ENS de Cachan. Licence de Mathmatiques. Calcul différentiel. Feuille 2

Exercice 1 Soit T une application C^∞ de $I\!R^n$ dans lui-mme, telle que $T(0) = 0$. On suppose de plus que 1 n'est pas valeur propre de $DT(0)$.
1) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0, sur lequel 0 est l'unique point fixe de T, c'est-à-dire l'unique x tel que $T(x) = x$ (on utilisera le thorme d'inversion locale).
2) Soit S une application C^∞ de $I\!R^n$ dans lui-mme quelconque. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un voisinage V de 0, un nombre λ_0 strictement positif tel que pour tout $|\lambda| \le \lambda_0$, $T_\lambda(x) = T(x) + \lambda S(x)$ ait un unique point fixe x_λ sur V. On montrera de plus que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est C^∞.

Exercice 2. Soit $\mathbf{c}(s)$ une application de $[0, L]$ dans $I\!R^2$, injective sur $]0, L[$ et telle que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(L)$. On note C l'image de $\mathbf{c}(s)$. On suppose que $\mathbf{c}$ est C^∞ au voisinage de tout point $s \in [0, L]$, y compris en 0 et L, que l'on identifie et pour lesquels on a $\mathbf{c}^{(n)+}(0) = \mathbf{c}^{(n)-}(L)$ pour tout n. On suppose de plus que $|\mathbf{c}'(s)| = 1$ pour tout s. On dit alors que "la courbe C, image de $\mathbf{c}(s)$, est paramétrée par sa longueur." Si $\mathbf{x} = (x, y)$ est un vecteur de $I\!R^2$, on note $\mathbf{x}^\perp = (-y, x)$, le vecteur $\mathbf{x}$ tourné de $\frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer que $(\mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s)) = 0$. On appelle centre de courbure en s le point $\gamma(s) = \mathbf{c}(s) + d\mathbf{c}'(s)^\perp$ où d est choisi pour que $\gamma'(s) = 0$. Montrer que $\gamma(s) = \mathbf{c}(s) - \frac{\mathbf{c}'(s)^\perp}{(\mathbf{c}'(s), c''(s)^\perp)}$. A quoi est égal le rayon de courbure $R(s)$ en s ?

(b) Soient $\mathbf{y} \in I\!R^2$ et $\mathbf{c}(t_0)$ réalisant la distance de $\mathbf{y}$ à C : $dist(\mathbf{y}, C) = |\mathbf{y} - \mathbf{c}(t_0)|$. Montrer que $\mathbf{y} - \mathbf{c}(t_0) = \epsilon \ \mathrm{dist}(\mathbf{y}, C)\mathbf{c}'^\perp(t_0)$, où $\epsilon = \pm 1$.

(c) On considère l'application $\mathbf{y}$ de $[0, L] \times I\!R$ dans $I\!R^2$ définie par $\mathbf{y}(s, d) = \mathbf{c}(s) + d\mathbf{c}'(s)^\perp$. Calculer $D\mathbf{y}(s, d)$.

(d) En déduire que si $d_0 \neq f(s_0)$, $f(s)$ étant une fonction que l'on explicitera, $\mathbf{y}(s, d)$ est un difféomorphisme local au voisinage de (s_0, d_0) et que donc les fonctions inverses $s(\mathbf{y})$ et $d(\mathbf{y})$ forment un système de coordonnées locales. Interprétation géométrique. On pose $\delta = \max_{s \in [0,L]} \frac{1}{|\mathbf{c}''(s)|}$.

(e) Montrer que si $\mathrm{dist}(\mathbf{y}, C) < \delta$, et si $\mathbf{y} = \mathbf{c}(s) \pm \mathrm{dist}(\mathbf{y}, C)c'^\perp$ et $\mathbf{z} = \mathbf{c}(t) \pm \mathrm{dist}(\mathbf{z}, C)c'(t)^\perp$, alors $\mathbf{z}$ tend vers $\mathbf{y}$ si et seulement si t tend vers s.

