Exercice 1 Soient f et g deux fonctions de $L^2(0,a)$. On veut calculer le développement en série de Fourier du produit fg.

a) Vérifier que $fg \in L^1(0,a)$.

b) On considère les sommes partielles

$$f_N = \sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \text{ et } g_N = \sum_{-N}^{N} c_n(g) e^{2i\pi n \frac{t}{a}}.$$

Montrer que $f_N g_N$ tend vers fg dans L^1. Calculer les coefficients de Fourier de $f_N g_N$.

c) Montrer que les coefficients de Fourier de $f_N g_N$ tendent vers ceux de fg et en déduire l'expression des coefficients de Fourier de fg en fonction de ceux de f et de g.

d) Soit $c = (c_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in l^1(\mathbf{Z})$. On lui associe sa *fonction caractéristique* $f_c(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int}$, définie sur $[0, 2\pi]$. On définit la convolution discrète $c * d$ de deux suites $c = (c_n)$ et $d = (d_n)$ de $l^1(\mathbf{Z})$ par $(c * d)_n = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k d_{n-k}$.

e) Montrer que $c * d \in l^1(\mathbf{Z})$. Montrer que $f_{c*d} = f_c f_d$. Que peut-on dire sur $c * d$, f_{c*d} si $c \in l^2$ et $d \in l^2$?

f) Si f_c est dans L^1, peut-on en déduire que $c \in l^1$?

Exercice 2 Caractérisation des distributions périodiques par leur série de Fourier
Le but de cet exercice est de compléter le chapitre 11.1 sur les distributions périodiques en montrant que :

1) Toute distribution u 2π-périodique est la somme d'une série de Fourier dont les coefficients $c_k(u)$ sont à croissance lente,

$$u = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(u) e^{ik.x}.$$

Réciproquement, toute série de Fourier à coefficients à croissance lente est une distribution 2π-périodique.

2) Les coefficients de Fourier de u se calculent avec une quelconque fonction χ donnant lieu à une partition de l'unité 2π-périodique ($\sum_{\gamma\in 2\pi\mathbf{Z}} \chi(x+\gamma) = 1$) par la formule

$$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} < u, \chi e^{-ik.x} >$$

3) La dualité entre distributions périodiques u et fonctions tests $\varphi \in C_0^\infty$ s'exprime grâce aux coefficients de Fourier de u et de la 2π-périodisée $\tilde{\varphi}$ par

$$< u_1, \varphi >= 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(u) c_{-k}(\tilde{\varphi}).$$

4) Cette dernière formule traduit donc la dualité distributions périodiques-fonctions test en une dualité entre suites indexées par $\mathbf{Z}$ à croissance lente et suites à décroissance rapide.

On rappelle la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite à croissance lente, c'est-à-dire vérifiant pour au moins une valeur de $M \in I\!N$ une inégalité du type*

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ |c_k| \leq C(1+|k|)^M.$$

Alors la série

(1) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ik.x}$$

converge au sens des distributions et définit une distribution 2π-périodique.

La proposition 1 nous permet de construire des distributions périodiques comme sommes de séries de Fourier. Rappelons aussi qu'une telle décomposition en série de Fourier est unique :

Théorème 1 *(Unicité des coefficients de Fourier) Si c_k, $k \in \mathbf{Z}$ est une suite à croissance lente telle que l'on ait $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ik.x} = 0$ au sens des distributions, alors $\forall k, c_k = 0$.*

a) Si u est une distribution 2π-périodique, on définit ses coefficients de Fourier $c_k(u)$, $k \in \mathbf{Z}$ par

(2) $$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} < u, \chi e^{-ik.x} >$$

où χ est une partition de l'unité 2π-périodique. Démontrer que $c_k(u),\ k \in \mathbf{Z}$ est à croissance lente.

b) Notons Soit $\varphi \in C_0^\infty$. On note $\tilde{\varphi}$ la 2π-périodisée de φ, $\tilde{\varphi}(x) = \sum_{\gamma \in 2\pi\mathbf{Z}} \varphi(x)$. Démontrer que

$$(3) \qquad \tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(\tilde{\varphi}) e^{ik.x} \text{ avec } c_k(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{I\!R} \varphi(x) e^{-ik.x} dx.$$

