1 Intégration, Lebesgue, Fubini

Exercice 1 Démontrer que le graphe d'une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. (On montrera que la portion du graphe comprise entre les abcisses $-k$ et k peut être recouverte par des rectangles dont la somme des mesures est arbitrairement petite).

Exercice 2 Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ et soit h égale à $+\infty$ dans A et à 0 dans son complémentaire. Démontrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx = 0 \text{ si } \mu(A) = 0, \ \int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx = +\infty \text{ si } \mu(A) = +\infty.$$

Exercice 3 Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ p.p.. Montrer que f et g sont égales partout.

Exercice 4 Soit f une fonction positive sommable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \text{ quand } a \to -\infty, \ b \to +\infty.$$

Généralisation : soit A_n une suite croissante d'ensembles tels que $\bigcup_n A_n = \mathbb{R}^N$. Demontrer que $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)dx$.

Exercice 5 Soit f une fonction positive sommable sur $\mathbb{R}^N$ et A_n des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ tels que $\mu(A_n) \to 0$. Démontrer que $\int_{A_n} h(x)dx \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6 Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Indications : on posera $f_n(x) = \Sigma_0^n (-1)^k x^k$ pour $x \in [0,1]$. On trouvera un chapeau intégrable pour les f_n et on appliquera le théorème de Lebesgue.

Exercice 7 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer la limite de $n\int_1^{\infty} f(nx)dx$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 (Lemme de Fatou)
On rappelle la définition de la limite inférieure d'une suite a_n de réels : $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} a_n$. Cette limite est une limite croissante et donc elle existe toujours dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
i) Remarquer que si g_n est une suite de fonctions sommables positives, alors $\int \inf_n g_n \leq \inf_n \int g_n$.

ii) Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $I\!R \cup \{+\infty\}$. On pose $g_N = \inf_{n \geq N} f_n$. Montrer que $\lim_{N \to \infty} \int g_N = \int \lim_{N \to \infty} g_N$.
iii) Déduire des questions précédentes le lemme de Fatou :

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Exercice 9 : contrexemples.
Donner des exemples de suites de fonctions $f_n \in L^1(0,1)$ telles que

- $f_n \to f$ dans L^1 et $f_n(x)$ ne tend pas presque partout vers $f(x)$.
- f_n ne tend pas vers f dans L^1 et $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout.

Exercice 10 Coupes d'un ensemble mesurable.
Soit E un sous-ensemble de mesure bornée de $I\!R^N$. Démontrer que pour tout $1 \geq \alpha \geq 0$, E contient un sous-ensemble de mesure $\alpha.\mathrm{mes}(E)$.

Exercice 11 Convergence L^1 quand il y a "conservation de la masse" (Lemme de Scheffer ?).
Montrer que si une suite de fonctions $w_n \in L^1$ vérifie $w_n \geq 0$, $w_n(x) \to w(x)$ presque partout, $w \in L^1$ et $\int w_n \to \int w$, alors $w_n \to w$ dans L^1. Indication: écrire $\int w - w_n = \int (w - w_n)^+ - \int (w - w_n)^-$ et $\int |w - w_n| = \int (w - w_n)^+ + \int (w - w_n)^-$ et appliquer le théorème de Lebesgue.

Exercice 12 Critère d'intégrabilité sur un borné B de $I\!R^N$.
On va montrer dans cet exercice que $f \in L^1(B)$ si et seulement si $\forall \varepsilon \quad \exists \eta, \forall K \subset B, \quad \mathtt{mes(K)} \leq \eta \Rightarrow \int_{\mathtt{K}} |\mathtt{f}| \leq \varepsilon$.
i) Montrer que si le critère d'intégration est vérifié, alors f est intégrable.
ii) Pour la réciproque, on raisonne par contradiction et on suppose qu'il existe $f \in L^1(B)$ telle que le critère d'intégration ne soit pas vérifié. Montrer qu'il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite K_n de sous-ensembles de B tels que $\int_{K_n} |f| \geq \varepsilon$ et $\mathrm{mes}(K_n) \leq \frac{1}{2^n}$. On pose $J_n = \cup_{n+1}^{\infty} K_k$. Montrer que $\int_{J_n} |f| \to 0$ et conclure.
Autre méthode : appliquer directement le résultat de l'exercice 5 !
iii) (facultatif) Adapter le critère d'intégrabilité à $I\!R^N$.

Exercice 13 Réciproque du Théorème de Lebesgue.
On va montrer que si f_n est une suite convergente dans L^1, alors il existe une sous-suite qui converge presque partout et qui a un chapeau intégrable.
i) Montrer que si la suite f_n converge vers f dans L^1, on peut en extraire une sous-suite telle que $||f_{i_{n+1}} - f_{i_n}||_{L^1} < 2^{-n}$.

ii) On pose $g_n = f_{i_{n+1}} - f_{i_n}$; montrer en appliquant le théorème de convergence monotone que la série $\Sigma|g_n(x)|$ appartient à L^1 et converge donc pour presque tout x. En déduire que f_{i_n} converge presque partout.
iii) Déduire aussi que f_{i_n} a un chapeau intégrable et conclure que $f_{i_n}(x) \to f(x)$ presque partout.
iv) Adapter le raisonnement précédent à une suite f_n qui est de Cauchy dans L^1 pour montrer que L^1 est un espace complet.

