

Pérégrinations quantiques

Morisse Baptiste - Sous la direction de Yves Meyer ^{*}
et de Thierry Paul [†]

Du 1er Février au 25 Juin

Survol

Je retrace dans ces pages le contenu, tant mathématique que physique, de mes entretiens avec le chercheur Thierry Paul, à Polytechnique. Pour m'aiguiller dans mes réflexions sur les liens entre Mécanique Quantique et Mécanique Classique, Yves Meyer m'orienta vers Thierry Paul, spécialiste de la limite semiclassique. J'ai appris avec lui les bases de ce domaine où les deux Mécaniques se rejoignent, et qui est mathématiquement très intéressant, tant par les problèmes qu'il soulève que par les liens qu'il développe entre plusieurs branches des Mathématiques.

J'ai donc utilisé à profit mes connaissances en Analyse Fonctionnelle et en Géométrie Différentielle glanées durant les deux premiers mois de stage. J'ai résolu les divers exercices que T. Paul me proposa en guise de «cours», et que je retrace dans la suite. Ainsi, on parlera de la variété des états cohérents et de ses propriétés, puis de la dynamique classique associée à ces états quantiques. L'approximation semiclassique par des états cohérents est développée ensuite, pour finir avec une brève étude sur les contraintes d'une telle approximation aux temps longs.

Ce rapport ne se veut en aucun cas le plus rigoureux possible. Il est le témoin écrit de tout ce que j'ai pu apprendre, et surtout comprendre, auprès de Thierry Paul. Dans l'optique d'un rapport aussi court, des démonstrations plus poussées auraient réduit considérablement la quantité de résultats, tous intéressants, que je voulais présenter.

1 État initial

Tout commença lors de ma première rencontre avec Yves Meyer. Nous nous étions donné rendez-vous pour discuter du stage. Je ne savais pas trop à quoi m'attendre, et je fus agréablement surpris. Après de courtes présentations, nous rentrons dans le vif du sujet. Y. Meyer me demande ce que j'aime comme Mathématiques, et lui réponds sincèrement que je suis plutôt penché sur la Physique Quantique... Son visage s'illumine comme par enchantement, et me demande aussitôt des détails. Je lui raconte alors mon engouement pour la physique. Nous décidâmes d'orienter mon stage sur la Physique Théorique.

Pour m'aider à discerner le sujet de mon stage (la physique théorique est un domaine très vaste), Y. Meyer me proposa de lire un court texte : «Quantum Fi-

^{*}yves.meyer@cmla.ens-cachan.fr

[†]thierry.paul@math.polytechnique.fr

led Theory in 90 minutes». Tiré d'une conférence de Paul Federbush, spécialiste des Théories Quantiques des Champs (*alias* QFTs), ce texte introduit les bases mathématiques des QFTs. Ce fut une révélation : j'accrochais immédiatement, tant pour les mathématiques développées que pour l'importance que les QFTs ont dans la compréhension de l'Univers. J'avais donc une grande envie de continuer dans cette voie. Y. Meyer me fit lire deux autres textes, mais je restais sûr de moi : je voulais travailler sur la Théorie Quantique des Champs.

Yves Meyer me conseilla donc la lecture d'un grand classique en la matière, le Glimm & Jaffe : «Quantum Field Theory : a Functional Integral Point of View». Vu la difficulté de ce livre, pour un étudiant de mon niveau, Y. Meyer me donna comme premier objectif pour ce stage de comprendre en profondeur le premier chapitre de cette bible, qui est une introduction aux Mécaniques Classique et Quantique.

Cette lecture fut longue et éprouvante. Outre le haut niveau de mathématiques demandé, le livre en lui-même est très souvent elliptique, voire erroné. Ce qui rajoute à la difficulté ! J'y appris cependant beaucoup ; chaque fois que je rencontrais un point que je ne comprenais pas, il me fallait explorer d'autres livres ou recevoir les précieuses aides de Yves Meyer, ou de Alain Chenciner, dont je suivais le cours de Mécanique Analytique à l'Observatoire de Paris. J'ai donc fouillé dans le Brézis, dans le Reed & Simon, le Kato, ou encore, le très grand livre «Mathematical Methods of Classical Mechanics» de V.I. Arnold. En ce sens, l'épreuve qu'a été la lecture de ce premier chapitre m'a permis de me plonger dans l'Analyse Fonctionnelle et la Géométrie Différentielle, et de lire de manière *active* ce chapitre. Ainsi, l'objectif fixé par Y. Meyer fut, je le crois, pleinement rempli.

2 Analogies classique-quantique

Au fil de mes lectures, une question fondamentale s'éleva en moi. Les deux Mécaniques, Classique et Quantique, ont de nombreux points communs - qui sont d'ailleurs accentués par une mise en forme identique dans le premier chapitre du Glimm & Jaffe. Pourtant, derrière ces analogies d'écriture (notamment le crochet de Lie et le commutant) se cache une différence qui pour moi se voulait de taille : si la Mécanique Classique repose presque exclusivement sur la Géométrie Différentielle, la Mécanique Quantique est entièrement basée sur l'Analyse Fonctionnelle - deux Mathématiques qui n'ont *a priori* que très peu de points communs. Alors que la Mécanique Quantique se doit de redonner la Mécanique Classique ! La question est alors : Si les deux Mécaniques reposent sur un lien aussi fort, qu'en est-il des deux Mathématiques qui leurs sont liées ?

Avant de m'en remettre à Yves Meyer, je réfléchissais à de possibles réponses. Déjà, le lien entre Classique et Quantique se faisait pour moi par le passe à la limite $\hbar \rightarrow 0$. Je me rappelais d'abord une limite connue, que j'avais dans mon cours du premier semestre de Mécanique Quantique, sur les états cohérents de type gaussien :

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-\frac{(x-q)^2}{\hbar}} = \delta_q$$

c'est-à-dire que l'état cohérent se concentre, dans la limite qui redonne la Mécanique Classique, en un point q , représenté par un δ de Dirac. Il faut alors obtenir, avec ce même état cohérent, la vitesse classique. Le problème est ici de taille. Je parlais du principe que la vitesse d'une particule est directement liée à la position, ou plutôt, à un continuum de positions centré en un point q spécifique, dont la vitesse est alors la dérivée en q de la position. Mais comment faire apparaître cette dérivée dans l'état

cohérent ? Je tentais bien sûr de dériver l'état cohérent lui-même : mais cela ne donne qu'une aberration.

