

Alexandre Le Meur et Jiaxu Liu

Sous la direction de Laurent Desvillettes et Gaël Raoul

Stage de Licence 3  
Ecole Normale Supérieure de Cachan  
94235 Cachan - FRANCE

24 Janvier-24 Juin

### **Introduction.**

L'idée de ce stage a été de s'intéresser aux notions topologiques proches des théorèmes de point fixes de Brouwer et Schauder.

La première partie du stage était consacrée à l'étude de ces théorèmes comme conséquence du théorème de la boule chevelue, en considérant des constructions explicites (notamment pour les théorème de Brouwer où il a fallu construire des applications qui vérifiaient les hypothèses du théorème de la boule chevelue). On s'est également intéressé à une application du théorème de Schauder pour une EDO ou EDP avec conditions de Dirichlet.

La seconde partie du stage était consacrée à l'étude d'invariants topologiques, notamment la notion de degré topologique, qui permettent de déduire d'une façon théorique le théorème de Brouwer et Schauder. Ainsi, le théorème de Brouwer peut être déduit directement de la théorie sur le degré topologique (via un théorème de non-rétraction), et non en considérant des constructions explicites. Le degré de Leray-Schauder, est, quant à lui, un analogue du degré topologique en dimension infinie, et permet également de déduire l'existence de solutions d'équations différentielles avec conditions au bord. Il a en effet l'avantage de prouver l'existence de zéros de fonctions, pourvu que le degré soit non nul. On s'est enfin intéressé à un exemple d'application du degré de Leray-Schauder, toujours pour démontrer l'existence de solutions aux EDO et EDP.

## Table des matières

1	Théorème de la boule chevelue	3
2	Théorème de Brouwer	6
3	Théorème de Schauder	9
4	Application du théorème de schauder	12
5	le degré topologique	14
6	Le degré de Leray-Schauder	18
7	Application du degré de Leray-Schauder	20

# 1 Théorème de la boule chevelue

**Théorème** (Théorème de la boule chevelue). *Si  $N$  est un entier naturel pair (non nul), alors il n'existe pas d'application continue  $\alpha$  de  $S^N$  dans  $S^N$  telle que :*

$$\forall x \in S^N, \quad \alpha(x) \cdot x = 0$$

où  $S^N$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^{N+1}$

Autrement dit, il n'existe pas de champ de vecteurs continu tangent à la sphère lorsque sa dimension est pair (c'est à dire quand la dimension de l'espace ambiant est impaire). On illustre ceci en disant qu'il n'existe pas de façon de coiffer une boule chevelue sans faire ni de raies ni d'épis.

démonstration :

On démontre le résultat par l'absurde. On suppose donc qu'une telle  $\alpha$  application existe.

on construit, à partir de  $\alpha$  une application  $\alpha_0$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On peut approcher  $\alpha$  par une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  pour la norme infinie. Par exemple, soit  $\tilde{\alpha}_1$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\|\tilde{\alpha}_1 - \alpha\|_\infty \leq \frac{1}{3}$  Alors on a :  $\forall x \in S^N, \|\tilde{\alpha}_1(x)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \geq \frac{2}{3}$  (puisque  $\tilde{\alpha}_0$  conserve la norme) et

$$\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x = (\tilde{\alpha}_1(x) - \tilde{\alpha}(x)) \cdot x \leq \frac{1}{3}$$

Soit  $\alpha_0$  de  $S_N$  dans  $S_N$  définie par :

$$\alpha_0(x) = \frac{\tilde{\alpha}_1(x) - (\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x)x}{\|\tilde{\alpha}_1(x) - (\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x)x\|_{\mathbb{R}^{N+1}}}$$

On a construit  $\alpha_0$  de façon à avoir  $\alpha_0(x) \cdot x = 0, \forall x \in S^N$  Et puisque  $\tilde{\alpha}_1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , il en est de même pour  $\alpha_0$ . Donc, en particulier on a aussi  $\tilde{\alpha}_0$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , puisque composée d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$  où  $\tilde{\alpha}_0$  est l'application définie par :

$$\tilde{\alpha}_0 : \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}, x \rightarrow \alpha_0\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^{N+1}}}\right)\|x\|_{\mathbb{R}^{N+1}}$$

Dans la suite de la démonstration on appellera  $\alpha_0$  simplement  $\alpha$  pour alléger les notations.

On montre maintenant que l'application  $\tilde{\alpha}$  est lipschitzienne sur l'ouvert  $U$  (définie ci-dessous)

L'application  $\tilde{\alpha}$  est homogène positive, i.e.

$$\forall x, \quad \tilde{\alpha}(\lambda.x) = \lambda.x$$

Soit  $M = \text{Sup}_x \|\tilde{\alpha}\|$

Il s'agit de montrer que  $\tilde{\alpha}$  est Lipschitzienne. On s'intéresse à cette application sur l'ouvert  $U$  définie comme la couronne (ouverte) comprise entre les boules de rayon 1 et 2, centrés en 0

Soit  $V$  l'ouvert définie de la même manière, comme la couronne entre les boules de rayon 1/2 et 2. Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $U$ . Alors si :

$$\|x - y\| \leq 1/2, \text{ on a : } [x \ y] \subset V$$

On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis, d'où :

$$\|\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq M\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}}$$

Si on a  $\|x - y\| \geq 1/2$ , alors  $\|\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq M'\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}}$  où  $M'$  est tel que :

$$M' = \text{Sup}_{z \in U} \|\tilde{\alpha}(z)\|$$

En effet,  $\|\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq 2\text{Sup}_{z \in U} \|\tilde{\alpha}(z)\|$  Donc :

$$\|\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq \frac{2\text{Sup}_{z \in U} \|\tilde{\alpha}(z)\| \|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}}}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}}}$$

Or  $\frac{1}{\|x - y\|} \leq 2$ , d'où le résultat. En prenant  $K = \max(M, M')$ , on a :

$$\|\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq K\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \quad \forall x, y \in U$$

On montre maintenant que  $\beta_t$  (définie ci-dessous) est un plongement

Soit  $\beta_t$  l'application :

$$\beta_t(x) = \frac{x + t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Montrons l'injectivité de  $\beta_t$  sur  $U$ , pour  $|t|$  assez petit. Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $U$  tels que :

$$\beta_t(x) = \beta_t(y)$$

On a alors :

$$y = \sqrt{1 + t^2}\beta_t(y) - t\tilde{\alpha}(y) = \sqrt{1 + t^2}\beta_t(x) - t\tilde{\alpha}(x) + t(\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)) = x + t(\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y))$$

D'où

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq |t|K\|x - y\|_{\mathbb{R}^{N+1}}$$

Donc en choisissant  $t$  tel que :

$$|t| < 1/K, \beta_t \text{ devient injective sur } U.$$

De plus on a :

$$\|id - d(\beta_t)_x\| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} + M|t|$$

Cette quantité tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0. Donc en particulier la différentielle  $d(\beta_t)_x$  est inversible pour  $t$  assez petit. (comme  $GL(\mathbb{R}^{N+1})$  est ouvert).

Le théorème d'inversion globale nous affirme alors que  $\beta_t$  induit un difféomorphisme de  $U$  vers son image. Il reste à montrer que

$$\beta_t(U) = U$$

On démontre la surjectivité de  $\beta_t$ .

Soit  $y \in 2B^{N+1}$ , Soit  $\epsilon > 0$  on définit une application

$$\gamma_t(x) = y + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right) - \frac{t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

de  $(2 + \epsilon)B^{N+1}$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$

Montrons que  $\gamma_t((2 + \epsilon)B^{N+1}) \subset (2 + \epsilon)B^{N+1}$  pourvu que  $|t|$  soit assez petit.

Soit  $t_0$  tel que  $\left\|1 - \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2(2+\epsilon)}$

Soit  $t_1$  tel que  $\left\|\frac{t}{\sqrt{1+t_1^2}}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2(2+\epsilon)}$

Soit  $t_2 = \min(t_1, t_0)$ , alors :

$$\forall |t| \leq t_2 \text{ on a : } \left\|x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \left\|\frac{t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1+t^2}}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

on a donc  $\forall |t| \leq t_2, \forall y \in 2B^{N+1}, \forall x \in (2 + \epsilon)B^{N+1}, \|\gamma_t(x) - y\| \leq \epsilon$

Donc  $\forall |t| \leq t_2, \forall y \in 2B^{N+1}, \gamma_t$  est bien à valeur dans  $(2 + \epsilon)B^{N+1}$

On calcule maintenant la différentielle de cette application en  $x$  :

$$\|d(\gamma_t)_x\| = \left\| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) Id - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} d(\tilde{\alpha})_x \right\| \leq 1/2$$

$\gamma_t$  est contractante pourvu que  $t$  soit assez petit.

