Feuille 1

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Notations : $\mathbf{x}$, $\mathbf{h}$, etc. désignent des vecteurs de $I\!R^N$; $\mathbf{x}$ a des coordonnées $(x_i)_{i=1,\dots N}$ et une norme euclidienne $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum x_i^2}$.

Exercice 1. Donner un exemple simple de fonction continue $f(x, y)$ telle que $\lim_{t\to 0} \frac{f(t(x,y))-f(0,0)}{t}$ existe pour tout $(x, y) \in I\!R^2$ et telle que f ne soit pas différentiable en 0. Donner un exemple de fonction réelle d'une variable réelle différentiable en tout point de $I\!R$, mais pas C^1 en 0.

Exercice 2. On note $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ le produit scalaire euclidien canonique de $I\!R^N$. Si A est un endomorphisme de $I\!R^N$, on appelle endomorphisme adjoint de A l'unique endomorphisme satisfaisant $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x},^t A\mathbf{y})$ pour tous $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in I\!R^N$. Soit $u(\mathbf{x})$ une fonction relle, C^2, dfinie sur $I\!R^N$. On identifie à la différentielle $Du(\mathbf{x})$ le vecteur de $I\!R^N$, encore noté $Du(\mathbf{x})$, tel que $(Du(\mathbf{x}), \mathbf{h}) = Du(\mathbf{x})(\mathbf{h})$. On identifie de même à la différentielle seconde, $D^2u(\mathbf{x})$, l'unique endomorphisme symétrique de $I\!R^N$ tel que $D^2u(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = (D^2u(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{k})$.

(a) Avec ces notations, montrer que si A est un endomorphisme quelconque de $I\!R^N$, $D(u \circ A) =^t ADu \circ A$ et $D^2(u \circ A) =^t A(D^2u \circ A)A$.

(b) En dduire que le Laplacien $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est isotrope, c'est à dire que $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ pour toute isométrie de $I\!R^N$.

Exercice 3.

(a) Si $\mathbf{a} \in I\!R^N$, on considère l'endomorphisme de $I\!R^N$ défini par $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$. Ecrire la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique.

(b) Soient $u(\mathbf{x})$ une fonction réelle C^2 définie dans $I\!R^N$ et $g(s)$ une fonction C^2 de $I\!R$ dans $I\!R$. Avec les identifications de l'exercice 2, montrer que $D^2(g \circ u) = g'(u)D^2u + g''(u)Du \otimes Du$. Ecrire le résultat dans la base canonique sous forme matricielle.

(c) Calculer $Dv(\mathbf{x})$ et $D^2v(\mathbf{x})$ pour $v(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ et $\mathbf{x} \neq 0$.

Exercice 4. Soit $u : I\!R^N \to I\!R$ une fonction C^2 telle que $f(t\mathbf{x}) = t^2 f(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in I\!R^N$ et $t \geq 0$. Dmontrer que $f(\mathbf{x})$ est une forme quadratique et la calculer. On rappelle la formule de Taylor

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}D^2u(\mathbf{x} + \theta\mathbf{h})(\mathbf{h}, \mathbf{h}),$$

où $0 \leq \theta \leq 1$ (et θ dépend de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{h}$).

Exercice 5. Soit $k(\mathbf{x})$ une fonction réelle de $\mathbf{x} \in I\!R^N$, continue, radiale ($k(\mathbf{x}) = k(\mathbf{y})$ si $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$), à support compact et d'intégrale égale à 1. On pose pour toute fonction réelle $u(\mathbf{x})$, $(k * u)(\mathbf{x}) = \int_{I\!R^N} k(\mathbf{y})u(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}$.

(a) On pose $k_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^N}k(\frac{\mathbf{x}}{h})$. Calculer $\int k_h(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Quel est son support ? Montrer que $\int k(\mathbf{z})z_i d\mathbf{z} = 0$, $\int k(\mathbf{z})z_i z_j d\mathbf{z} = 0$ si $i \neq j$ et que $\int k(\mathbf{z})z_i^2 d\mathbf{z} = \int k(\mathbf{z})z_j^2 d\mathbf{z}$.

(b) Montrer que $(k_h * u)(0) - u(0) = Ch^2 \Delta u(0) + o(h^2)$ et exprimer C. Indications : on commencera par montrer que $k_h * u(\mathbf{x}) = \int k(\mathbf{z})u(\mathbf{x} - h\mathbf{z})d\mathbf{z}$. Ensuite, on effectuera un développement de Taylor de $u(\mathbf{x} - h\mathbf{z})$ au voisinage de $\mathbf{x}$.

(c) En déduire que pour toute isométrie R de $I\!R^N$, $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$.

Exercice 6. Soit $u : I\!R^N \to I\!R$ une fonction C^2 et $\mathbf{x}$ tel que $Du(\mathbf{x}) \neq 0$.

(a)

Calculer $\frac{\partial}{\partial t}(|Du(\mathbf{x} + t\frac{Du(\mathbf{x})}{|Du(\mathbf{x})|})|^2)$ en $t = 0$.

(b) Calculer $D^2u(Du, Du)$ pour les fonctions suivantes de $I\!R^2$ dans $I\!R$: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = Arctg(\frac{y}{x})$ pour $x \neq 0$

(c) On appelle ligne de gradient ou ligne de plus grande pente d'une fonction u toute courbe maximale tangente en chacun de ses points $\mathbf{x}$ à $Du(\mathbf{x}) \neq 0$. Quelles sont les lignes de plus grande pente des fonctions du (b) ? Interprtation gomtrique du résultat du (b) ?

Exercice 7. Soit $\mathbf{x}(s)$ une courbe C^2, i.e. une application injective, C^2, de $[0, 1]$ dans $I\!R^2$ telle que $\mathbf{x}'(s) \neq 0$ pour tout s. Montrer qu'il existe une unique reparamtrisation de la courbe, $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(\varphi(t))$, telle que $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ et $|\tilde{\mathbf{x}}'(t)| = 1$.

Exercice 8. On considre dans le demi-plan $\{\mathbf{x} = (x, y), y \geq 0\}$ les courbes de la forme $y = (x - \lambda)^2$, $x \leq \lambda$, $y = 0$ pour $x \geq \lambda$, où $\lambda \in I\!R$. Vrifier que par chaque point du demi-plan ouvert passe une seule de ces courbes. Proposer une quation diffrentielle $\mathbf{x}'(t) = g(\mathbf{x})$ dont ces courbes sont les trajectoires. Est-il possible de choisir g localement lipschitzienne ?

Exercice 9. On considère l'espace F des fonctions u, C^2, définies sur le carré $C = [0, 1]^2$ muni de la norme $||u|| = \sup_{\mathbf{x} \in C}(|u(\mathbf{x})| + |Du(\mathbf{x})| + |D^2u(\mathbf{x})|.)$ Calculer les différentielles première et seconde de

$$E(u) = \int_C |Du(\mathbf{x})|^3 d\mathbf{x}.$$

Vérifier qu'elles sont continues.

Ecole Normale Suprieure de Cachan, Dpartement de Mathmatiques.