Examen d'analyse, magistère de Mathématiques, ENS Cachan 97-98.
Le polycopié et les notes sont autorisés. Ne pas redémontrer ce qui est prouvé dans le polycopié. Se contenter de citer précisément les passages du polycopié utilisés.

Exercice 1 (J.M. Bony, Ecole Polytechnique). On se fixe une fonction $G \in L^1(\mathbb{R})$. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on pose, lorsque l'intégrale est définie,

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y^n) G(y) dy.$$

(a) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $T_n(f)$ est définie pour presque tout x et appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que T_n est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même.

(c) On suppose maintenant que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $T_n f$ est définie en tout point, et est elle-même continue et bornée.

(d) On suppose que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) \to 0$. Montrer qu'en chaque point x, on a

$$T_n f(x) \to C f(x)$$

quand $n \to \infty$, où C est une constante que l'on précisera.

Exercice 2 Trouver la valeur maximale de $\int_0^1 x f(x) dx$ quand f est une fonction réelle telle que $\int_0^1 f(x) = 0$ et $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 1$. On donnera la fonction f pour laquelle cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 3 Donner des exemples de fonctions f et de suites de fonctions f_n telles que

(a) $f \in W^{1,2}(0,1), f \notin W^{1,3}(0,1)$;

(c) $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(0,1)$, $(1 \leq p < \infty)$, mais pas fortement ;

(d) $f_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$ uniformément mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Approximation des dérivées de la masse de Dirac par des fonctions.

(a) On pose $f_n(x) = -n$ si $-\frac{1}{n} \leq x \leq 0$, $f_n(x) = n$ si $0 < x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$ ailleurs. Calculer la limite de f_n au sens des distributions dans $\mathbb{R}$.

(b) Trouver une suite de fonctions f_n qui tend au sens des distributions vers δ_0''.

Problème

Première partie : une base hilbertienne : le système de Haar.

(Densité des fonctions à moyenne nulle)

1) Soit la fonction $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(I\!R)$ et dans $L^2(I\!R)$ quand $n \to \infty$.

2)

2-i) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que le sous-espace de $L^2(I\!R)$ constitué des fonctions de $L^2 \cap L^1(I\!R)$ telles que $\int f(x)dx = 0$ est dense dans $L^2(I\!R)$.

2-ii) Ce résultat est-il encore vrai si on remplace $I\!R$ par $[0, 1]$?

3) On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. C'est la "fonction de Haar". La dessiner. On pose $H_i^k(x) = 2^{\frac{k}{2}} H(2^k x - i), i, k \in \mathcal{Z}$. k est appelée *l'échelle dyadique* de la fonction de Haar H_i^k.

3-i) Dessiner les fonctions de Haar pour $k = 1, 2$. Quel est le support de H_i^k ?

3-ii) Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(I\!R)$.

4) On fixe $k \geq 1$. On appelle W_k l'espace des fonctions en escalier de $[0, 1]$ dyadiques et d'échelle dyadique inférieure ou égale à k.

4-i) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont d'échelle dyadique inférieure ou égale à k. On appelle S_k le système qu'elles forment.

4-ii) Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de $\tilde{W}_k$ le sous-espace de W_k des fonctions à moyenne nulle.

4-iii) Compléter le système $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} S_k$ par la fonction 1 sur l'intervalle $[0, 1]$ et montrer qu'on obtient ainsi une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$.

5) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(I\!R)$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace V_k des fonctions à moyenne nulle, constantes sur des intervalles dyadiques de longueur 2^{-k} et à support dans $[-2^k, 2^k]$.

6) A titre d'illustration, écrire le développement de la fonction caractéristique de $[-1, 1]$ sur la base de Haar de $L^2(I\!R)$ et en dessiner les premiers termes.

B Deuxième partie : La dualité $L^p - L^{p'}$ pour $1 \leq p \leq 2$.

On considère dans toute la suite un réel $1 \leq p \leq 2$ et on pose $p' = \frac{p}{p-1}$ si $1 < p$, $p' = +\infty$ si $p = 1$. L'objet des questions qui suivent est de donner une démonstration simple, pour $p \leq 2$, de la relation $(L^p)' = L^{p'}$. Pour simplifier les notations (mais sans perte de généralité), on considérera seulement $C = [0, 1]$ et $L^p([0, 1] = L^p(C)$. On note V_k le sous-espace de $L^p(C)$ constitué des fonctions en escalier dyadiques à support dans C et *d'échelle inférieure ou égale à* k, c'est-à-dire constantes sur les intervalles du type $C_i^k = (i2^{-k}, (i + 1)2^{-k})$. Si $v \in V_k$, on note $v(i)$ ou v_i la valeur de v sur C_i^k.

