Partiel d'analyse, magistère de Mathématiques, ENS Cachan, Novembre 2000

Le polycopié et les notes sont autorisés. Ne pas redémontrer ce qui est prouvé dans le polycopié. Se contenter de citer précisément les passages du polycopié utilisés.

Exercice 1 Soit $u : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, une bijection strictement croissante.

a) Montrer que $xu(x) = \int_0^x u(t)dt + \int_0 u(x)u^{-1}(t)dt$.

b) On pose $U(x) = \int_0^x u(t)dt$ et $V(y) = \int_0^y u^{-1}(t)dt$. Déduire que $xy \leq U(x) + V(y)$.

c) Que donne cette formule si $u(s) = s^\alpha$, $0 < s < +\infty$? Conclure que si $U(f) \in L^1$ et $V(g) \in L^1$, alors $fg \in L^1$.

Exercice 2 Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles. On considère $h : [1,+\infty] \to I\!R^+$ définie par $h(p) = ||f||_{L^p}$.

(a) Montrer qu'il existe p_0 tel que h soit continue sur $[1,p_0]$, et $h(p) = \infty$ pour $p > p_0$.

(b) Montrer que $p \to Logh(p)$ est convexe sur $[1,p_0]$.

Exercice 3 Applications du théorème de Banach-Steinhaus à l'étude de propriétés génériques de suites et séries (I)

(a) Soient c_0 l'ensemble des suites de complexes $(\xi_n)_n$ convergeant vers 0, muni de la norme $||\xi||_\infty = \sup_n |\xi_n| et soit l^1$ l'ensemble des suites α_n telles que $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$. Montrer que ce sont des espaces de Banach et que $c_0' = l^1$.

(b) Montrer que si $\sum_n \alpha_n\xi_n$ converge pour toute suite ξ_n telle que $\xi_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$.

(b) On considère les opérateurs $T_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i$. Par hypothèse, on a $\sup_n T_n(\xi) < +\infty$ pour tout x. Par le théome de Banach-Steinhaus, on en déduit que $\sup_n ||T_n|| < +\infty$. Mais

$$||T_n|| = \sup_{\sup_i |\xi_i| \leq 1} |\sum_i^n \alpha_i\xi_i| = \sum_i^n |\alpha_i|.$$

Donc $\sup_n \sum_1^n |\alpha_n| < +\infty$, soit $\sum_i |\alpha_i| < +\infty$.

Exercice 4 Dans un espace topologique, on appelle G_δ toute intersection dénombrable d'ouverts. On appelle de même F_σ toute union dénombrable de fermés (Notations dues à Hausdorff ; en allemand Gebiet = ouvert, Summe = somme et Durschnitt = intersection.) Les G_δ denses sont intuitivement des ensembles "gros". On va en particulier donner une condition simple pour qu'ils ne soient pas dénombrables :

(a) Montrer que dans un espace métrique complet E sans point isolé, aucun ensemble dénse et dénombrable ne peut être un G_δ. (Supposer le contraire et

(a) Soit x_n les points d'un ensemble dénombrable dense de E. Supposons que E soit un G_δ. Alors $E = \bigcap O_n$, où chaque O_n est ouvert et dense. Soit $U_n = O_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k$. Alors U_n est aussi un ouvert dense, mais $\bigcap V_n = \emptyset$, ce qui contredit le théorème de Baire.

(b) Formulation précisée du théorème de Banach-Steinhaus : En reprenant la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus, montrer que si E et F sont deux espaces de Banach et T_i une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F, on a l'alternative suivante :
-ou bien $\sup_{i\in I} ||T_i|| < +\infty$
-ou bien $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| = +\infty$ pour x dans un G_δ dense de E.

(c) On note $C(T)$ l'espace des fonctions $f : I\!R \to \mathbf{C}$ continues et $2\pi-périodique, munidelanormede$ $L^1(0, 2\pi)$. Pour $f \in C(T)$, on considère pour $n \in I\!N$ les sommes partielles de la série de Fourier de f,

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt,$$

où

$$D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{ikt}.$$

Connaissez-vous des conditions suffisantes sur f pour que $s_n f(x)$ tende vers $f(x)$?

(b)

(c) On va montrer qu'il n'est pas vrai que $s_n f(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout

$f \in C(T)$. et pour tout x. On pose

$$s^\star f(x) = \sup_n |s_n f(x)|, \quad \text{et } S_n f = s_n f(0).$$

Montrer que la forme linéaire sur $C(T)$, $f \to S_n f$, vérifie

——S$_n f|| \leq ||D_n||_{L^1}$.(1)Montrer que cette inégalité est la meilleure possible, c'est--dire qu'il existe pour tout n une suite de fonctions $f_k \in C(T)$ telles que $||S_n f_k|| \to ||D_n||_{L^1}$.

(c)

(d) Montrer que

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin t}.$$

Dessiner $D_n(t)$ pour $n = 4$.

(d) Démontrer que $||D_n||_{L^1} \to \infty$ quand $n \to \infty$.

(d) Compte tenu de $|\sin x| \leq |x|$, on a

$$||D_n||_{L^1} \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin(n+\frac{1}{2})t|\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin t|\frac{dt}{t}$$
$$> \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty.$$

(e) Déduire que $||S_n|| \to \infty$ quand $n \to \infty$, puis que pour tout x dans $I\!R$, $s^\star f(0) = \infty$ pour tout f dans un G_δ dense de $C(T), noté \mathrm{E}_x$.

(e) La première relation découle immédiatement des questions (?) et (?). Les opérateurs S_n étant continus sur $C(T)$ et vérifiant $\sup_n ||S_n|| = +\infty$, il existe par la formulation précisée (a) du théorème de Banach-Steinhaus un G_δ dense E_0 de $C(T)$ tel que $s^\star f(0) = +\infty$ pour tout élément de E_0. Mais on peut appliquer ce même résultat à tout point x de $\mathbb{R}$, ce qui permet de conclure.

(f) Déduire de (?) et de (?) qu'il existe un G_δ dense E de $C(T)$ tel que pour tout f dans E, l'ensemble $\{x, s^\star f(x) = \infty\}$ est un G_δ dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (a)

(b)

(c)

(d)

Exercice 6 (a)

(b)

(c)

(d)

Exercice 7 (a)

(b)

(c)

(d)

Exercice 8 (a)

(b)

(c)

(d)