Qu'à cela ne tienne ! Je décidais de continuer mon exploration, en me demandant comment l'action de l'hamiltonien quantique sur l'état cohérent pouvait se transformer en action de l'hamiltonien classique sur le couple position-vitesse (q, p) . Rien ne sortit de mes élucubrations, et je me décidais donc à en parler à M. Meyer.

La question lui plût tout de suite, et il me confirma que c'était là une question pertinente et profonde. Il ne pouvait cependant pas m'en dire d'avantage, car il ne connaissait pas la réponse. Il m'orienta vers un de ses amis qui, lui, saurait certainement m'éclairer de ces lumières. Il me conseilla donc de prendre contact avec Thierry Paul, physicien mathématicien, chercheur à Polytechnique, pour pouvoir le rencontrer et discuter sérieusement sur ce sujet. On convint assez rapidement d'un rendez-vous, et je le rejoignis donc le 8 avril dans son bureau à Polytechnique.

3 Rencontres avec Thierry Paul

3.1 *Nota Bene*

Cette rencontre, et les suivantes, m'ont beaucoup marquées. Thierry Paul est un homme plaisant, cultivé, d'une grande gentillesse. C'est surtout un plaisir de l'écouter raconter la physique : faits historiques, détails mathématiques, compréhension physique pointue mais profonde, chacune de ses paroles regorge de connaissances toutes plus importantes les unes que les autres. Je lui posais donc ma question, et il me répondit. Je n'ai malheureusement pas enregistré nos conversations ; je ne peux pas redonner le ton et l'enjouement de Thierry Paul, je vais donc me contenter de donner le fond de ces conversations.

De plus, tous les exemples traités ci-après sont fait en une dimension. Pour des raisons de simplicité, et parce que les concepts fondamentaux que je vais développer se généralise très facilement à des dimensions supérieures.

3.2 Première entrevue

Pour commencer, je lui expliquais pour quelles raisons j'avais besoin de lui, puis je lui présentais mes petites réflexions sur le sujet. Elles n'étaient pas hors de propos ; le problème est que je ne considérais qu'une petite partie des états cohérents. Il fallait étendre cette classe aux états

$$\psi_{q,p}(x) = e^{\frac{ipx}{\hbar}} e^{-\frac{(x-q)^2}{\hbar}}$$

qui forment l'ensemble des états cohérents. Pour ces états, on a la propriété très intéressante

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi_{q,p} &= \delta_q \\ \lim_{\hbar \rightarrow 0} \widehat{\psi}_{q,p} &= \delta_p \end{aligned}$$

où la notation $\widehat{\psi}_{q,p}$ désigne la \hbar -transformée de Fourier de $\psi_{q,p}$, c'est-à-dire

$$\widehat{\psi}_{q,p}(\xi) = \mathcal{F}_{\hbar} \psi_{q,p}(\xi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int \psi_{q,p}(x) e^{-ix\xi/\hbar} dx$$

On retrouve donc, à la limite $\hbar \rightarrow 0$, le couple position-impulsion (q, p) .

On cadre le sujet

Mais si mon idée initiale était une bonne approche du problème, je manquais une chose essentielle à toute réflexion : un cadre clair dans lequel travailler. Tout repose sur ce que l'on cache derrière cette limite un peu sauvage. Et c'est sur ce point que, assurément, Thierry Paul m'a le plus apporté. Le lien entre Mécanique Quantique et Mécanique Classique est assez subtil. Thierry Paul n'aime pas cette image de la Classique vue comme «limite» de la Quantique : cela voudrait dire qu'elle existe à l'extérieur du monde quantique, alors qu'au contraire elle devrait être complètement contenue dans l'univers quantique ; la Mécanique Quantique se doit en effet d'agrandir le champ de compréhension de la Mécanique Classique - et donc en particulier retrouver le domaine couvert par la Classique. Thierry Paul préfère le terme de bord, plus proche de la réalité.

D'autant que «faire tendre \hbar vers 0» peut paraître absurde : comment pourrait-on faire tendre une constante de la physique théorique vers 0 ? Une constante est par définition : constante ! Un procédé permet de passer cette difficulté, en dilatant les états initiaux de la dynamique. Thierry Paul me donna ainsi ce petit exercice :

«Considérons l'hamiltonien, en une dimension, de l'atome d'hydrogène (i.e. potentiel coulombien) :

$$H = -\hbar^2 \Delta - \frac{1}{|x|}$$

et l'équation aux valeurs propres associée :

$$\left(-\hbar^2 \Delta - \frac{1}{|x|}\right)\psi = E\psi$$

On considère une dilatation de cet état ψ , c'est-à-dire :

$$\psi(x) = \hbar^{\alpha/2} \varphi(\hbar^\alpha x)$$

où φ est unitaire, le coefficient $\hbar^{\alpha/2}$ provenant de la normalisation. En choisissant le bon α , on peut factoriser le \hbar dans l'équation aux valeurs propres, et ainsi écrire

$$\left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right)\varphi = \tilde{E}\varphi$$

où \tilde{E} dépende de \hbar . On a donc rendu H indépendant de \hbar , qui joue alors le rôle d'une vraie constante, et que l'on peut alors naturellement poser égale à 1.

Petit exercice : déterminer le α en question, calculer \tilde{E} et interpréter la limite de \tilde{E} quand \hbar tend vers 0. »

Le calcul en lui-même est aisé. On obtient

$$\hbar^{\alpha/2} \left(-\hbar^{2+2\alpha} \Delta \varphi - \frac{\hbar^\alpha}{|x|} \varphi\right) = E \hbar^{\alpha/2} \varphi$$

Pour pouvoir factoriser \hbar il faut donc que

$$2 + 2\alpha = \alpha$$

et donc $\alpha = -2$. Ainsi, $\tilde{E} = \hbar^3 E$ qui tend vers 0 quand \hbar tend vers 0 : regarder la limite semiclassical revient à étudier la partie haute du spectre, qui dans le cas

du potentiel coulombien est du type $E_n = -\frac{R}{n^2}$. Ceci permet d'étendre le procédé à d'autres types de potentiels, pour lesquels un tel calcul ne serait pas possible. Il est surtout à noter qu'on retrouve en fait une des bases de la physique quantique, c'est-à-dire le principe de correspondance de Bohr, énoncé aux alentours de 1923. Ce principe énonce simplement que, à la limite des «grands nombres quantiques», on doit retrouver la physique classique. C'est exactement ce que l'on vient de faire, de manière plus formelle peut-être.