7) Montrer que

$$\forall v = (v(i))_i \in V_k,\ ||v||_{L^p} = (2^{\frac{-k}{p}})(\sum_i |v(i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

8) Soit $\tilde{f} \in (L^p)'$. Montrer qu'il existe $f_k = (f_k(i)) \in V_k$ telle que

$$\forall v \in V_k,\ \tilde{f}(v) = 2^{-k} \sum_i f_k(i)v(i) = \int_C f_k(x)v(x)dx. \tag{2}$$

9) On considère V_k comme un sous-espace de L^p, muni de la norme induite. Montrer que l'on a $||\tilde{f}||_{(V_k)'} = ||f_k||_{L^{p'}}$. Conseil : utiliser l'inégalité de Hölder et la fonction $v = (v(i))_i \in V_k$ définie par $v(i) = \text{Signe}(f_k(i))|f_k(i)|^{p'-1}$.

10) En déduire que

$$||f_k||_{L^{p'}} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}.$$

11) Démontrer que

$$f_k(i) = \frac{1}{2}(f_{k+1}(2i) + f_{k+1}(2i+1)), \tag{3}$$

c'est-à-dire que $f_k(i)$ est donc égale à la valeur moyenne de f_{k+1} sur C_i^k.

12) En déduire que $f_{k+1} - f_k$ est une somme de fonctions de Haar dont on précisera l'échelle dyadique (voir question 3).

13) Montrer que

$$\int_{[0,1]} (f_{k+1} - f_k)(f_{l+1} - f_l) = 0 \text{ si } k \neq l. \tag{4}$$

14) Déduire de l'identité

$$|f_{k+1}(2i) + f_{k+1}(2i+1)|^2 + |f_{k+1}(2i) - f_{k+1}(2i+1)|^2 = 2(|f_{k+1}(2i)|^2 + |f_{k+1}(2i+1)^2).$$

que

$$\int_{[0,1]} |f_k(x)|^2 dx + \int_C |f_k - f_{k+1}|^2 dx = \int_C |f_{k+1}(x)|^2 dx. \tag{5}$$

15) En déduire que

$$\sum_{k \in I\!N} ||f_{k+1} - f_k||^2_{L^2(C)} \leq \limsup_k ||f_k||^2_{L^2(C)} - ||f_1||^2_{L^2(C)} < \infty,$$

puis que la suite f_k converge fortement dans $L^2([0,1])$. Soit $f \in L^2(C)$ sa limite.

16) Démontrer que f appartient à $L^{p'}([0,1])$.

17) Démontrer que pour tout v dans un sous espace dense de $L^p(C)$, on a $\tilde{f}(v) = \int fv$ et en déduire que $\tilde{f}$ et f définissent la même forme linéaire sur $L^p([0,1])$.

18) Conclure.

Corrigé du problème

Première partie : une base hilbertienne : le système de Haar.

1) La suite de fonctions χ_n est de norme 1 dans L^1 et converge ponctuellement vers zéro. Elle n'a donc pas de limite dans L^1 (Car, par la réciproque du théorème de Lebesgue, si elle convergeait, ce serait vers zéro et elle ne peut tendre vers zéro si sa norme ne tend pas vers zéro.) Elle converge par contre vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) On sait que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 car il contient par exemple toutes les fonctions continues à support borné. Si maintenant $f \in L^1 \cap L^2$, on pose $f_n = f - (\int f)\chi_n$. Alors f_n converge vers f dans L^2 et est à moyenne nulle.

3) Les fonctions de Haar sont toutes à moyenne nulle et leur norme dans L^2 est 1. Soient deux fonctions H_i^k et $H_{i'}^{k'}$. Supposons d'abord que $k' > k$. Alors la première fonction est constante sur tous les intervalles dyadiques de longueur 2^{-k} tandis que la seconde est à moyenne nulle sur tout intervalle dyadique de longueur supérieure ou égale à $2^{k'-1} \geq 2^k$. Donc le produit scalaire des deux fonctions est nul. Si maintenant $k = k'$ et $i \neq i'$, les supports des deux fonctions sont disjoints et elles sont donc à nouveau orthogonales.

4) Les fonctions de Haar constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-k} et à support dans $[0,1]$ sont :
H_0^0, constante sur les intervalles de longueur $\frac{1}{2}$,
H_0^1 et H_1^1, constantes sur les intervalles de longueur $\frac{1}{4}$,...
$H_0^{2^{k-1}}$, ..., $H_{2^{k-1}-1}^{2^{k-1}}$, constantes sur les intervalles de longueur 2^{-k},
soit $1 + 2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$ fonctions. L'ensemble des fonctions dyadiques de W_k a pour dimension 2^k et son sous-espace de fonctions à moyenne nulle $\tilde{W}_k$ a une dimension de moins, soit $2^k - 1$. On voit que les fonctions de Haar considérées forment une base de $\tilde{W}_k$. Si on leur adjoint la fonction 1 qui est bien orthogonale aux précédentes, on obtient une base orthonormée de V_k, espace des fonctions dyadiques d'échelle 2^-k sur $[0,1]$. Par ailleurs, $\bigcup_k V_k$ est dense dans $L^2([0,1])$. Le système $\bigcup_{k\geq 0} S_k \cup \{1\}$ est donc total dans $L^2([0,1])$. Comme il est orthonormé, c'est une base hilbertienne.