En résumé, on a  $\gamma_t$  qui va de  $E = (2 + \epsilon)B^{N+1}$  dans lui-même. Or  $E$  est complet (on a pris la boule fermée). De plus  $\gamma_t$  est contractante sur  $E$  pourvu que  $t$  soit assez petit.

On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Picard à l'application  $\gamma_t$  sur  $E$  pourvu que  $|t|$  soit assez petit.

On a donc :

$$\exists! x \in (2 + \epsilon)B^{N+1} \text{ tel que } \gamma_t(x) = x$$

C'est à dire :

$$y + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) - \frac{t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1+t^2}} = x$$

Soit :

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1+t^2}} = \beta_t(x)$$

Or

$$\|\beta_t(x)\|^2 = \frac{\|x\|^2 + t^2\|\tilde{\alpha}(x)\|^2 + 2x \cdot \tilde{\alpha}(x)}{1+t^2} = \frac{\|x\|^2 + t^2\|x\|^2}{1+t^2} = \|x\|^2$$

On en déduit que l'application :  $\beta_t$  envoie chaque sphère centrée en 0 dans elle-même.

Donc si  $\beta_t(x) = y$  avec  $x \in E$ , on a en fait  $x \in 2B^{N+1}$

Mieux : on a  $\|y\| = \|\beta_t(x)\| = \|x\|$ .

On a donc  $x \in U$  si  $y \in U$ , où  $U$  est l'ouvert défini précédemment.

On a donc montré que l'application  $\beta_t$  était surjective sur  $U$ .

$\beta_t$  est donc un difféomorphisme de  $U$  sur lui-même.

soit

$$f_t(x) = \det(d(\beta_t)_x)$$

le jacobien du changement de variable défini par  $\beta_t$ . Donc d'après le théorème de changement de variable,

$$\int_U f_t = \int_{\beta_t(U)} 1 = \int_U 1$$

Donc si

$$t < t_0, \text{ On a : } \int_U 1 = (1+t^2)^{-\frac{N+1}{2}} \int_U \det(id + t d\tilde{\alpha})$$

Donc la fonction  $P : t \rightarrow \int_U \det(id + t d\tilde{\alpha})$  coïncident avec  $R : t \rightarrow (1 + t^2)^{\frac{N+1}{2}}$  pour  $t \in B(0, t_0)$ .  $P$  est un polynôme (c'est une déterminant d'une application affine en  $t$ ). Donc  $R$  doit être aussi un polynôme au voisinage de 0. On doit donc avoir  $Q$  impair pour que  $R$  soit un polynôme. Dans le cas où  $N$  est pair, on a une contradiction et donc il n'existe pas d'application  $\alpha$  de  $S_N$  dans  $S_N$  telle que pour tout  $x \in S_N$   $\alpha(x) \cdot x = 0$

Ceci termine la démonstration du théorème de la boule chevelue.

## 2 Théorème de Brouwer

Le théorème de la boule chevelue permet de déduire un théorème important de point fixe. Il possède des hypothèses moins fortes que celles du théorème du point fixe de Picard, mais possède également des conclusions un peu moins fortes (notamment sur l'unicité de la solution du problème)

**Théorème** (Théorème de Brouwer). *Soient  $N$  un entier naturel non nul et  $\phi$  une application continue de  $\bar{B}_N$  dans  $\bar{B}_N$ , alors il existe  $x \in \bar{B}_N$  tel que  $\forall x \in B'_N, \phi(x) = x$*

*où  $\bar{B}_N$  désigne la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^N$*

*Autrement dit, toute application continue de  $\bar{B}_N$  dans  $\bar{B}_N$  admet un point fixe*

démonstration du théorème :

On démontre le résultat par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une application  $\phi \in C(\bar{B}_N, \bar{B}_N)$  telle que  $\forall x \in \bar{B}_N, \phi(x) \neq x$

L'idée de la démonstration est de construire, à partir de cette hypothèse, deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  qui vérifient respectivement les conditions imposées à  $\alpha$  dans le théorème de la boule chevelue en dimension  $N$  et  $N + 1$ . On pourra alors en déduire une contradiction, et le théorème de Brouwer en découlera.

Étape 1 : On construit deux fonctions  $f_1 \in C(\bar{B}_N, \mathbb{R}^N - \{0\})$  et  $f_2 \in C(B'_{N+1}, \mathbb{R}^{N+1} - \{0\})$  vérifiant :

$$\forall x \in S_{N-1} \quad f_1(x) \cdot x > 0, \quad \forall x \in S_N \quad f_2(x) \cdot x > 0$$

Pour construire  $f_1$ , on peut simplement poser  $f(x) = x - \phi(x)$  : elle est continue, à valeur dans  $\mathbb{R}^N - \{0\}$ , et pour  $x \in S_{N-1}$ , on a

$$f_1(x) \cdot x = (x - \phi(x)) \cdot x \geq \frac{1}{2}(x - \phi(x))^2 > 0$$

Pour construire  $f_2$ , on constate d'abord que l'application  $x \mapsto f_1(x) \cdot x$  est continue sur  $\bar{B}_N$ , et  $f_1(x) \cdot x > 0$  si  $\|x\| = 1$

Il existe alors  $\beta \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall x \in B'_N \quad \|x\| \in [\beta, 1] \Rightarrow f_1(x) \cdot x > 0$$

On définit ensuite

$$f_2 : \bar{B}_{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}, (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}) \rightarrow (f_1(x_1 \dots x_N), a \cdot x_{N+1})$$

où  $a \in ]\beta, 1[$ .

Il est clair que  $f_2$  ne s'annule pas, on vérifie  $\forall X \in S_N \quad f_2(X) \cdot X > 0$ .

Notons  $X = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1})$  et  $x = (x_1, \dots, x_N)$

ce qui rend  $X = (x, x_{N+1})$  et  $f_2(X) = (f_1(x), a \cdot x_{N+1})$

si  $\|x\| \geq \beta$ , on a  $f_1(x) \cdot x > 0$  alors

$$f_2(X) \cdot X = f_1(x) \cdot x + a \cdot x_{N+1}^2 > 0$$

si  $\|x\| < \beta$ , on a  $x \cdot \phi(x) < \beta < a$  alors

$$f_2(X) \cdot X = f_1(x) \cdot x + a \cdot x_{N+1}^2 = (1 - a)\|x\|^2 + (a - x \cdot \phi(x)) > 0$$

Étape 2 : On construit  $f_3 \in C(\bar{B}_N, \mathbb{R}^N - \{0\})$  et  $f_4 \in C(\bar{B}_{N+1}, \mathbb{R}^{N+1} - \{0\})$  vérifiant :

$$\forall x \in S_{N-1} \quad f_3(x) = x, \quad \forall x \in S_N \quad f_4(x) = x$$

Pour  $x \in B'_N$ , On définit  $f_3(x)$  ( resp  $f_4(x)$  ) comme l'intersection entre la demi-droite d'origine  $x$ , dirigée par  $f_1(x)$  ( resp  $f_2(x)$  ) et la sphère  $S_{N-1}$  ( resp  $S_N$  )

On démontre dans la suite l'existence et la continuité de  $f_3(x)$  (également pour  $f_4(x)$ )

Notons  $f_i$  la fonction  $f_1$  pour la démonstration de  $f_3$  et  $f_2$  pour  $f_4$

On cherche  $t \in ]0, +\infty[$  tel que  $x + t \cdot f_i(x) \in S_{N-1}$  (point d'intersection), c'est à dire

$$\|x\|^2 + 2t \cdot f_i(x) \cdot x + t^2 \cdot \|f_i(x)\|^2 = 1$$

Les racines de ce polynôme en  $t$  sont (noter que  $f_i(x)$  ne s'annule jamais d'après l'étape 2)

$$t_i^\pm = \frac{1}{\|f_i(x)\|^2} \left[ -f_i(x) \cdot x \pm \sqrt{(f_i(x) \cdot x)^2 + \|f_i(x)\|^2(1 - \|x\|^2)} \right]$$