(f) En déduire que si $\mathrm{dist}(\mathbf{y}_0, C) < \delta$, l'application $\mathbf{y} \to (s, \ \mathrm{dist}(\mathbf{y}, C))$, où s est l'unique valeur telle que $\mathbf{y} = \mathbf{c}(s) + \mathrm{dist}(\mathbf{y}, C)c'(s)^\perp$, est un homomorphisme d'un voisinage de $\mathbf{y}_0$ sur un voisinage de $(s_0, \ \mathrm{dist}(\mathbf{y}_0, C)$.

(g) Conclure que si $0 < d(\mathbf{y}_0) < \delta$, les fonctions $d(\mathbf{y})$ (définie au (d)) et $\mathrm{dist}(\mathbf{y}, C)$ coincident au signe près sur un voisinage de $\mathbf{y}_0$. En déduire que $\mathrm{dist}(\mathbf{y}, C)$ est une fonction C^∞ sur un ouvert U de la forme $V \setminus C$, où V contient C.

(h) Remarquer que l'on a aussi montré que C est une sous-variété et qu'il en est de même pour les ensembles $C_\varepsilon = \{\mathbf{y},\ \mathrm{dist}(\mathbf{y}, C) = \varepsilon\}$ pour $\varepsilon < \delta$.

Exercice 3. Soit V une sous-variété de $I\!R^n$, et $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = c$ pour tout $x \in V$, montrer que $Df(x)(X) = 0$ pour tout $x \in V$ et tout $X \in T_x V$.

Exercice 4.

(a) Soit E un ensemble et $\mathbf{x} \in E \subset I\!R^n$. On note $Dir(\mathbf{x}, E)$ l'ensemble des demi-droites, appelées directions limites, $I\!R^+ \lim_{\mathbf{Z}_n \to \mathbf{X}, \mathbf{Z}_n \neq \mathbf{X}, \mathbf{Z}_n \in E} \frac{\mathbf{Z}_n - \mathbf{X}}{|\mathbf{Z}_n - \mathbf{X}|}$. Démontrer que si u est un difféomorphisme défini dans un voisinage de $\mathbf{x} \in E$, alors $Dir(u(\mathbf{x}), u(E)) = Du(\mathbf{x})(Dir(\mathbf{x}, E))$. En déduire la forme de $Dir(\mathbf{x}, E)$ quand E est une sous-variété de dimension p.

(b) Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés ? $\{(x, y) \in I\!R^2\ ; xy = 0\}$, $\{(t^3, t^2) \in I\!R^2\ ; t \in I\!R\}$, $\{(x, y, z) \in I\!R^3\ ; z = |(x, y)|\}$.

Exercice 5. Soit $a \in I\!R^3$, on considère une fonction $f : I\!R^3 \to I\!R$ de classe C^2, sans point critique et vérifiant: $f(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. On note $S = f^{-1}(0)$.

1) Montrer que S est une surface et que son plan tangent vectoriel en a est le plan d'équation $z = 0$.

2) Montrer que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 \neq 0$ alors il existe un voisinage ouvert de a dans $I\!R^3$, dans lequel a est l'unique point dont le plan tangent est horizontal.

Exercice 6.

1) Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction de classe C^∞ telle que, pour un entier m, $f(\lambda x) = \lambda^m f(x),\ \forall x \in I\!R^n,\ \forall \lambda \in I\!R$. Montrer que $f^{-1}(\{c\})$ est une sous-variété de $I\!R^n$ pour tout $c \in f(I\!R^n) \setminus \{0\}$.

Exercice 7. On note $0(n) \subset M_n(I\!R)$ l'ensemble des matrices à coefficients réels telles que ${}^t\!AA = \mathrm{Id}$.

1) Montrer que $0(n)$ est une sous-variété de $M_n(I\!R)$. Quelle est sa dimension ?

2) Déterminer son espace tangent en $A \in 0(n)$.

Exercice 8. Soit $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $f : S^{n-1} \to I\!R$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$.

1) Montrer que S^{n-1} est une sous-variété de $I\!R^n$, et que f est différentiable sur S^{n-1}.

2) Montrer que les points critiques de f sont non-dégénérés et trouver leurs indices.

Rédigé par François Labourie et J.M. Morel