Montrer que les coefficients de Fourier $c_k(\tilde{\varphi})$ sont à décroissance rapide.

c) On considère la distribution

$$u_1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(u) e^{ik.x}.$$

On va montrer que $u = u_1$. Pour cela, appliquer u et u_1 à φ et montrer que $< u_1, \varphi >$ et $< u, \varphi >$ sont tous deux égaux à

$$2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(u) c_{-k}(\tilde{\varphi}).$$

Conseil : écrire $u = \sum_{\gamma \in 2\pi\mathbf{Z}} \tau_\gamma(\chi u)$, où τ_γ désigne la τ-translatée de u.

d) Conclure : passer en revue les points 1, 2, 3, 4 du début de l'exercice et vérifier qu'ils ont bien été montrés.

Exercice 3 L'élastique chargé

a) On dit que $f \in H^{-1}(0, L)$ si on peut écrire $f = g + h'$, avec $g, h \in L^2(0, L)$. Montrer que l'on peut alors écrire $f = h_1'$, $h_1 \in L^2(0, L)$.

b) Montrer que $f \in H^{-1}$ définit une forme linéaire continue sur $H^1(0, L)$, définie par $< f, u >= - \int_{[0,L]} h_1(x) u'(x) dx$.

c) Exemple : montrer que si $f = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, $x_i \in]0, L[$, est une somme finie de masses de Dirac, alors $f \in H^{-1}$. Calculer alors $< f, u >$ pour $u \in H^1(0, L)$. Dans l'exemple d'application physique que nous allons considérer, les masses de Dirac représentent des masses ponctuelles suspendues à une corde à linge.

d) Soit $f \in H^{-1}(0,L)$. On veut minimiser l'énergie de la corde à linge chargée par f,

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{[0,L]} u'^2 - < f, u >,$$

pour $u \in H_0^1(0,L)$. (La corde est fixée en 0 et en L, u représente le décalage vertical de la corde à partir du niveau 0. Montrer que E est strictement convexe et coercive sur H_0^1. Rappel : dans $H_0^1(0,L)$, $(\int_{[0,L]} u'^2)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à la norme de $H^1(0,L)$.

e) Montrer que E atteint un minimum u_0 unique dans H_0^1 et que ce minimum vérifie

$$\int u'v' =< f, v >$$

pour tout $v \in H_0^1(0,L)$.

f) En déduire que $-u'' = f$ au sens des distributions sur $]0,L[$.

g) Unicité. Soit réciproquement $u \in H_0^1(0,L)$ tel que $-u'' = f$ au sens des distributions de $]0,L[$. Montrer que l'on a $\int u'v' =< f, v >$ pour tout $v \in H_0^1$. En déduire que l'équation $-u'' = f$ a une unique solution dans H_0^1.

h) Montrer que $f \in H^{-1}(0,L)$ si et seulement si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\sin\frac{k\pi}{L}$ avec $\frac{c_k}{k} \in l^2(\mathbf{Z}\setminus\{0\})$. Donner une formule pour calculer $c_k(f)$.

i) Calculer $c_k(f)$ quand $f = \delta_{\frac{L}{2}}$.

j) Montrer à nouveau, cette fois-ci en utilisant directement les développements en série de Fourier, qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(0,L)$ telle que $-u'' = f$. On posera $u = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(u)\sin\frac{k\pi x}{L}$ et on calculera $c_k(u)$ en fonction de $c_k(f)$. Bien justifier le raisonnement.

k) Dessiner la solution de $-u'' = \delta_{\frac{L}{3}} + \delta_{\frac{2L}{3}}$.

Exercice 4 Corde vibrante On considère une corde élastique, fixée aux deux extrémités situées en deux points de l'espace distants de L. On note pour tout temps $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq L$, $y(t,x)$ l'écartement de la corde par rapport à sa position de repos. Les points de la corde sont donc paramétrés par $(x, y(t,x))$. On note

$y_t(t,x)$ la dérivée partielle première de y par rapport à t et on notera de même $y_x(t,x)$, y_{xx}, y_{tt}, etc.