• Si  $\|x\| < 1$ , on a  $\sqrt{(f_i(x) \cdot x)^2 + \|f_i(x)\|^2(1 - \|x\|^2)} > |f_i(x) \cdot x|$  donc seul  $t_i^+ > 0$  est positif. On note  $t_i(x) := t_i^+$ , et  $f_3$  vérifie alors  $f_3(x) = x + t_1(x)f_1(x)$ ,  $f_4$  vérifie  $f_4(x) = x + t_2(x)f_2(x)$

• Si  $\|x\| = 1$ ,  $f_i(x) \cdot x > 0$  d'après l'étape 1, et donc seul  $t_i^+ = 0$  est positif, et ainsi,  $f_3 = x, f_4 = x$

$f_3$  (resp  $f_4$ ) ne s'annule pas, (car  $f_3 \in S_{N-1}$ ), l'application  $x \rightarrow t_i(x)$  est continue, et il en est donc de même de  $f_3 : x \rightarrow x + t_i(x)f_i(x)$ . donc  $f_3$  (resp  $f_4$ ) ainsi définie est bien dans  $C(B'_N, \mathbb{R}^N - \{0\})$  (resp  $C(B'_{N+1}, \mathbb{R}^{N+1} - \{0\})$ ). Enfin, on a bien  $\forall x \in S_{N-1} \quad f_3(x) = x$  (resp  $\forall x \in S_N \quad f_4(x) = x$ )

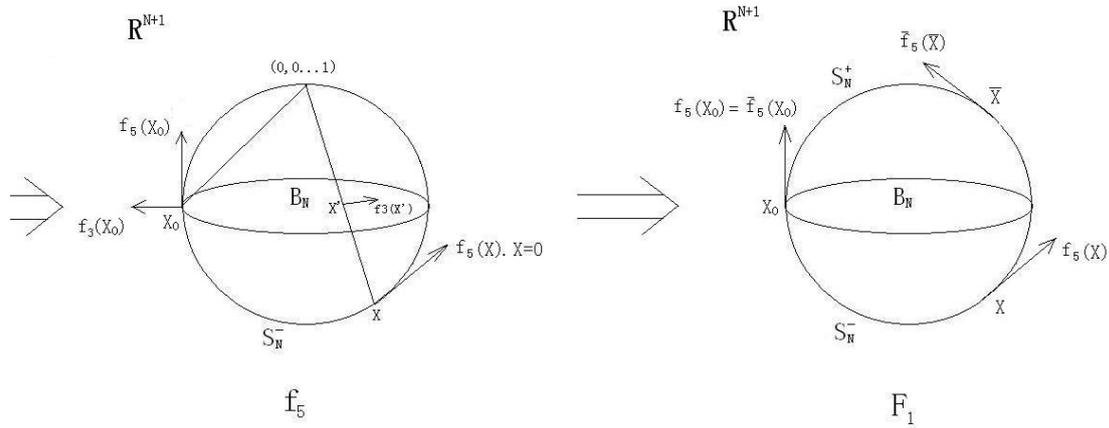
Étape 3 : On construire  $f_4 \in C(S_N^-, \mathbb{R}^{N+1} - \{0\})$  et  $f_5 \in C(S_{N+1}^-, \mathbb{R}^{N+2} - \{0\})$  vérifiant :

$$\forall x \in S_N^-, f_5(x) \cdot x = x, \quad \forall x \in D_{N-1}, f_5(x) = (0, \dots, 0, 1)$$

$$\forall x \in S_{N+1}^-, f_6(x) \cdot x = x, \quad \forall x \in D_N, f_6(x) = (0, \dots, 0, 1)$$

où

$$S_N^- = \{x = (x^1, \dots, x^{N+1}) \in S_N, x^{N+1} \leq 0\}$$



$$D_{N-1} = \{x = (x^1, \dots, x^{N+1}) \in S_N, x^{N+1} = 0\}$$

l'idée intuitive de la construction est de déformer le boule  $\bar{B}_N$  en la demi-sphère  $S_N^-$  et d'obtenir  $f_5$  ( resp  $f_6$  ) par transformation de  $f_3$  ( resp  $f_4$  ). Dans la suite on pose  $Q = N$  pour la construction de  $f_5$  et  $Q = N + 1$  pour  $f_6$

Considérons l'application  $\Theta : B'_Q \rightarrow S_Q^-$  définie par  $\Theta(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} - \cos(\frac{\pi}{2}\|x\|) \cdot e_{Q+1}$  pour  $x \neq 0$  et  $\Theta(0) = -e_{Q+1}$ , où  $e_{Q+1}$  est la dernier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{Q+1}$ , et on considère  $\mathbb{R}^Q$  comme une partie de  $\mathbb{R}^{Q+1}$ . On peut montrer que  $\Theta$  est un homéomorphisme de  $\bar{B}_Q$  dans  $S_Q^-$ . Ainsi, on définit  $f_5$  ( $f_6$  également) :

$$f_5(x) = \frac{2}{\pi} d\Theta(\Theta^{-1}(x)) \cdot f_3(\Theta^{-1}(x))$$

$f_5$  ( resp  $f_6$  ) est continue d'après cette expression. Comme  $d\Theta(y) \cdot d\Theta(y) = 1$ , on a pour tout  $h : \Theta(y) \cdot (d\Theta(y) \cdot h) = 0$ ; avec  $y = \Theta(x)$  et  $h = f_3(y)$ , il vient donc  $x \cdot f_5(x) = 0$ . On peut aussi montrer que  $d\Theta(x)$  est injective pour tout point  $x$ , ce qui implique  $f_5(x) \neq 0$ . Donc  $f_5$  (et  $f_6$ ) ainsi construit convient.

Finalement, on pose

$$F_1(x) = \frac{1}{\|f_5(x)\|} \cdot f_5(x) \quad \text{si} \quad x \in S_N^-$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\|f_5(-x)\|} \cdot f_5(-x) \quad \text{si} \quad x \in S_N^+$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\|f_6(x)\|} \cdot f_6(x) \quad \text{si} \quad x \in S_{N+1}^-$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\|f_6(-x)\|} \cdot f_6(-x) \quad \text{si} \quad x \in S_{N+1}^+$$

Il y a une double définition sur  $D_{N-1}$  ( resp  $D_N$  ) mais elle coïncident à la valeur  $(0, \dots, 1)$  et donc  $F_1$  ( resp  $F_2$  ) est bien définie

$F_1$  (resp  $F_2$ ) est continue sur  $S_N^-$  et  $S_N^+$  (resp  $S_{N+1}^-$  et  $S_{N+1}^+$ ) donc continue sur  $S_N$  (resp  $S_{N+1}$ ). Elle ne s'annule pas sur  $S_N$  (resp  $S_{N+1}$ ) et pour tout  $x \in S_N$  (resp  $x \in S_{N+1}$ )  $F_1(x) \cdot x = 0$  (resp  $F_2(x) \cdot x = 0$ )

Donc  $F_1$  et  $F_2$  vérifient l'hypothèse du théorème de la boule chevelue. Comme l'un des deux est défini sur  $S_M$  avec  $M$  impair, cela aboutit à une contradiction avec le théorème de la boule chevelue

Ainsi, on a démontré le Théorème de Brouwer

### 3 Théorème de Schauder

Le théorème de Schauder, est l'analogue du théorème de Brouwer, transposé en dimension infinie. Les conclusions sont les mêmes, cependant les hypothèses sont différentes. La continuité de la fonction concernée ne suffit plus, il faut qu'elle soit compacte (notion définie dans la partie sur le degré de Leray-Schauder)

**Théorème** (Théorème de Schauder). *Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ , soit  $C$  une partie de  $E$  non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée. Soit  $T$  une application continue de  $C$  dans  $C$  telle que  $T(C)$  est une partie de  $E$  dont l'adhérence est compacte. alors il existe  $e \in C$ , tel que  $T(e) = e$*

Ce théorème généralise le théorème de Brouwer dans la cas de la dimension infinie.