Sous ses airs de passe-passe, cet exercice montre que la limite semiclassique, qui consiste à faire tendre la constante-pas-si-constante \hbar vers 0, est juste une méthode plus directe de calculs ; on pourrait, de manière équivalente, laisser de manière effective \hbar constante, et étudier la partie haute du spectre.

Naissance des états cohérents

Revenons à nos états cohérents. Ils sont apparus de manière assez brutale, d'ailleurs. S'ils ont permis effectivement de dégager une limite vers le couple position-impulsion, d'où viennent-ils ? T. Paul me raconta comment ils apparaissent naturellement, en comparant les deux Mécaniques.

Dans chacune d'elles, on considère la fonction qui contient toute l'information sur le comportement global du système : l'hamiltonien. Cette fonction est dans les deux cas (et c'est à rapprocher du Principe de Correspondance) de la même forme - si l'on oublie le fait que dans chaque cas elle existe dans un cadre différent :

Mécanique Classique L'hamiltonien h est une fonction de l'espace des phases. (q, p) est dans \mathbb{R}^{2n} . Cadre : géométrie différentielle ; fonction sur un espace de dimension finie.

Mécanique Quantique L'hamiltonien H est un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . q et p sont remplacés par les opérateurs \hat{q} et $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\partial_q$. Cadre : analyse fonctionnelle, fonction dans un espace de dimension infinie.

Pour visualiser la chose, regardons (à nouveau) le cas du potentiel coulombien :

$$h(q, p) = p^2 - \frac{1}{|q|} \quad \text{dans le cadre classique}$$

$$H = \hat{p}^2 - \frac{1}{|\hat{q}|} \quad \text{dans le cadre quantique}$$

Les deux fonctions, à une petite différence de notation, sont les mêmes. Même si c'est là un cas particulier, il n'est pas isolé ; d'autres hamiltoniens peuvent s'écrire de la même façon en classique et en quantique. Bien sûr, les deux fonctions ne vivent pas dans le même espace, et cela donne une différence fondamentale entre les deux Mécaniques : en Classique, les observables commutent, mais pas en Quantique ! Pour l'exemple : les observables classiques de position et d'impulsion commutent :

$$pq = qp$$

au contraire des observables quantiques :

$$[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar$$

La non-commutation des observables est le trait caractéristique de la Mécanique Quantique. En découle de nombreuses propriétés, qui ont longtemps (et encore) frappés l'esprit humain. Par exemple, sachant que les observables \hat{q} et \hat{p} correspondent

à la mesure de la position et de l'impulsion d'une particule, la non-commutation de ces deux observables implique que les mesures de la position, puis de l'impulsion ne donnent pas le même résultat que les mesures de l'impulsion, puis de la position ! De toute façon, l'idée même de mesure d'une quantité en Mécanique Quantique ne correspond plus à celle à laquelle l'esprit humain était habitué : quel que soit la précision des appareils, même dans nos rêves les plus fous, il resterait, de manière *intrinsèque*, une indétermination sur les quantités mesurées. Ce fait est résumé dans le théorème portant sur les inégalités de Heisenberg :

Théorème 3.1 (Inégalités de Heisenberg). *Pour deux opérateurs auto-adjoints A et B sur un espace de Hilbert, si $\psi \in D(A) \cap D(B)$, alors en posant*

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2}$$

et de même pour B , on obtient

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi, [A, B] \psi \rangle|$$

Notons que ce résultat est bien un théorème, et non un axiome de la Mécanique Quantique. La démonstration de ce fait est d'ailleurs purement mathématique, et consiste à appliquer deux fois de suite l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il est naturel de se pencher sur le cas d'égalité, notamment pour les opérateurs $A = \hat{p}$ et $B = \hat{q}$. On cherche ainsi les états ψ tels que

$$\Delta_\psi \hat{p} \Delta_\psi \hat{q} = \frac{\hbar}{2}$$

En reprenant la démonstration, et en étudiant à chaque fois le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, on obtient l'ensemble de ces états qui saturent l'inégalité de Heisenberg. Et magie ! on tombe ni plus ni moins sur nos états cohérents, qui apparaissent ainsi au cœur de la Mécanique Quantique.

3.3 Dynamique des états cohérents

Voyage au pays des états cohérents

Il est donc grand tend de se pencher un peu plus sur ces états $\psi_{q,p}$. Leurs propriétés font d'eux des outils idéaux pour obtenir des premiers résultats en limite semi-classique. Je les ai résumées ci-dessous.

- Ils forment naturellement une variété différentielle dans l'espace de Hilbert du système (i.e. l'espace des états possibles du système), indicés par le couple (q, p) , et donc de dimension 2 ($2n$ dans le cas de la dimension n).
- Ils forment un ensemble surcomplet : tout état du système peut s'exprimer en fonctions des états cohérents, ce qui renforce leur importance. Il suffit de connaître l'évolution de ces états particuliers pour connaître celle de tous les autres états.
- Et le plus important : cette famille des états cohérents reste quasiment invariante sous la dynamique quantique. Quasiment : l'écart entre l'évolution d'un état cohérent et la variété de ces états est contrôlé par \hbar , et cet écart s'annule justement à la limite semiclassique. La «trace» de l'évolution d'un état cohérent sur la variété est, elle, soumise à une dynamique... classique !

Cette dernière propriété est bien sûr la plus intéressante - tout en étant, pour l'instant, un peu vague. En somme, si l'on a vu que les états cohérents pouvaient redonner, à la limite semiclassique, le classique couple position-impulsion, ils font mieux : à un petit quelque chose près, l'évolution des $\psi_{q,p}$ est dictée par la dynamique classique sur le couple (q, p) qui indice la variété.

Ce résultat apparaît clairement dans les premiers travaux de Schrödinger en 1926. Il se concentre sur l'oscillateur harmonique, et montre que

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}[-\hbar^2\Delta + x^2]\right)\psi_{q,p} = e^{il(t)}\psi_{q(t),p(t)}$$

où $l(t)$ est l'action lagrangienne classique de l'oscillateur harmonique, et le couple $(q(t), p(t))$ est l'image par le flot classique du couple (q, p) , c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \dot{q} &= & 2p \\ \dot{p} &= & -V'(q) \end{cases}$$

Ce résultat peut être généralisé à d'autres hamiltoniens et à des états cohérents plus généraux, que j'introduis immédiatement :

Définition (États cohérents). *Pour $(q, p) \in \mathbb{R}^2$, et a dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ unitaire (pour la norme L^2), on définit*

$$\psi_{q,p}^a(x) = \hbar^{-1/4} a\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{ipx/\hbar}$$

Ces états cohérents sont localisés en q , et modulé par une phase dépendante de p . Ces états ont les mêmes propriétés que j'ai décrites précédemment pour les états cohérents de type gaussienne.