Exercice 14 Calculer la dérivée à droite en zéro de la fonction

$$t \to \int_0^1 (f(x) + t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \varphi(t),$$

où f vérifie $0 \le f \le 1$. Indication : pour évaluer la limite du rapport $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$, penser à utiliser le théorème de Lebesgue.

Exercice 15 Calculer $\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n$, où $\Gamma_n = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Exercice 16 Soit f une fonction sommable. Démontrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \mathrm{mes}(\{x,\ |f(x)| \ge \alpha\}) = 0$.

Exercice 17 On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Démontrer que $\Gamma(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$. Pour la deuxième question, penser à utiliser le lemme de convergence monotone !

Exercice 18 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\tilde{f}(x) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \in L^1([0,1])$ et que $\int_{[0,1]} \tilde{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

Exercice 19 (Fubini, changement de coordonnées en "polaires") Démontrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. On prendra le carré de cette intégrale, le considérera par Fubini comme une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ que l'on calculera en coordonnées polaires. Penser à justifier rigoureusement le changement de coordonnées effectué dans l'intégrale à l'aide du théorème de changement de variables.

Exercice 20 (Propriétés de la convolution)
a) Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on peut définir une fonction L^1, $f * g$ définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

aussi, et $||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1} ||g||_{L^1}$. (Application directe du théorème de Fubini.)

b) On appelle $L^1_{loc}(I\!R^n)$ l'ensemble des fonctions L^1 sur tout borné de $I\!R^n$. Montrer que si $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$, et si $g \in L^1(I\!R^n)$ est nulle en dehors d'un borné, alors on peut définir $f * g$ et $f * g \in L^1_{loc}$.

c) Si $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$, $\varphi \in C^m_0(I\!R^n)$, alors $f * \varphi \in C^m(I\!R^n)$ et,

$$\forall |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi.$$

Exemple où $f * g$ n'est pas définie partout : poser $f(x) = g(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ si $|x| \leq 1$, et 0 sinon. Remarquer que $f * g(0) = +\infty$.

Exercice 21 (Un contrexemple à méditer au théorème de dérivation sous le signe somme). Soit φ une fonction continue sur $[0, 1]$. On considère, dans $[0, 1] \times [0, 1]$ la fonction f définie par $f(x, \lambda) = \phi(x)$ si $x \leq \lambda$ et $f(x, \lambda) = 0$ sinon. On pose $F(\lambda) = \int_0^1 f(x, \lambda) dx$. Pour chaque λ, la dérivée partielle existe sauf en un point, et elle est majorée par une fonction sommable fixe : la fonction 0. Déterminer la dérivée de F.

2 Rappel des principaux théorèmes

Théorème 1 *(Beppo Levi, ou convergence monotone)*
Si f_n est une suite croissante de fonctions définies sur $I\!R^N$ et à valeurs dans $I\!R^+ \cup \{+\infty\}$, on a

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty.$$

Corollaire 1 *Soit $u_n(x)$ une suite de fonctions définies sur $I\!R^N$ et à valeurs dans $I\!R^+ \cup \{+\infty\}$. On peut alors l'intégrer terme à terme, c'est-à -dire que*

$$\int \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)dx \leq +\infty.$$

Théorème 2 *(Théorème de Lebesgue)*
Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que pour tout n, $|f_n(x)| \leq h(x)$ pour presque tout x. Alors

$$\int |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad \int f_n(x)dx \to \int f(x)dx.$$

Théorème 3 *(Réciproque du théorème de Lebesgue).*
Si $f_n \to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite f_{n_k} de la suite f_n qui converge presque partout vers f et un chapeau intégrable h tel que $\forall k$, $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p..

Théorème 4 *(Théorème de dérivation sous le signe somme) Soient I un intervalle de $I\!R$ et A un sous-ensemble de $I\!R^n$. On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.*
(a) Pour tout $\lambda \in I$, la fonction $x \to f(x,\lambda)$ est sommable sur A.
(b) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ existe en tout point de $A \times I$.
(c) Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)| \leq h(x)$ pour tous x et λ. Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A f(x,\lambda)dx$$

est dérivable dans I et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)dx.$$

Théorème 5 *(Fubini)*
Soit $f(x,y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.
(a) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les trois membres définissent un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy) = \int_{\mathbb{R}^q} (\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx)dy.$$

Si f est sommable dans $\mathbb{R}^{p+q}$, les trois membres de l'égalité précédente ont un sens et sont égaux. Plus précisément, dire que le troisième membre a un sens signifie :
- *pour presque tout y, la fonction $x \to f(x,y)$ est sommable dans $\mathbb{R}^p$,*
- *la fonction $\varphi(y) = \int f(x,y)dx$ qui est ainsi définie presque partout est sommable dans $\mathbb{R}^q$.*

Théorème 6 *(de changement de variable)*
Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ un difféomorphisme entre Ω_1 et Ω_2. On notera $J_\varphi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Soit f une fonction définie sur Ω_2.
(a) Si la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les deux membres ont un sens dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx.$$

(b) Si f est à valeurs complexes, elle est sommable dans Ω_2 si et seulement si $f(\varphi(x))J_\varphi(x)$ est sommable dans Ω_1, et les deux membres de l'égalité précédente sont alors égaux.