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $F$  un espace vectoriel réel de dimension  $N$ , et  $\mathcal{H}$  une partie de  $F$  convexe, fermée, bornée et contenant au moins deux éléments. On considère  $G$  le sous-espace vectoriel de  $F$  engendré par  $\mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{H}$  contient au moins deux éléments,  $G$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Donc en particulier  $\dim G \geq 1$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base du sous-espace  $G$ . Comme  $\mathcal{H}$  est une partie de  $F$  symétrique, convexe fermée, bornée, elle a les mêmes propriétés en tant que partie de  $G$  pour la norme induite. Montrons que son intérieur contient  $0$ .  $G$  est de dimension finie, donc toutes les normes sur  $G$  sont équivalentes. il nous suffit donc de montrer le résultat pour la norme infinie dans la base des  $e_i$ . Par symétrie, on a  $-e_1 \dots - e_n$  qui sont dans  $\mathcal{H}$ .

Par convexité,

$$\forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad x_k = \frac{\epsilon_1 e_1 + \dots + \epsilon_n e_n}{n} \in \mathcal{H}$$

Les  $x_{\epsilon_k}$  sont les sommets de l'hypercube de centre  $0$  et de côté  $\frac{2}{n}$  dans la base des  $e_i$ . Donc en particulier, l'enveloppe convexe des  $x_{\epsilon_k}$  est contenue dans  $\mathcal{H}$ . Or cette enveloppe convexe (l'hypercube), est en fait la boule de centre  $0$  et de rayon  $\frac{1}{n}$  pour la norme infinie dans la base des  $e_i$ .

En conclusion  $0$  est bien un point intérieur à  $\mathcal{H}$ .

$\forall a \in G$ , on note  $R_a = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* / \frac{a}{\eta} \in \mathcal{H}\}$

$0$  appartient à l'intérieur de  $\mathcal{H}$ . Donc

$$\forall a \in G, \exists A / \forall \eta \geq A, \quad \frac{a}{\eta} \in R_a.$$

L'ensemble  $R_a$  est donc en particulier non vide. De plus  $R_a$  est minoré par 0. On en déduit que  $\inf R_a$  est bien définie. On veut montrer que  $\rho(a) = \inf R_a$  est une norme sur  $G$ . On a immédiatement le fait que  $\rho$  soit positive.

Montrons qu'elle est définie.

Soit  $a \in G, a \neq 0$ . Alors  $\|\frac{a}{\eta}\|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\eta$  tend vers 0. ( $\|\cdot\|$  est une norme quelconque sur  $G$ )

Or  $\mathcal{H}$  est borné, donc  $\exists m > 0 / \forall \eta \leq m, \frac{a}{\eta} \notin R_a$  Donc  $\rho(a) \neq 0$ .

D'évidence  $\rho(0) = 0$  donc  $\rho$  est définie positive.

Montrons maintenant qu'elle est homogène. Si  $\lambda$  ou  $a$  sont nuls, alors on a bien  $\rho(\lambda a) = \lambda \rho(a) = 0$ .

On suppose maintenant que  $a \neq 0$  et  $\lambda > 0$ . On a  $\eta \in R_{\lambda a}$  si et seulement si  $\frac{\lambda a}{\eta} \in \mathcal{H}$  soit  $\frac{a}{\frac{\eta}{\lambda}} \in R_a$  Donc  $R_{\lambda a} = \lambda R_a$  et donc  $\rho(\lambda a) = \lambda \rho(a)$ . Or  $\mathcal{H}$  est symétrique, donc  $-\frac{a}{\eta} \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $\frac{a}{\eta} \in \mathcal{H}$ . On a finalement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in G, \quad \rho(\lambda a) = |\lambda| \rho(a)$$

Il reste maintenant à montrer que  $\rho$  vérifie l'inégalité triangulaire. Soit  $(a, b) \in G^2$ . si  $a$  ou  $b$  est nul on a clairement  $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ . Sinon on a  $\rho(a) \in R_a$  et  $\rho(b) \in R_b$ , c'est à dire que  $\frac{a}{\rho(a)}$  et  $\frac{b}{\rho(b)}$  sont dans  $\mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{H}$  est convexe, on a :

$$\frac{a+b}{\rho(a)+\rho(b)} = \frac{\rho(a)}{\rho(a)+\rho(b)} \frac{a}{\rho(a)} + \frac{\rho(b)}{\rho(a)+\rho(b)} \frac{b}{\rho(b)} \in \mathcal{H}$$

En conclusion  $\rho$  définie bien une norme sur  $G$ . De plus on a  $a \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $1 \in R_a$

$\mathcal{H}$  est donc la boule unité fermée de  $G$  pour la norme  $\rho$

On veut maintenant montrer que  $B^n$  et  $\mathcal{H}$  sont homéomorphes. On définit  $\tilde{\rho}$  norme sur  $\mathbb{R}^N$  :

$$\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1 e_1, \dots, x_n e_n)$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est toujours une base de  $G$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{H}}$  définie par  $B_{\mathbb{R}^N, \tilde{\rho}}(0, 1)$  est homéomorphe à  $\mathcal{H}$ . Soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^N$ .

comme on est en dimension finie, elle est équivalente à  $\tilde{\rho}$  donc il existe  $m$  et  $M$  réels strictement positifs tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, m\|x\| \leq \tilde{\rho}(x) \leq M\|x\|$$

On définit une application  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0, f(x) = \frac{\tilde{\rho}(x)}{\|x\|} x$$

$f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . De plus comme on a  $\tilde{\rho}(x) \leq M\|x\|$ ,  $f$  est aussi continue en 0.

de même si  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est définie par :

$$g(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0, g(x) = \frac{\|x\|}{\tilde{\rho}(x)}x$$

Alors  $g$  est bien sûr continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . De plus comme on a  $\tilde{\rho}(x) \geq m\|x\|$ ,  $g$  est aussi continue en 0.

$f$  et  $g$  sont inverses l'une de l'autre, et  $f(\tilde{\mathcal{H}}) = \bar{B}^n$  puisque  $\|f(x)\| = \tilde{\rho}(x)$ . Donc  $\tilde{\mathcal{H}}$  et  $\bar{B}^n$  sont homéomorphes, donc  $\mathcal{H}$  et  $\bar{B}^n$  sont homéomorphes.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé réel. On suppose que  $C$  vérifie les hypothèses du théorème, ainsi que l'application  $T$ . Soit  $\epsilon > 0$  quelconque. On peut donc recouvrir  $K = T(\bar{C})$  par un nombre fini de boules du type  $B(e_i^\epsilon, \epsilon/2)$ , où les  $e_i^\epsilon$  sont dans  $T(C)$  d'où :

$$T(C) \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(e_i^\epsilon, \epsilon/2)$$

on définit pour  $i \in \{1, 2, \dots, N_\epsilon\}$ ,  $\pi_{i,\epsilon} : C \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\pi_{i,\epsilon}(e) = \max(0, \epsilon - \|T(e) - e_i^\epsilon\|)$$

l'application  $\pi_{i,\epsilon}$  est continue  $\forall i$ . Or, d'après ce qui précède puisque l'on a recouvert  $T(C)$  par des boules  $B(e_i^\epsilon, \epsilon/2)$ ,  $\forall e \in C, \exists i$  tel que  $\|T(e) - e_i^\epsilon\| \leq \epsilon/2$ . Donc on a a fortiori :

$$\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2}$$

donc par conséquent, l'application  $T_\epsilon$  définit par :

$$T_\epsilon(e) = \left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) e_i^\epsilon \right)$$

est bien définie et est continue d'après l'inégalité établie précédemment.

On a :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \right) \|T(e) - T_\epsilon(e)\| &= \left\| \left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \right) (T(e) - e_i^\epsilon) \right\| \\ \left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \right) \|T(e) - T_\epsilon(e)\| &\leq \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \|T(e) - e_i^\epsilon\| \end{aligned}$$

Si on a  $\|(T(e) - e_i^\epsilon)\| \leq \epsilon$  alors :

$$\pi_{i,\epsilon}(e) \|(T(e) - e_i^\epsilon)\| \leq \epsilon \pi_{i,\epsilon}(e)$$

puisque  $\pi_{i,\epsilon}(e) \geq 0$ . Or si  $\|(T(e) - e_i^\epsilon)\| \geq \epsilon$ , on a  $\pi_{i,\epsilon}(e) = 0$ . Donc dans tous les cas, l'inégalité précédente est vraie.