Évolution des états cohérents

On considère maintenant un potentiel V , C^3 . Ceci restreint considérablement les hamiltoniens qui satisfont à cette condition, mais elle permet de faire un calcul simple mais subtil, et ainsi de dégager un résultat profond que nous discuterons ensuite. On considère aussi un état cohérent $\psi_{q,p}^a$ de départ, dont on étudie l'évolution sous la dynamique de l'hamiltonien $H = -\hbar^2\Delta + V$; on cherche ainsi à résoudre le système

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi^t &= & H\psi^t \\ \psi^0 &= & \psi_{q,p}^a \end{cases}$$

Ce qui est assez incroyable, c'est que le flot quantique garde l'état cohérent initial très près d'un état cohérent, qui est lui soumis à la dynamique... classique! Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Pour tout temps t , il existe $l(t)$, a^t , $p(t)$ et $q(t)$ tels que*

$$\|\psi^t - \psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}\|_2 \leq C(t)\hbar^{1/2}$$

où $C(t)$ est une constante positive.

Il me paraît intéressant de faire la démonstration de ce résultat. Outre le fait que les mathématiques nécessaires sont assez basiques (même si certains raisonnements sont subtils), il permet de rentrer dans le vif du sujet. La suite est donc une preuve du «théorème», qui commence par le lemme calculatoire suivant :

$$H\psi_{q,p}^a = \psi_{q,p}^b$$

où b a un développement en puissances demi-entières de \hbar (alors que a ne dépendait pas de \hbar). En effet, en utilisant la définition même de H , un calcul simple donne

$$b\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) = (p^2 + V(x)) a\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) - 2ip\hbar^{1/2} a'\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) - \hbar a''\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} b(x) &= (p^2 + V(q + \sqrt{\hbar})) a(x) - 2ip\hbar^{1/2} a'(x) - \hbar a''(x) \\ &= (p^2 + V(q)) a(x) + \hbar^{1/2} (xV'(q)a(x) - 2ipa'(x)) \\ &\quad + \hbar\left(\frac{1}{2}x^2V''(q)a(x) - a''(x)\right) + \tilde{R}(\hbar) \end{aligned}$$

avec \tilde{R} le reste intégral du développement de Taylor de V en q :

$$\tilde{R}(q, x) = \hbar^{3/2} x^3 \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} V^{(3)}(q + y(\hbar^{1/2}x)) dy$$

Ce résultat pousse à chercher ψ^t sous la forme d'un tel état cohérent, c'est-à-dire en cherchant directement a^t , $q(t)$ et $p(t)$ tels que

$$i\hbar\partial_t\psi_{q(t),p(t)}^{a^t} = H\psi_{q(t),p(t)}^{a^t}$$

Malheureusement, cela ne marche pas ; le calcul ne permet pas de déterminer les divers éléments. Il paraît alors naturel de rajouter une phase à cet état cohérent, et donc d'étudier

$$i\hbar\partial_t[\psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}] = H[\psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}]$$

Cette équation devient, après un rapide calcul :

$$-i(t)a^t - \dot{p}(t)xa^t + i\hbar\dot{a}^t\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) - i\hbar^{1/2}\dot{q}(t)(a^t)'\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) = b^t\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right)$$

En remplaçant $\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}$ par x , et en rangeant le terme de gauche suivant les puissances de \hbar , on identifie les termes en \hbar^0 , $\hbar^{1/2}$ et en \hbar (en oubliant, en fait, tous les termes d'ordre supérieur) :

$$\begin{cases} -\dot{p}(t)q(t) - \dot{l}(t) &= p^2 + V(q(t)) \\ -\dot{p}(t)xa^t - i\dot{q}(t)(a^t)' &= xV'(q)a^t - 2ip(a^t)' \\ i\dot{a}^t &= \frac{1}{2}x^2V''(q)a^t - (a^t)'' \end{cases}$$

Ces trois égalités permettent de déterminer toutes nos inconnues, à savoir :

- L'égalité $-\dot{l}(t) = \dot{p}(t)q(t) + p^2 + V(q(t))$ montre bien que l est l'action lagrangienne classique.
- On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{q} &= 2p \\ \dot{p} &= -V'(q) \end{cases}$$

qui définit bien une dynamique classique sur le couple d'indice $(q(t), p(t))$, celle justement de l'hamiltonien classique associé à l'hamiltonien quantique H !

– Enfin, on obtient l'équation d'évolution de a^t avec la dernière égalité :

$$i\dot{a}^t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} a^t + \frac{1}{2} x^2 V''(q(t)) a^t$$

On a donc obtenu une approximation de l'équation de départ :

$$\boxed{i\hbar\partial_t [\psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}] = H [\psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}] - R(t, x)}$$

à un reste près, R , de l'ordre de $\hbar^{3/2}$, dont on peut donner une expression plus précise :

$$R(t, x) = \hbar^{-1/4} \tilde{R}\left(q(t), \frac{x - q(t)}{\sqrt{\hbar}}\right) a^t \left(\frac{x - q(t)}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{ipx/\hbar} e^{il(t)/\hbar}$$

dont la norme L^2 vaut

$$\|R(t, \cdot)\|_2 = \|\tilde{R}(q(t), \cdot) a^t\|_2$$

Cette approximation de l'équation ne donne pas *a priori* une approximation de la solution du système initial

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t \psi^t &= H\psi^t \\ \psi^0 &= \psi_{q,p}^a \end{cases}$$

Mais en introduisant

$$\Delta\psi = \psi^t - \psi_{q(t),p(t)}^{a^t} e^{il(t)/\hbar}$$

on obtient une équation satisfaite par $\Delta\psi$

$$i\hbar\partial_t \Delta\psi = H\Delta\psi + R(t)$$

et donc en posant, comme $e^{itH/\hbar}$ est un opérateur unitaire sur L^2 (théorème de Stone)

$$\Delta\psi = e^{-itH/\hbar} \varphi$$

on obtient tout simplement

$$\varphi(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{isH/\hbar} R(s) ds + \varphi(0)$$

Comme φ contrôle l'écart entre la solution véritable et la solution de l'équation approchée, on peut prendre $\varphi(0) \simeq 0$ en supposant que l'écart est très faible par rapport à $\hbar^{3/2}$ au temps initial. On a donc immédiatement que

$$\boxed{\|\Delta\psi\|_2 \leq \frac{t}{\hbar} \sup_{0 < s < t} \|R(s)\|_2 \leq C(t) \hbar^{1/2}}$$

ce qui le résultat recherché!