L'énergie de la corde est, à un facteur près, égale à

$$F(t,y)=\frac{1}{2}\int_0^T |y_t|^2(t,x)dx+\omega^2\int_0^T \sqrt{1+|y_x|^2}dx,$$

où le premier terme est l'énergie cinétique et le second l'énergie potentielle, proportionnelle à l'élongation de la corde. On suppose que la corde vibre depuis un moment, de sorte que y_x est devenu petit et on linéarise l'énergie potentielle. On appelle énergie linéarisée :

$$(4)\qquad E(t,y)=\int_0^T |y_t|^2(t,x)dx+\omega^2\int_0^T |y_x|^2dx.$$

a) Montrer que $2F(t,y)=E(t,y)+C+o(\int|y_x|^2)$.

b) On note $y(0,x)=y_0(x)$ la position initiale de la corde et on considère l'équation d'évolution, de la corde vibrante,

$$(5)\; y_{tt}-\omega^2 y_{xx}=0,\ \text{avec } y(t,0)=y(t,L)=0 \text{ et } y(0,x)=y_0(x),\ y_t(0,x)=(y_0)_t.$$

Justifier l'équation (5) en utilisant la loi de Newton, Force=masse $\times$ accélération. Pour les raisonnements, on supposera toujours que y_x est suffisamment petit.

c) Supposons que y soit C^2 et vérifie l'équation de la corde vibrante (5). Montrer que l'énergie (4) ne dépend pas de t.

d) Vérifier que les solutions C^2 de (5) sont des combinaisons linéaires infinies de fonctions de la forme

$$f_k(t,x)=(a\cos(k\frac{\pi\omega t}{L})+b\sin(k\frac{\pi\omega t}{L}))\sin(k\frac{\pi x}{L}),\ k\in\mathbb{N}^*.$$

On pourra considérer les fonctions $y(t):\, x\to y(t,x)$ et décomposer $y(t)=\sum_k c_k(t)e_k(x)$ sur le système de fonctions $e_k(x)=\sin(k\frac{\pi x}{L})$. On justifiera bien sûr cette décomposition. On pourra démontrer que $c_k''(t)=-(\frac{k\pi\omega t}{L})^2c_k(t)$. A quels types de conditions initiales correspondent les cas $a=0$, $b=0$? Interpréter.

e) Condition initiale corde pincée (guitarre, harpe, clavecin). Si nous pinçons une corde, nous avons une condition initiale du type $y_0(x) = \lambda(\alpha L - |x - \alpha L| - (2\alpha - 1)x)$., $(y_0)_t = 0$. Dessiner y_0 et calculer son énergie. Donner la relation entre α et λ pour que l'énergie de la corde soit égale à 1.

f) En utilisant la formule du d), proposer un développement en série pour la solution de (5) avec comme condition initiale le "pincement de corde" du 4). On sera amené à calculer les coefficients de Fourier de y_0 et de $y(t)$: en profiter pour examiner en quel sens la série de Fourier de $y(t)$ converge vers $y(t)$. Comment ces coefficients de Fourier dépendent-ils de l'endroit où la corde a été pincée? La solution trouvée est-elle C^2 ? Quelle est la régularitéde $x \to y(t, x)$?

g) Corde frappée (piano). La condition initiale est maintenant $y_0(0, x) = 0$, $(y_0)_t(0, x) = \lambda\chi_{[\frac{L}{2}-\beta, \frac{L}{2}+\beta]}$, où 2β est la longueur de corde frappée par le marteau à l'instant $t = 0$. Interpréter cette condition initiale. Normaliser la relation entre λ et β pour que l'énergie initiale de la corde soit égale à 1.

h) Comparer la répartition des harmoniques (les amplitudes respectives de $c_k(t)$ quand k varie) pour la corde frappée et la corde pincée.

On fera les comparaisons suivantes, à énergie initiale constante :

- h1-Corde pincée au milieu ou plutôt sur le bord, à énergie égale : dans quel cas la corde a-t-elle le plus d'aigus ?
- h2-Corde frappée sur un intervalle large (β grand) ou étroit : dans quel cas a-t-on le plus d'aigus ?
- h3- A énergie constante, cordes frappées ou pincées au milieu, $\beta = \frac{L}{20}$.