Donc on a :

$$\left( \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) \right) \|T(e) - T_\epsilon(e)\| \leq \epsilon \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e)$$

C'est à dire :

$$\|T(e) - T_\epsilon(e)\| \leq \epsilon$$

Cette inégalité étant établie pour un  $e \in C$  quelconque, on a :

$$\sup \|T(e) - T_\epsilon(e)\| \leq \epsilon$$

soit  $E_\epsilon$  l'espace vectoriel engendré par les  $e_\epsilon^i$ . On a  $T_\epsilon$  qui est à valeurs dans  $E_\epsilon$ . On définit  $\mathcal{H}_\epsilon = C \cap E_\epsilon$  On a  $T_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon) \subset E_\epsilon$  (par définition de  $T_\epsilon$ ). De plus comme  $T_\epsilon(e)$  est un barycentre à coefficients strictement positifs de points de  $C$ , et comme  $C$  est convexe, on a :  $T_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon) \subset C$  Donc finalement  $T_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon) \subset \mathcal{H}_\epsilon$  Par ailleurs  $\mathcal{H}_\epsilon$  vérifie les hypothèses du théorème de brouwer (étendu) puisqu'il est FBCS Donc d'après le théorème de Brouwer, on a :

$$\exists e_\epsilon \in \mathcal{H}_\epsilon \text{ tel que } T_\epsilon(e_\epsilon) = e_\epsilon$$

Si  $u_n = e_{1/n}$ , comme l'adhérence de  $T(C)$  est compacte, il existe une suite extraite de  $(T(u_n))$  qui converge dans  $K$ . Soit  $e$  cette limite. On a alors :

$$\|e - u_n\| \leq \|e - T(u_n)\| + \|T(u_n) - u_n\|$$

(On utilisé  $u_n$  à la place de  $u_{\phi(n)}$  pour alléger les notations). Donc la quantité  $\|e - u_n\|$  tend vers 0 puisque le premier terme tend vers 0 par convergence de la suite  $(u_n)$ , et le deuxième tend vers 0 par continuité de  $T$  Donc  $u_n$  tend vers  $e$ , donc  $T(u_n)$  tend vers  $T(e)$  par continuité. on a donc  $T(e) = e$  et  $T$  a donc un point fixe.

## 4 Application du théorème de schauder

On s'intéresse aux EDO et EDP qui ne sont pas définies par des conditions de Cauchy. Le théorème de Cauchy repose sur le théorème du point fixe de Picard. Ce théorème assure l'existence et l'unicité du point fixe pour une application contractante. Dans la démonstration du théorème de Cauchy Lipschitz, on construit une application qui admet pour point fixe la solution du problème de Cauchy. Dans le cas où les conditions ne sont pas de Cauchy, la situation est différente. Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne marche plus. On s'intéresse à des arguments de type topologique (en utilisant aussi des arguments de point fixe), pour démontrer l'existence d'une solution à un problème de Dirichlet. (on a plus l'unicité qui repose sur le fait qu'une certaine application était contractante).

Exemple : on s'intéresse à l'équation :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = h(u'(x)) \quad (E)$$

Avec :  $u(0) = u(1) = 0$  et  $\lambda > 0$

On lui associe pour cela l'équation :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = g(x) \quad (E_g)$$

Cette solution admet une unique solution telle que :  $u(0) = u(1) = 0$  pour certaines valeurs de  $\lambda$  Ceci ne se déduit pas directement du théorème de Cauchy-Lipschitz (puisque l'on a pas de conditions de Cauchy). Pourtant le théorème de Cauchy-Lipschitz nous

affirme l'existence d'une solution  $u_0$  L'ensemble des solution de  $(E_g)$  est  $u_0 + S_\lambda$  où  $S_\lambda$  est l'ensemble des solutions associées à l'équation homogène  $(E_0)$ .

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad (E_0)$$

Il est facile de vérifier que pour cette équation, il existe une unique solution satisfaisant les conditions de Dirichlet. En effet, soit  $\phi$  l'application linéaire définie par :

$$\phi : S_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^2, u \rightarrow (u(0), u(1))$$

est clairement un isomorphisme puisque son noyau est réduit à  $\{0\}$  (les solutions de  $(E_0)$  sont des combinaisons linéaires d'exponentielles si  $\lambda > 0$ ) Donc l'unique solution de  $(E_g)$  vérifiant  $u(0) = u(1) = 0$  est  $u_0 + \phi^{-1}((-u(0), -u(1)))$ .

A partir de cet exemple simple, on a réussi à montrer que  $(E_g)$  admet une unique solution, en fixant des conditions de Dirichlet. Pour passer au cas général de l'équation  $(E)$ , on introduit l'application  $\psi_\lambda$  qui à  $g$  associe l'unique solution de  $(E_g)$  avec les condition de Dirichlet.

On définit également l'application  $\phi_h$  :

$$\forall u \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \forall x \in [0, 1], \quad (\phi_h(u))(x) = h(u'(x))$$

L'idée est alors d'utiliser le théorème de Schauder sur l'application  $\psi_\lambda \circ \phi_h$ . En effet, si on a  $\psi_\lambda \circ \phi_h(u) = u$  alors  $u$  est solution de l'équation  $(E)$ .

pour utiliser le théorème de Schauder, on doit vérifier les différentes hypothèses. On rappelle l'énoncé du théorème de Schauder :

Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ , soit  $C$  une partie de  $E$  non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée. Soit  $T$  une application continue de  $C$  dans  $C$  telle que  $T(C)$  est une partie de  $E$  dont l'adhérence est compacte. alors il existe  $e \in C$ , tel que  $T(e) = e$

Soit  $C_\mu = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]), u(0) = u(1) = 0, \|u\|_{\mathcal{C}^1} \leq \mu\}$  Il est facile de voir que cet ensemble a les propriétés nécessaires pour le théorème de Schauder, excepté la relative compacité de  $T(C)$  ( $T$  est défini ici comme étant la composée  $\psi_\lambda \circ \phi_h$ )

Pour un certain  $\mu$ , on a :

$$\psi_\lambda \circ \phi_h(C_\mu) \subset C_\mu$$

Pour montrer que  $T(C_\mu)$  est d'adhérence compacte on utilise le théorème d'Ascoli :

**Théorème** (théorème d'Ascoli). *soit  $A$  une partie de  $\mathcal{C}(X, Y)$ . On dira que  $A$  est équicontinue sur  $X$  si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

*Le théorème d'Ascoli montre l'équivalence entre les deux propositions :*

- *$A$  est équicontinue sur  $X$*
- *$A$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}(X, Y)$  muni de la topologie de la convergence uniforme.*

On veut donc montrer que  $T(C_\mu)$  est équicontinue sur  $[0, 1]$ . On utilise l'inégalité des accroissements finis sur la fonction  $T(u)$ .

$$\|T(u)(x) - T(u)(y)\|_\infty \leq \|(T(u))'\|_\infty |x - y|$$

Or on a vu qu'il existe  $\mu$  tel que  $T(C_\mu) \subset C_\mu$ . Donc pour ce  $\mu$  donné, on a  $\|(T(u))'\|_\infty \leq \mu$ , donc en particulier  $\|(T(u))'\|_\infty \leq \mu$  D'où finalement :

$$\|T(u)(x) - T(u)(y)\|_\infty \leq \mu |x - y|$$

Ce qui montre bien que  $T(C_\mu)$  est équicontinue. On conclut en utilisant le théorème d'Ascoli. On a donc réuni toutes les hypothèses du théorème de Schauder. on a donc bien prouvé que l'équation (E) possédait une solution.

## 5 le degré topologique

On s'intéresse maintenant, à un invariant topologique qui permet de déduire le théorème de Brouwer et le théorème de Schauder. Il possède également l'avantage de déduire l'existence de zéros de fonctions et donc de pouvoir déduire l'existence de solutions aux EDO et EDP avec conditions au bord.