3.4 Discussions

Ce résultat est très important dans le cadre de la limite semiclassique, et plus généralement, pour la physique moderne. Si ici le théorème demande des conditions assez particulières, il peut en fait être généralisé à une large classe de potentiels, beaucoup moins réguliers - et notamment à des potentiels C^1 dont la dérivée n'est pas lipschitzienne (j'y reviendrais). Il reste cependant des restrictions, tout potentiel quantique (c'est-à-dire L^1 en fait) ne rentre pas dans ces conditions ; les recherches se poursuivent dans cette voie, avec l'ambition d'obtenir les hypothèses les moins intransigeantes.

Cela n'empêche pas de réfléchir à ce qu'implique déjà ce résultat. Que se cache exactement derrière cette approximation du flot quantique d'un état cohérent ? Il faut d'abord se souvenir que ces états cohérents (au moins ceux de type gaussien) donnent, à la limite $\hbar \rightarrow 0$, le couple position-impulsion classique. Le théorème que nous venons de démontrer s'occupe de la dynamique associée à ces états cohérents : la dynamique quantique des états cohérents se ramène, à la limite semiclassique, à la dynamique classique associée sur les indices (q, p) de ces états cohérents. Cela montre bien que la Mécanique Classique est un bord de la Mécanique Classique (comme j'en avais parlé précédemment), en considérant des potentiels classiques (comme l'oscillateur harmonique ou le potentiel coulombien) en quantique, et un état cohérent d'indice l'état initial du système classique (par exemple).

Mais ce résultat apporte plus, tout en comportant des restrictions (ou plutôt des contraintes), dont je vais parler tout de suite. En effet, le contrôle du reste $R(t)$ est loin d'être simple, surtout quand on considère une évolution à temps long - temps qu'il faudra d'ailleurs préciser. Quand on reprend les calculs précédents, la majoration que j'ai faite sur ce reste est en effet assez grossière. Plus précisément, en utilisant à la fois que

$$\|\Delta\psi\|_2 \leq \frac{t}{\hbar} \sup_{0 < s < t} \|R(s)\|_2 \text{ et que } \|R(s)\|_2 \leq M(s)\hbar^{3/2}$$

il faut, pour parvenir à la conclusion $\|R(s)\|_2 = O(\hbar^{1/2})$, que

$$t \sup_{0 < s < t} M(s) < \hbar^{-1/2}$$

ce qui n'est *a priori* pas vrai pour tout temps. Une majoration fine de $\|R(s)\|_2$ est donc nécessaire pour trouver une échelle de temps optimale pour l'approximation semiclassique. C'est ce que je vais faire dans la suite.

Mais avant cela, il est intéressant de comprendre intuitivement ce qu'il se passe.

C'est en fait essentiellement le terme a^t qui conditionne la norme du reste, et donc l'approximation semiclassique. Initialement, c'est un état localisé en $q = q(0)$. Et c'est cette localisation qui permet de préciser, justement, un indice «classique» (q, p) . Mais au cours de l'évolution, a^t va s'étaler : l'état est donc de moins en moins bien localisé. Il va tendre en fait à recouvrir plusieurs trajectoires classiques : au bout d'un certain temps, on ne pourra plus attribuer une trajectoire classique particulière à l'état $\psi_{q(t), p(t)}^{a^t}$. Le principe même de la limite semiclassique tombe aux grands temps.

C'est ce qui est exposé dans la première figure. La trajectoire centrale est celle suivie par le couple $(q(t), p(t))$, partant de l'état initial (q, p) . Ce point est entouré d'un petit disque hachuré, qui représente en fait le flou sur ce point (conditionné par les inégalités de Heisenberg, ce qui est contenu dans la localisation de a). Ce disque va en fait s'étendre avec le temps (notons que seule sa taille augmente, son volume

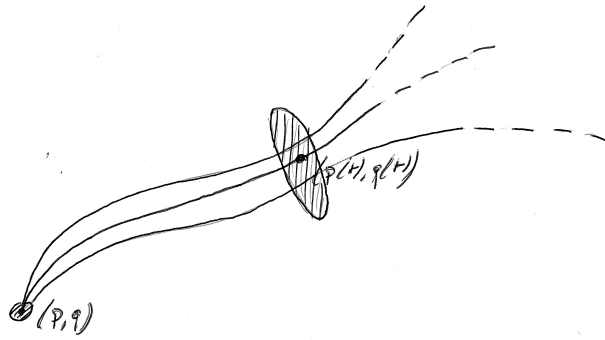


FIG. 1 – L'évolution temporelle de l'approximation semiclassique

reste fixe : le flot est hamiltonien et préserve donc la forme de Liouville), phénomène qui provient de l'étalement de a^t .

On peut néanmoins trouver des parades à ce problème, en utilisant par exemple le principe de Huyghens-Fresnel de l'optique physique : toute onde peut se décomposer en une série d'ondes sphériques localisées. En procédant de la même façon pour a^t lorsque son support est trop grand pour pouvoir garder une unique trajectoire classique, on obtient d'autres fonctions \tilde{a} sur lesquelles on réapplique le principe de la limite semiclassique que nous avons développé précédemment. Ce principe est exposé dans la deuxième figure, où la grande tâche entourant $(p(t), q(t))$ est séparée en petits points qu'on fait évoluer sous la dynamique classique. On peut répéter continuellement ce processus, et il donne des résultats très intéressants, sur lesquels Thierry Paul travaille justement en ce moment.

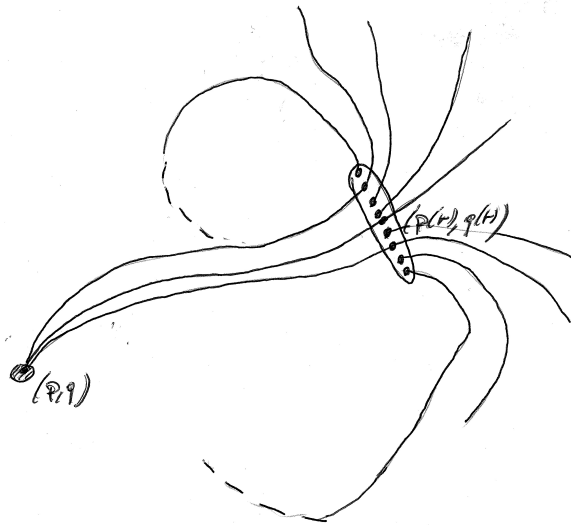


FIG. 2 – Le principe «à la Huyghens-Fresnel» illustré

3.5 Évolution à temps long

Résolution de l'équation dans un cas particulier

Traisons le cas où $V''(q(t))$ est indépendant du temps ; par exemple, V'' est borné et le système est lié, $q(t)$ restant ainsi borné lui aussi. Ce cas très particulier n'est uniquement là que pour comprendre, je généraliserais par la suite.

