenvect(1,(1:freqdecoup)))^2+norm(YY(i,(freqdecoup+1):(2*freqdecoup)))^2;
end

pas=floor(m/100);
moindre carre=polyfit(TT(1:pas:m),L(1:pas:m),1);
moindre carre2=polyfit(TT(1:pas:m),LL(1:pas:m),1);

out_t=TT;
out_y=L;
out_y2=LL;
out_1=moindre carre(1);
out_2=moindre carre(2);
out_3=moindre carre2(1);
out_4=moindre carre2(2);

function [out_y]=calculureel2(y,B)
n=length(y);
out_y=(B*y((n/2+1):n))'*y((n/2+1):(n));

```

Modèle d'étude

```
function [out_n,out_y,out_t,out_1,out_2]=pentemodeledetude(freqdecoup,tmax,mu,w0,w1)
out_n=freqdecoup;
idenvect=zeros(1,freqdecoup);
for i=1:freqdecoup
    idenvect(1,i)=pi*i;
end

B=ones(freqdecoup,freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    for l=1:freqdecoup
        fctkl=@(x) sin(k*pi*x).*sin(l*pi*x);
        B(k,l)=2*integrale01(fctkl,mu);
        B(k,l)=B(k,l);
    end
end

A=zeros(freqdecoup,freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    A(k,k)=-(k*pi)^2;
end

AA=zeros(2*freqdecoup,2*freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    AA(k+freqdecoup,k)=A(k,k);
    AA(k,k+freqdecoup)=1;
end

BB=zeros(2*freqdecoup,2*freqdecoup);
for k=1:freqdecoup
    for l=1:freqdecoup
        BB(k+freqdecoup,l)=B(k,l);
    end
end

yzero=ones(2*freqdecoup,1);
for k=1:freqdecoup
    fctk=@(x) sin(k*pi*x);
    yzero(k)=sqrt(2)*integrale01(w0,fctk);
    yzero(k+freqdecoup)=sqrt(2)*integrale01(fctk,w1);
end

fresol=@(t,y) AA*y-calculu2(y,B)*BB*y;
[TT,YY]=ode45(fresol,[0 tmax],yzero);

[m,n]=size(YY);
L=zeros(m,1);
for i=1:m
```

```

    L(i,1)=(norm(YT(i,1:(freqdecoup))
.*idenvect(1,1:freqdecoup)))^2+norm(YT(i,(freqdecoup+1):(2*freqdecoup)))^2;
end

```

```

pas=floor(m/100);
moindre carre=polyfit(TT(1:pas:m),L(1:pas:m),1);

```

```

out_t=TT;
out_y=L;
out_1=moindre carre(1);
out_2=moindre carre(2);

```

```

function [out_y]=calculu2(y,B)
n=length(y);
out_y=(B*y(1:(n/2)))'*y((n/2+1):(n));

```

Tracé des courbes

```

clear all
freqdecoup=150;
tmax=10;
mu=@(x) 1;
w0=@(x) 0.1*sin(pi*x);
w1=@(x) 0.1*sin(3*pi*x);
[n,L,T,pente,ordonnee]=pentemodeledetude(freqdecoup,tmax,mu,w0,w1);

```

```

clf
figure(1)
plot(T,L,'r',T,pente*T+ordonnee)
legend('norme H^1_0xL^2',['pente=',num2str(pente)]);
title(['N=',num2str(n)])

```