Dans tout le paragraphe,  $f$  est une application (au moins) continue de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ .  $U$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

### Définition 1.

(i)  $x_0 \in U$  est un point régulier de  $f$  si  $df(x_0)$  est inversible. Dans le cas contraire, on dit que  $x_0$  est un point critique.

(ii)  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  est appelé valeur régulière de  $f$  si  $f^{-1}(y_0)$  ne contient pas de points critiques. dans le cas contraire, on dit que  $y_0$  est une valeur critique.

### Théorème 2 (théorème de Sard).

Si  $f \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  alors l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle;

On utilisera fréquemment la condition :

$$y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$$

Dans cette première partie on suppose que toutes les fonctions sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{U}$ .

### Définition 3.

Soit  $y_0$  une valeur régulière de  $f$ . Alors l'ensemble

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in \bar{U} : f(x) = y_0\}$$

est fini. On peut donc définir le degré de  $f$  en  $y_0$  par :

$$d(y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \text{sgn}[\det df_x]$$

En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, l'ensemble  $f^{-1}(y_0)$  doit être discret. Comme  $U$  est borné, il en est de même pour  $\bar{U}$ . Par conséquent, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points dans  $f^{-1}(y_0)$ . Ceci justifie donc la définition du degré topologique.

On remarque, dans cette définition, que le degré est un entier, positif, négatif ou nul. Egalement d'après cette définition on remarque que si  $d(f, y_0, U) \neq 0$  alors  $y_0 \in f(U)$ . ceci est particulièrement pratique pour montrer qu'une fonction s'annule sur un certain ouvert.

**Propriété 1.**

Pour  $|y_0 - y_1|$  suffisamment petit, on a :

$$d(f, y_0, U) = d(f, y_1, U)$$

**Corollaire 4.**

Si  $y$  est une valeur régulière de  $f$  appartenant à la même composante connexe (par arcs) que  $y_0$  (dans  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ ), alors  $d(y) = d(y_0)$ .

En effet, il suffit de relier  $y$  à  $y_0$  par un arc  $\gamma$ . Grâce à la propriété 1 et à la compacité de l'arc  $\gamma$ . On en déduit le résultat.

**Propriété 2** (invariance par homotopie).

Soit  $F : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et continue sur  $[0, 1]$ .

Alors si  $\forall t \in [0, 1], y_0 \notin F(\partial U, t)$ ,  $d(F(\cdot, t), y_0, U)$  est indépendant de  $t$

**Propriété 3** (dépendance aux valeurs sur le bord).

Si  $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$  et  $y_0 \notin f(\partial U) = g(\partial U)$ ,

alors  $d(f, y_0, U) = d(g, y_0, U)$

Pour prouver ce résultat, il suffit de voir que la famille  $F(\cdot, t) = tf + (1 - t)g$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ , et de plus que la condition de la propriété 2 est vérifiée puisque si  $x \in \partial U$  alors  $F(x, t) = ty + (1 - t)y = y$  où  $y = f(x) = g(x)$ . Donc si  $y_0 \notin f(\partial U)$ , on a  $y \neq y_0$ , et donc  $y_0 \notin F(\partial U, t)$ .

**Propriété 4.**

Soit  $(U_i)_i$  une famille dénombrable d'ouverts disjoints inclus dans  $U$  On suppose de plus que  $y_0 \notin f(\bar{U} \setminus \bigcup U_i)$ . Alors  $d(f, y_0, U_i) = 0$  sauf pour un nombre fini d'indice  $i$  et de plus :

$$d(f, y_0, U) = \sum_i d(f, y_0, U_i)$$

Preuve :  $\bar{U} \setminus \bigcup U_i$  est fermé donc compact (puisque borné). on en déduit que  $f(\bar{U} \setminus \bigcup U_i)$  est compact. Par le théorème de Sard, il existe un  $y$ , valeur régulière suffisamment proche de  $y_0$  pour que  $d(f, y, U_i) = d(f, y_0, U_i)$ . Comme  $f^{-1}(y)$  est fini, il est contenu seulement dans un nombre fini de  $U_i$ . supposons par exemple que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ , où  $x_i \in U_i$ . on a :

$$d(f, y_0, U) = d(f, y, U) = \sum_1^k \text{sgn}(\det df_{x_i}) = \sum_1^k d(f, y, U_i) = \sum_1^k d(f, y_0, U_i)$$

En effet,  $f^{-1}(y) \cap U_i = \{x_i\}$ , donc  $d(f, y, U_i) = \text{sgn}(\det df_{x_i})$  Ce qui prouve le résultat.

**Propriété 5** (excision).

Soit  $Q$  un ensemble fermé dans  $\bar{U}$ , et supposons que  $y_0 \notin f(Q)$ . Alors :

$$d(f, y_0, U) = d(f, y_0, U \setminus Q)$$

En effet, si on pose  $U_1 = U \setminus Q$ , cette famille vérifie les hypothèses de la propriété 4. on en déduit donc le résultat.

**Propriété 6.**

Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts bornés respectivement de dimension  $n$  et  $m$ . supposons que  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  et  $g \in \mathcal{C}^1(\bar{V}, \mathbb{R}^m)$ . Alors si  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$  et  $y_1 \in \mathbb{R}^m \setminus g(\partial V)$ , on a :

$$d(f \otimes g, (y_0, y_1), U \times V) = d(f, y_0, U)d(g, y_1, V)$$

**Propriété 7.**

Si les vecteurs  $f(x)$  et  $g(x)$  ne pointent jamais dans des directions opposées pour  $x \in \partial U$ , alors

$$d(f, 0, U) = d(g, 0, U)$$

En effet, on utilisant la propriété 2, et l'homotopie  $tf(x) + (1-t)g(x)$ , on a le résultat.

**Propriété 8** (composition).

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U}, V)$  et  $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ , où  $U$  et  $V$  sont des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $(V_j)_j$  une famille d'ouverts connexes par arcs de  $V \setminus f(\partial U)$ , dont les fermetures sont des compacts disjoints inclus dans  $V$ . Alors si  $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f)(\partial U)$ , on a :

$$d(g \circ f, z_0, U) = \sum_j d(f, V_j, U)d(g, z_0, V_j)$$

Comme  $d(f, v, U)$  est constant pour  $v \in V_j$ , la définition  $d(f, V_j, U)$  a bien un sens.

Il faut maintenant montrer que le degré est une notion topologique (et non différentielle). Soit  $f \in \mathcal{C}(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  on définit :  $d(f, y_0, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, y_0, U)$ , où  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1$  convergent uniformément vers  $f$  dans  $\bar{U}$ .

**Lemme 5.** La limite précédente existe et ne dépend pas de la suite approximante  $(f_n)_n$

Preuve : En effet, soit  $\delta = \text{dist}(y_0, f(\partial U))$ . Alors  $\delta$  est fini et non nul. Si on considère une autre suite approximante  $(g_n)_n$ , on peut montrer que ces deux suites peuvent être homotopées avec la condition de la propriété 2. En effet, supposons par l'absurde que :  $\exists t \in [0, 1], y_0 \in tf_n(\partial U) + (1-t)g_n(\partial U)$  donc  $\exists x \in \partial U, y_0 = tf_n(x) + (1-t)g_n(x)$

$$y_0 - f(x) = t(f - f_n)(x) + (1-t)(f - g_n)(x) \tag{1}$$

En conséquence de la convergence uniforme, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f - f_n\|_\infty + \|f - g_n\|_\infty \leq \delta/2$$

Donc on déduit de la formule (1) que  $\|y_0 - f(x)\| \leq \delta/2$

C'est impossible.

Donc la condition de la propriété 2 est satisfaite. Donc  $d(f_n, y_0, U) = d(g_n, y_0, U)$ , pour

$n \geq N$ . L'existence de la limite se montre de la même façon en utilisant  $f_n$  et  $f_m$ , on a  $d(f_n, y_0, U) = d(f_m, y_0, U)$ , pour  $n, m \geq N$ .

Ceci termine la démonstration.

Il est aisé de voir que les propriétés établies dans le cas  $\mathcal{C}^1$  s'étendent au cas continu (par passage à la limite).

Voyons maintenant quelques applications de la théorie du degré topologique.