Nous voulons donc ici traiter de manière plus précise l'évolution à temps long, et notamment considérer l'évolution du reste R qui détermine la précision de l'approximation par les états cohérents. Ici, on supposera que $V''(q(t)) \equiv -1$. L'équation en a^t s'écrit donc

$$i\dot{a}^t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} a^t - \frac{1}{2} a^t$$

En notant l'oscillateur harmonique

$$H_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2$$

et en posant $b^t = e^{i\pi/4 H_0} a^t$ cette équation se transforme en

$$i\dot{b}^t = -\frac{i}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) b^t$$

qui se résoud simplement en

$$b^t(x) = b(e^{-t}x)e^{-t/2}$$

La résolution du problème sur ce cas particulier donne déjà des informations en fait très générales. On note que b^t s'étale avec le temps, ce qui entraîne une imprécision toujours plus grande sur $(q(t), p(t))$, et donc l'approximation de la solution ψ^t de notre système originel par des états cohérents est beaucoup moins précise aux temps longs. L'écart entre ψ^t et les états cohérents est même exponentiel. En effet, si on considère le reste R , qui contrôle cet écart,

$$\begin{aligned} \|R(t, \cdot)\|_2 &\leq \hbar^{3/2} M \left(\int \left| \frac{1}{2} x^3 b(e^{-t}x) e^{-t/2} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \hbar^{3/2} e^{3t} M \left\| \frac{1}{2} y^3 b(y) \right\|_2 \end{aligned}$$

en rappelant que b est dans la classe de Schwartz et M est une constante provenant du caractère borné des dérivées de V . L'écart entre la solution ψ^t et les états cohérents est donc de l'ordre de $t e^{3t} \hbar^{1/2}$. On voit ainsi apparaître une échelle de temps pour laquelle la limite semiclassique est encore valable : pour $T \sim (1/6 - \epsilon) C \ln \hbar^{-1}$, avec $\epsilon > 0$ et $C > 0$, on a

$$\forall t < T \quad \|\Delta\psi\|_2 \approx \hbar^\epsilon$$

On généralise

Supposons à présent que

$$V''(q(t)) \equiv \alpha$$

avec α indépendant de t . Cette contrainte n'est pas si restrictive : il s'agit par exemple de considérer une particule astreinte à se déplacer dans un endroit clos, avec un potentiel dont toutes les dérivées sont bornées sur ce domaine. Notre équation sur a^t se réécrit donc

$$i\dot{a}^t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}a^t + \frac{1}{2}\alpha x^2 a^t = H^2 a^t$$

où H^2 est un opérateur différentiel quadratique et homogène (cette propriété sera importante pour la suite). H^2 est auto-adjoint, et donc l'équation se résout en

$$a^t = e^{-itH^2} a$$

Ainsi, la norme L^2 de R se ramène au calcul de

$$\|x^3 a^t\|_2 = \|x^3 e^{-itH^2} a\|_2 = \|e^{itH^2} x^3 e^{-itH^2} a\|_2$$

car e^{-itH^2} est unitaire, d'après le théorème de Stone. Cette petite transformation, en apparence incongrue, fait apparaître un opérateur de la forme

$$e^{itH^2} h\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-itH^2}$$

avec h une fonction pour laquelle le calcul pseudo-différentiel existe. L'opérateur possède en fait une propriété très intéressante. On note ϕ^t le flot associé au symbole de H^2 , c'est-à-dire à $h^2(q, p) = p^2 + \frac{1}{2}\alpha q^2$. Alors,

$$\boxed{e^{itH^2} h\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-itH^2} = h\left(\phi^t\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)}$$

Ce résultat utilise des notions de calcul pseudo-différentiel, mais elle repose sur une propriété importante du flot ϕ^t : il est linéaire, puisque H^2 est quadratique, comme nous l'avons noté tout à l'heure. Ceci nous permet donc de donner le sens de $\phi^t(-i\frac{\partial}{\partial x}, x)$, qui est donc uniquement une combinaison linéaire de $-i\frac{\partial}{\partial x}$ et de x . En reprenant le cas précédent, $\alpha \equiv -1$, on a par exemple

$$\phi^t = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{2}t) & \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) & \cosh(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\phi^t\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\cosh(\sqrt{2}t)x - i\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t)x - i \cosh(\sqrt{2}t) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Les conditions sur f sont plus vagues, et font appel au calcul pseudo-différentiel, que je n'ai pas eu le temps d'approfondir durant mon stage. Mais pour f polynômial, ou même seulement quadratique (ce qui suffit dans le cadre présent), le résultat est accessible. Dans le cas où h est quadratique, il suffit de montrer que

$$H_2(s) = e^{isH^2} h\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-isH^2}$$

est encore quadratique, et donc de la forme

$$H_2(s) = \alpha(s) \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] + \gamma(s) \left[\frac{1}{2} x^2 \right] + \beta(s) \left[-i \left(\frac{\partial}{\partial x} x + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]$$

Ceci se démontre par exemple en dérivant l'équation, et permet en particulier de montrer de manière rigoureuse la transformation d'équation faite précédemment dans le traitement du cas $V'' \equiv -1$.

Mais revenons au point central, qui est l'appréciation de la norme du reste R , et plus particulièrement du terme $\|x^3 a^t\|_2$:

$$\begin{aligned} \|x^3 a^t\|_2 &= \|e^{itH^2} x^3 e^{-itH^2} a\|_2 \\ &= \|(\phi_2^t(-i \frac{\partial}{\partial x}, x))^3 a\|_2 \\ &= f(t) \end{aligned}$$

où la dépendance en t de f ne provient que des coefficients de la matrice ϕ^t ; ce qui donne une majoration explicite par rapport à t de $\|R(t, \cdot)\|_2$. Finalement, on obtient une majoration de l'erreur plus précise :

$$\|\Delta\psi\|_2 \leq \hbar^{1/2} \|V^{(3)}\|_\infty \int_0^t f(s) ds$$

Il convient donc de déterminer les différents types possibles de comportement pour f .

Comme ϕ^t est le flot linéaire d'un hamiltonien, il préserve le volume donnée par la forme de Liouville $dp \wedge dq$. En assimilant ϕ^t avec la matrice 2×2 qui lui est canoniquement associée, on voit donc que ϕ^t est une matrice de $SL(2, \mathbb{R})$. Ce groupe de matrices est engendré par trois types de matrices :

Matrice elliptique

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Pour une telle matrice, f reste bornée. On a donc une évolution linéaire de l'erreur, et une première échelle de temps : $T_1 \sim C_1 \hbar^{-1/2+\epsilon}$ avec $C_1 > 0$ et $\epsilon > 0$.

Matrice hyperbolique

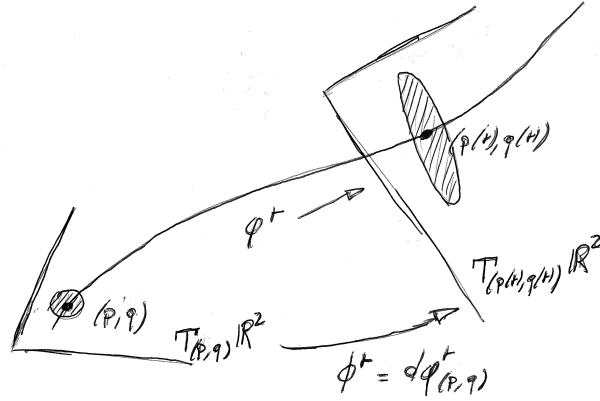
$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

On se retrouve dans le cas traité précédemment ($V'' \equiv -1$). L'erreur est exponentielle, ce qui nous donne une échelle de temps du type $T_2 \sim (1/6 - \epsilon) C_2 \ln \hbar^{-1}$.

Matrice parabolique

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est un cas limite, qui donne une erreur polynômiale. On obtient pour ce genre de matrice un temps similaire au le cas d'une matrice elliptique.



Nouvelles discussions

Arrêtons-nous un instant et regardons en arrière : qu'avons-nous fait jusqu'à présent ? Après avoir étudié la sous-variété des états cohérents, états quantiques très particuliers qui saturent les inégalités de Heisenberg, et qui surtout redonnent le goût de la Mécanique Classique sous la forme de l'indice (q, p) . Ces états, d'un point de vue statique, redonnent donc l'espace des phases à la limite $\hbar \rightarrow 0$. D'un point de vue dynamique, ils sont soumis, à une erreur $\|\Delta\psi\|_2$ près, à une dynamique classique sur les indices $(q(t), p(t))$. C'est ce que l'on appelle la limite semiclassique. Nous avons ensuite regardé de plus près cette erreur en fonction du temps, pour déterminer sur quelle échelle de temps l'approximation semiclassique était valide.

Pour cela, nous nous sommes tournés vers a^t . Si la dynamique se porte sur $(q(t), p(t))$, a^t contrôle la qualité de l'approximation au cours du temps. Aux temps longs, a^t se délocalise et recouvre donc de plus en plus de trajectoires de l'espace des phases, qui sont alors indiscernables quantiquement : la limite semiclassique tombe aux temps longs.

a^t est déterminé par l'équation $i\dot{a}^t = H^2 a^t$ où H^2 est un hamiltonien quadratique. Ce dernier n'apparaît pas en fait par la magie du calcul. Le flot classique ϕ^t qui lui correspond est $d\varphi^t_{(q,p)}$, c'est-à-dire le linéarisé du flot classique associé à notre hamiltonien originel, H . En effet, en linéarisant les équations, on a :

$$\varphi^t : \begin{cases} \dot{q} = 2p(t) \\ \dot{p} = -V'(q(t)) \end{cases} \text{ et donc } d\varphi^t_{(q,p)} \equiv \phi^t : \begin{cases} \delta\dot{q} = 2\delta p(t) \\ \delta\dot{p} = -V''(q)\delta q(t) \end{cases}$$

ce qui donne bien un hamiltonien quadratique $h^2(\delta q, \delta p) = (\delta p)^2 + \frac{1}{2}V''(q)\delta q^2$, qui est bien le symbole correspondant à l'hamiltonien H^2 .

Ce fait remarquable s'explique bien si l'on considère encore les schémas précédents. On sait que, à cause des inégalités de Heisenberg, le point (q, p) de départ est entaché d'un flou, un petit disque tout autour de lui. L'évolution de ce petit disque est bien évidemment contrôlé par la différentielle $d\varphi^t_{(q,p)}$, qui donne alors la «tâche» autour du point $(q(t), p(t))$, c'est-à-dire le vide a^t : la boucle est bouclée, tout se tient !

3.6 Plus loin

La limite semiclassique apporte beaucoup plus d'un point de vue épistémologique qu'une simple confirmation que la Mécanique Quantique englobe bien tous les phénomènes décrits par la Mécanique Quantique. Ce dernier point est assuré par les potentiels classiques mis à la sauce quantique. Mais rappelons-nous : en Classique, un potentiel doit être au moins \mathcal{C}^1 , avec une dérivée lipschitzienne. Pourtant, les résultats portant sur la limite semiclassique s'applique aussi à des potentiels qui ne sont pas aussi réguliers, et en particulier, pour lesquels on perd l'unicité.

Que faire alors de ces potentiels quantiques ? Que se passe-t-il véritablement à la limite $\hbar \rightarrow 0$? En gros, beaucoup de choses. Par exemple, pour un potentiel du type

$$V(x) = -|x|^{1+\theta} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

qui est donc bien \mathcal{C}^1 mais dont la dérivée $V' = -(1 + \theta)|x|^\theta$ n'est pas lipschitz. En considérant un état cohérent localisé en 0 (il existe, en Mécanique Classique, deux solutions distinctes qui partent de 0), on observe un phénomène intéressant : l'état s'étale (comme nous en avons déjà fait la remarque) puis se «coupe» soudainement en deux : chaque «bout» pour une des deux solutions classiques ! En quoi est-ce différent ? Le fait est que, si la limite semiclassique donne la Mécanique Classique, la limite obtenue ici, et en particulier ce dédoublement de la particule initiale, a bien une existence classique : l'ubiquité honnie en Mécanique Classique semble donc bien avoir sa place.

En somme, la limite semiclassique permet de nous faire une nouvelle image de ce qu'est la Physique actuellement. Imaginons la Physique Quantique comme une boule ; nous sommes au centre de cette boule, mais nous ne regardons qu'un morceau du bord. Les résultats que je viens de présenter nous pousse à tourner la tête sur le côté, pour découvrir à l'horizon de nouveaux paradigmes classiques.