**Théorème 6** (théorème de non-rétraction). *Soit  $B$  la boule ouverte unité dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors il n'existe pas d'application continue  $f : \bar{B} \rightarrow \partial B$  telle que  $f|_{\partial B}$  soit l'identité.*

Ce théorème signifie qu'on ne peut pas "rétracter" une boule sur sa sphère correspondante.

Preuve : Supposons par l'absurde qu'une telle fonction  $f$  existe. Alors  $0 \notin f(\partial B)$ . on utilise alors le résultat de la propriété 3, donc on a :

$$d(f, 0, B) = d(I, 0, B) = 1$$

donc en particulier  $0 \in f(B)$ . Or  $f(B) \subset \partial B$ . C'est impossible. D'où le théorème.

**Remarque 1.** *On peut également montrer ce théorème en dimension 2 en utilisant les groupes fondamentaux d'homotopie ( $\pi_1$ ). En effet, en supposant qu'une telle rétraction existe, on a des homomorphismes de groupes :*

$$\pi_1(\partial B, 1) \rightarrow \pi_1(B, 1) \rightarrow \pi_1(\partial B, 1)$$

*Cette composé d'homomorphismes doit réaliser un automorphisme de  $\pi_1(\partial B, 1)$ . Or le premier homomorphisme entre  $\pi_1(\partial B, 1)$  et  $\pi_1(B, 1)$  est en fait le morphisme nul car :*

$$\pi_1(\partial B, 1) \cong \mathbb{Z} \text{ et } \pi_1(B, 1) \cong \{0\}$$

*On en déduit une contradiction. En revanche cette démonstration échoue pour les dimensions supérieures puisque  $\pi_1(\partial B, 1) \cong \{0\}$  si  $n \geq 3$ .*

*Dans le cas présent, l'invariant topologique considéré (le degré) vaut toujours 1 quelque soit la dimension de l'espace considéré.*

Ce théorème permet de déduire le théorème du point fixe de Brouwer (ces deux théorèmes sont en fait équivalents).

**Théorème 7** (théorème de Brouwer). *Soit  $B$  un ensemble homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  une application continue de  $B$  dans lui-même. Alors il existe  $\bar{x} \in \bar{B}$  tel que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$*

Preuve : On a déjà montré qu'on peut supposer que  $B$  est la boule ouverte unité (précédente démonstration du théorème de Brouwer) supposons par l'absurde que  $f$  n'a pas de point fixe dans  $\bar{B}$ .

On considère la droite  $D : \lambda x + (1 - \lambda)f(x)$  Ceci est bien une droite (non réduite à un point) puisque  $f$  n'a pas de points fixes. On considère  $y$  l'intersection de cette droite avec  $\partial B$  avec  $\lambda > 0$  (cette intersection existe puisque  $x \in B$  et  $B$  est borné alors que  $D$  ne l'est pas.) On considère  $F$  l'application qui a  $x$  renvoie  $y$ . Il est facile de voir que cette application est continue. On a de plus  $F|_{\partial B} = Id$ . C'est impossible d'après le théorème précédent.

On en déduit le théorème de Brouwer par l'absurde.

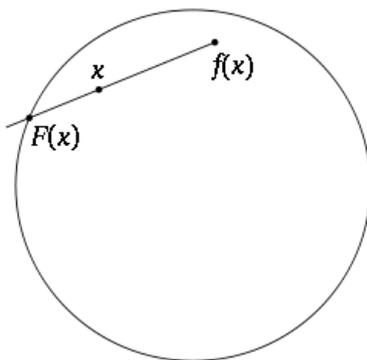


FIG. 1 – Une rétraction du disque sur le cercle

## 6 Le degré de Leray-Schauder

L'idée de cette partie est de généraliser la notion de degré topologique aux espaces de dimension infinie. Il est possible de définir le degré de Leray-Schauder en le définissant comme une certaine limite de degrés topologiques. Ce degré a l'avantage de pouvoir être utilisé dans des espaces de fonctions (de dimension infinie), et donc de donner des résultats concernant l'existence de solutions aux équations différentielles avec conditions au bord.

Dans tout le paragraphe, les fonctions qu'on considère sont (au moins) continues.

### Définition 8.

Soient  $B$  un espace Banach et  $U$  un sous-ensemble de  $B$ . Une application  $T$  de  $B$  dans  $B$  est dite compacte si l'adhérence de  $T(K)$  est compacte pour tout sous-ensemble borné et fermé  $K \subset U$

**Exemple 1.** Si  $k \in C^1(\mathbb{R})$  vérifie  $\|k\|_{L^\infty} + \|k'\|_{L^\infty} \leq C < \infty$ , l'opérateur  $T : L^\infty([0, 1]) \rightarrow L^\infty([0, 1])$  défini par :

$$T(u)(x) = \int_0^1 k(x-y)f(y) dy$$

est compact. En effet, si  $\|u\|_{L^\infty} \leq M$ , alors :

$$\|T(u)\|_{L^\infty} \leq M \|k\|_{L^\infty},$$

$$\|T(u)'\|_{L^\infty} \leq M \|k'\|_{L^\infty}.$$

Par le théorème d'Ascoli,  $T(\{u \in L^\infty([0, 1]); \|u\|_{L^\infty} \leq M\})$  est relativement compact, ce qui montre que l'opérateur  $T$  est compact. Voir la section suivante pour un autre exemple d'opérateur compact.

On peut maintenant étendre le concept de degré topologique aux applications de la forme :  $T = I - K$  où  $K$  est un opérateur compact. Soit  $U$  un ouvert borné d'un espace de Banach  $B$  et soit  $T$  une application de  $\bar{U}$  dans  $B$ . On suppose toujours que  $y_0 \notin T(\partial U)$ . Il s'agit de montrer que  $T(\partial U)$  est un ensemble fermé : Soit  $F$  un fermé, montrons que  $T(F)$  est fermé. Soit  $x_n \in F$ . On suppose que  $T(x_n)$  a une limite quand  $n$  tend vers l'infini. Alors  $T(x_n) = x_n - K(x_n) \rightarrow y$ . Comme  $K$  est compacte, une sous-suite de  $K(x_n)$  converge vers  $k$ . Ainsi  $x_n \rightarrow k + y = x$  et  $x \in F$  car  $F$  est fermé. Par ailleurs, comme  $K$  est continue,  $K(x) = k$ , donc  $y = x - K(x)$ . D'où le résultat

Comme  $T(\partial U)$  est fermé et  $y_0 \notin T(\partial U)$ , on peut alors considérer  $\text{dist}(y_0, T(\partial U)) = \delta > 0$ . Soient  $\epsilon < \delta$  et  $K_\epsilon$  une  $\epsilon$ -approximation de  $K$  dont l'image est dans l'espace vectoriel  $V_\epsilon$  de dimension finie contenant  $y_0$ . Posant  $T_\epsilon = I - K_\epsilon$ , on a alors  $T_\epsilon(x) \notin y_0$ , si  $x \in \partial U$ . Ainsi, pour l'application  $T_\epsilon|_{V_\epsilon \cap \bar{U}} : V_\epsilon \cap \bar{U} \rightarrow V_\epsilon$ , le degré  $d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap \bar{U}, y_0)$  est défini.

**Définition 9.** (*Le degré de Leray-Schauder*)

On pose :

$$d(T, U, y_0) = d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0)$$

qu'on appelle le degré de Leray-Schauder.

Pour montrer qu'il est bien définie, on a besoin du lemme suivant (que l'on ne démontre pas ici) :

**Lemme 10.**

Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ . Si  $T$  est une application de  $\bar{U}$  dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $I + \phi$  où  $\phi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$  et  $y_0 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\} - f(\partial U)$ , alors  $d(f, U, y_0) = d(f|_{U_1}, U_1, y_0)$ , où  $U_1 = U \cap \mathbb{R}^{n_1}$ .