4 La fin du voyage ?

Ce voyage fut pour moi une très belle expérience. J'ai enfin cotoyé la Physique Théorique, ce dont je rêvais depuis très longtemps. J'ai pu apprendre toutes ces très belles Mathématiques qui forment la base formelle et rigoureuse des théories physiques qui nous permettent de comprendre l'Univers dans ces derniers retranchements. Plus prosaïquement, j'ai gagné des bases solides en Géométrie Différentielle et en Mécanique Analytique (grâce notamment au très bon cours de Alain Chenciner à l'Observatoire de Paris) et en Analyse Fonctionnelle. Mais j'ai surtout appris à *lire* un livre de mathématiques, de m'y plonger complètement, de faire des recherches sur un point obscur ; j'ai appris aussi à écouter, à dialoguer avec des chercheurs sur des sujets de pointe, et à ne pas hésiter à poser des questions, même celles qui paraissent ridicules : l'important, c'est de comprendre.

Je ne pense pas non plus que ce voyage s'arrête là, avec la fin officielle du stage. Ce stage a été pour moi l'occasion de me lancer, et n'est pas une fin en soit. Je le vois plutôt comme le début de mon voyage dans l'Univers de la Physique Théorique. Thierry Paul a tenu à me montrer, lors de notre dernière entrevue, l'étendue de ce domaine si particulier qu'est l'Analyse Semiclassique, et qu'il y avait encore beaucoup à découvrir... et qu'il y aurait une place pour moi si je voulais continuer dans ce domaine. D'ailleurs, dans le cadre cette fois du stage de M1 de l'an prochain, nous allons essayer de monter un petit projet au Laboratoire Brossel-Kastler de Paris, pour que je puisse me frotter au monde de la Physique.

Références

- [Arn78] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, 1978.
C'est Alain Chenciner qui m'a conseillé de lire ce livre, et je n'ai pas été déçu. Pédagogiquement génial, je me suis laissé entraîné dans la Mécanique Hamiltonienne avec grand plaisir. Ouvrage excellent, il m'a permis d'asseoir mes connaissances en Géométrie Différentielle appliquée à la Mécanique.
- [BF82] Guy A. Battle and Paul Federbush. A phase cell cluster expansion for euclidean field theory. *Annals of physics*, 142 :95 – 139, 1982.
Un classique du genre, par deux grands spécialistes du sujet. C'est un article de fond qui présente des résultats importants sur l'assise théorique mathématique de la QFT. Je ne l'ai pas lu jusqu'au bout, bien entendu, mais il présente de manière très claire et rigoureuse tous les concepts évoqués dans l'article de Federbush et celui de Brydges cités après.
- [Bré83] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
L'ouvrage privilégié pour l'Analyse Fonctionnelle. Je n'ai pu y couper ! Ce livre m'a donnée les bases nécessaires sur les opérateurs non-bornés, mais j'ai dû lire d'autres ouvrages pour accéder aux théorèmes généraux comme le théorème spectral ou le théorème de Stone.
- [Car93] Pierre Cartier. *L'intégrale de chemins de Feynman*, chapter Leçon 2. Casini, 2000 (leçon donnée en 1993).
Une très belle découverte ! Le livre est un recueil de conférences données par de très grands mathématiciens. La deuxième est de Pierre Cartier, et porte sur les intégrales de chemins... que j'avais déjà entr'aperçues dans le Glimm&Jaffe. Une redécouverte passionnante, Pierre Cartier décrit le pourquoi du comment avec une clarté extrême et beaucoup de vivant.
- [Die70] Jean Dieudonné. *Éléments d'analyse. Tome III*. Gauthier-Villars Éditeurs, 1970.
Ouvrage ultra-classique, dans lequel Dieudonné décrit les variétés et leurs géométries avec une rigueur toute bourbakiste, alliée à un style léger qui fait passer la leçon sans s'étouffer. Si durant mon stage, le plus important a été pour moi de comprendre *globalement* les concepts, ce livre m'a permis de voir comment les définir avec justesse et cohérence.
- [Fed87] Paul Federbush. Quantum field theory in ninety minutes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 17, 1987.
C'est le premier article que m'a fait lire Yves Meyer, et j'ai tout de suite adoré. Texte tiré d'une conférence de Paul Federbush, spécialiste de la Physique Théorique, il explique aux non-spécialistes ce qu'est la Théorie Quantique des Champs et les mathématiques associées. Tout en étant simple, il permet de se confronter aux questions mathématiques à la base de la QFT.
- [Fol89] Gerard B. Folland. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Princeton University Press, 1989.
Thierry Paul et Yves Meyer m'ont conseillé sa lecture vers la fin de mon stage. C'est un ouvrage classique, qui décrit les mathématiques à la base de la Mécanique Quantique. D'un niveau très poussé, il va me falloir encore du temps pour finir le premier chapitre !
- [GJ87] James Glimm and Arthur Jaffe. *Quantum Physics : A Functional Integral Point of View*. Springer-Verlag, 1987.

Le livre à la base de mon stage. Il couvre un domaine très vaste, mais de manière fort elliptique et trop technique. Force le lecteur non spécialiste à se tourner vers d'autres ouvrages pour pouvoir en tirer la substantifique moëlle : ce qui est très bénéfique !

- [Mey] Yves Meyer. Méthodes temps-échelle et méthodes temps-fréquence en traitement du signal et de l'image. In *Cours d'été*.
- [Pau08] Thierry Paul. Echelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de planck. In *Séminaire X-EDP 2007-2008*, 2008.
Cet article de Thierry Paul contient beaucoup d'exemples traités en détails sur la limite semiclassique, et expose des situations très intéressantes et originales pour l'évolution à temps longs. Il explique à la fin de l'article le lien entre chaos classique et indéterminisme quantique.
- [PL93] Thierry Paul and Pierre-Louis Lions. Sur les mesures de wigner. *Revista Matemática Iberoamericana*, N°9, 1993.
Un article d'une soixantaine de pages qui donne un exposé technique mais très précis mathématiquement de la limite semiclassique, en introduisant notamment des outils tels que la transformée de Wigner. C'est dans cet article qu'est traité le cas du potentiel en $|x|^{1+\theta}$.
- [Rue91] David Ruelle. *Hasard et Chaos*. Editions Odile Jacob, 1991.
Un bel ouvrage de vulgarisation scientifique qui parle de l'éeidée de chaos et de hasard, par de simples petites expériences de pensée.