On va montrer que le degré de Leray-Schauder ne dépend pas du choix de  $V_\epsilon$  :

D'après le lemme précédent, si  $V = V_\epsilon \oplus N$  où  $N$  est un espace de dimension finie, on a  $d(T_\epsilon, V \cap U, y_0) = d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0)$ . Ainsi, si  $K_\eta$  est une autre approximation de  $K$  telle que  $K_\eta : U \rightarrow V_\eta$ ,  $\eta < \delta/2$  et  $V = V_\eta \oplus V_\delta$ , alors

$$d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0) = d(T_\epsilon, V \cap U, y_0)$$

$$d(T_\eta, V_\eta \cap U, y_0) = d(T_\eta, V \cap U, y_0)$$

Soit  $T_t = t.T_\eta + (1-t)T_\epsilon$ , alors  $y_0 \notin T_t(\partial U)$  par la définition de  $\delta$ . D'après l'invariance par homotopie du degré, on a que

$$d(T_\epsilon, V \cap U, y_0) = d(T_\eta, V \cap U, y_0)$$

Donc

$$d(T_\epsilon, V_\epsilon \cap U, y_0) = d(T_\eta, V_\eta \cap U, y_0)$$

Ce qui montre que le degré de Leray-Schauder ne dépend pas de la façon dont on approche  $K$ .

On introduit la notion "d'index", en décrivant le degré d'une fonction par rapport à un de ses zéros.

Soient  $B$  un espace de Banach,  $U$  un ouvert de  $B$  et  $f \in \mathcal{C}^1(U, B)$ , on pose de plus que  $f$  ne s'annule pas sur  $\partial U$  et que  $K = I - f$  est compacte.

Maintenant on suppose que  $u_0$  est un zéro isolé de  $f$  et que  $df_{u_0} = I - dK_{u_0}$  est un isomorphisme. Soit  $S_\epsilon(u_0)$  la boule de rayon  $\epsilon$  centré en  $u_0$ , contenant aucun autre zéro de  $f$ . Comme  $f = I - K$ , on peut alors calculer  $d(f, S_\epsilon(u_0), 0)$ , et ce degré est indépendant de  $\epsilon$  pour  $\epsilon$  assez petit (d'après la propriété 2 et 5 dans le chapitre précédent). ceci nous permet d'introduire la définition suivante :

**Définition 11.**

On appelle index de  $f$  en  $u_0$  :

$$i_f(u_0) = d(f, S_\epsilon(u_0), 0)$$

De plus, on peut montrer que  $A = dK_{u_0}$  est compacte et donc l'ensemble des valeurs propres supérieures à 1 de  $A$  est fini. Si  $\lambda$  est une telle valeur propre, on note  $\eta_\lambda$  sa multiplicité. Le théorème suivant nous permet de calculer explicitement l'index de  $f$  en  $u_0$  en fonction des  $\eta_\lambda$ .

**Théorème 12.**

$$i_f(u_0) = (-1)^\sigma, \text{ où } \sigma = \sum_{\lambda > 1} \eta_\lambda$$

Preuve : On montre ce résultat dans le cas de la dimension finie. Soit  $P$  une matrice carré de taille  $n$ , inversible, et  $Q = I - P$ . Alors  $i_P(0) = d(P, S_\epsilon, 0) = \text{sgn}(\det P)$ . On veut montrer le théorème dans ce cas, c'est à dire :

$$\text{sgn}(\det P) = (-1)^\sigma, \quad \sigma = \sum_{\lambda > 1} \eta_\lambda$$

en effet, il suffit de remarquer que :

$$\text{sgn}(\det P) = \text{sgn} \left( \prod_1^k \lambda_i^{m_i} \right) = \text{sgn} \left( \prod_{\lambda_i < 0, m_i \text{ odd}} \lambda_i^{m_i} \right) = (-1)^\alpha$$

où  $\alpha = \sum_{\lambda_i < 0} \{\text{odd } m_i\}$  et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $P$  ayant pour multiplicité  $m_i$ . De plus,  $(-1)^\sigma = (-1)^\tau$  où  $\tau = \sum_{\lambda > 1} \{\text{odd } m_i\}$  donc comme pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $Q$ , il existe  $i$  tel que  $\lambda = 1 - \lambda_i$ , on a le résultat en dimension finie.

## 7 Application du degré de Leray-Schauder

Dans cette section, on utilise la théorie du degré de Leray-Schauder pour montrer l'existence de solution à un problème d'EDP.

On considère l'équation aux dérivées partielles avec conditions au bord de Dirichlet :

$$\Delta u - F(x, u) = 0, \forall x \in \Omega$$

$$u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega,$$

où  $F$  est une fonction qui vérifie :

$$\|F(\cdot, u)\|_{L^2} \leq C_{\|u\|},$$

où  $C_{\|u\|}$  est une fonction croissante de  $\|u\|$ , et :

$$\lim_{\|u\|_{L^2} \rightarrow \infty} \frac{\|F(u)\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}} = 0.$$

On définit l'opérateur  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  qui à  $u$  associe  $g \in L^2(\Omega)$ , nulle au bord de  $\Omega$ , telle que :

$$\Delta g = u.$$

L'existence et l'unicité de  $g$  pouvant être démontré grâce au théorème de Lax-Milgram. Cet opérateur est compact (voir la remarque ci-dessous). On définit ensuite l'opérateur  $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  par :

$$T(u) = u - KF(u),$$

Cet opérateur vérifie les hypothèses du degré de Leray-Schauder, car  $KF$  est compact, puisque l'image de la boule  $\{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}$  par  $F$  est borné dans  $L^2(\omega)$  :  $\|F(\cdot, u)\| \leq C_M$ , et comme  $K$  est compact, cela implique que l'image de la boule par  $KF$  est relativement compact. Ainsi, l'opérateur  $KF$  sur  $L^2(\Omega)$  est compact.

La seconde étape consiste à montrer que  $T$  ne s'annule pas sur le bord d'une boule  $\{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}$ , si  $M$  est assez grand. En effet,

$$\|T(u)\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2} - \|KF(u)\|_{L^2}, \quad (2)$$

mais, par définition de  $K$ ,

$$F(u) = \Delta(KF(u)),$$

donc, en multipliant par  $KF(u)$  et en intégrant, on obtient  $\|\nabla(KF(u))\|_{L^2}^2 = \|F(u) \nabla(KF(u))\|_{L^2} \leq \|F(u)\|_{L^2} \|\nabla(KF(u))\|_{L^2}$ , et donc,

$$\|\nabla(KF(u))\|_{L^2} \leq \|F(u)\|_{L^2},$$

et comme  $KF(u)$  est nulle au bord, l'inégalité de Poincaré montre que :

$$\|KF(u)\|_{L^2} \leq C\|F(u)\|_{L^2}.$$

On introduit cette inégalité dans (2) pour obtenir :

$$\|T(u)\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2} \left(1 - C \frac{\|F(u)\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}\right).$$

Grâce à l'hypothèse faite sur l'opérateur  $F$ , on a que si  $\|u\|_{L^2}$  est assez grand,

$$\|T(u)\|_{L^2} > \frac{1}{2}\|u\|_{L^2} > 0.$$

On définit la famille d'opérateur  $T_t$  sur  $\{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}$  (où  $M$  est défini par l'étape précédente) par :

$$T_t(u) := u - tKF(u).$$

Cela définit une homotopie vérifiant  $T_0 = I$ ,  $T_1 = T$ , et quelque soit  $t \in [0, 1]$ ,  $T_t$  ne s'annule pas sur le bord de la boule  $\{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}$  par les agrduments développés à l'étape précédente.

D'après l'invariance du degré de Leray-Schauder,  $d(T, \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}, 0) = d(I, \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}, 0) = 1 \neq 0$ . Cela implique qu'il existe  $\bar{u} \in \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2} \leq M\}$  tel que  $T(\bar{u}) = 0$ , c'est à dire :

$$\Delta \bar{u} = F(\cdot, \bar{u}).$$

**Remarque 2.** Pour montrer que l'inverse du Laplacien  $K$  est un opérateur compact, on procède comme suit : Soit  $\mathcal{F} \subset L^2(\Omega)$  bornée. Alors, pour  $u \in \mathcal{F}$ ,

$$\Delta(Ku) = u,$$

donc, en multipliant par  $u$ , en intégrant et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\|\nabla(Ku)\|_{L^2} \leq Cste,$$

et donc, grâce à l'inégalité de Poincaré,

$$\|(Ku)\|_{H^1} \leq Cste.$$

Grâce au théorème de Kondrashov (injection de Sobolev), l'image de  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$ . Ce qui montre que  $K$  est un opérateur compact.

## Références

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*
- [2] L. Desvillettes, *Sujet d'ENS Ulm 1998 Concours MP.*
- [3] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*