5) Par un raisonnement de dimension identique à celui utilisé pour $[0,1]$, on voit que les fonctions de Haar forment une base des fonctions dyadiques d'échelle inférieure ou égale à k, à moyenne nulle dont le support est contenu dans $[2^{-k}, 2^k]$. Le système de Haar engendre donc V_k. Le système $\cup_{k\in\mathbb{N}} V_k$ contient toutes les fonctions dyadiques à moyenne nulle et à support compact. Il engendre donc un sous-espace dense de l'espace des fonctions continues, à support compact et à moyenne nulle, qui est lui-même dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (question 2).

6) Calculons les premiers termes du développement de la fonction caractéristique de $[-1,1]$ sur la base de Haar. On pourrait calculer tous les produits scalaires, mais il est plus commode de remarquer que

$$\mathbb{1}_{[0,1]} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]} + H_0^{-1}, \text{ puis que}$$

$$\mathbb{1}_{[0,2]} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,4]} + H_0^{-2}, \text{ etc.. Donc}$$

$$\mathbb{1}_{[0,1]} = H_0^{-1} + \frac{1}{2}H_0^{-2} + ... + \frac{1}{2^k}H_0^n + ...$$

7) Evident !

8) $\tilde{f}$ est considérée comme une forme linéaire sur V_k, qui est de dimension finie. En choisissant la base canonique sur V_k des fonctions e_i^k égales à 2^k sur $[i2^{-k}, (i+1)2^{-k}]$, on a pour tout $v = (v_i)$ dans V_k par linéarité,

$$\tilde{f}(v) = \sum_i 2^{-k} v_i \tilde{f}(e_i^k) = \int_C f_k(x)v(x)dx$$

si on pose $f_k = (\tilde{f}(e_i^k))_i \in V_k$.

9) On applique l'inégalité de Hölder, en notant que V_k est aussi bien un sous-espace de L^p que de $L^{p'}$:

(6) $$|\tilde{f}(v)| = |\int f_k v| \leq ||f_k||_{L^{p'}} ||v||_{L^p}.$$

Comme V_k a été muni de la norme L^p, on déduit immédiatement que $||\tilde{f}||_{V_k'} \geq ||f_k||_{L^{p'}}$. Montrons qu'on a égalité. Il suffit de trouver $v = v(i) \in V_K$ tel que l'égalité soit réalisée dans (**??**). On pose simplement $v(i) = \text{Signe}(f_k(i))|f_k(i)|^{p'-1}$. Alors

$$\tilde{f}(v) = 2^{-k} \sum_i |f_k(i)|^{p'-1} |f_k(i)| = ||f_k||_{L^{p'}}^{p'},$$

tandis que

$$||v||_{L^p} = (2^{-k} \sum_i |f_k(i)|^{(p'-1)p})^{\frac{1}{p}} = ||f_k||_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}.$$

De ces deux dernières relations, on déduit que

$$\frac{|\tilde{f}(v)|}{||v||_{L^p}} = \frac{||f_k||_{L^{p'}}^{p'}}{||f_k||_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}} = ||f_k||_{L^{p'}}.$$

On a donc bien égalité possible dans (**??**).

10) Comme $V_k \subset L^p$, on a évidemment (définition de la norme d'une application linéaire) :

$$||\tilde{f}||_{(V_k)'} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}$$

et donc, par la question précédente

$$||f_k||_{L^{p'}} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}.$$

11) Ceci découle immédiatement de la relation de martingale appliquée à l'intervalle de V_k, $C_i^k = [i2^{-k}, (i+1)2^{-k}]$. On peut aussi revenir à la relation définissant f_k, à savoir $f_k = (\tilde{f}(e_i^k))_i$. Comme $e_i^k = \frac{1}{2}(e_{2i}^{k+1} + e_{2i+1}^{k+1})$, simple relation de subdivision d'intervalle, on tire la relation demandée en appliquant $\tilde{f}$ aux deux membres.

12) Sur l'intervalle $[2^{-k}i, 2^{-k-1}(2i+1)]$, la fonction $f_{k+1} - f_k$ vaut donc $\frac{1}{2}(f_{k+1}(2i) - f_{k+1}(2i+1))$ et l'opposé sur l'intervalle suivant $[2^{-k-1}(2i+1), 2^{-k}(i+1)]$. C'est donc bien une fonction de Haar, dyadique et d'échelle k. On en déduit que $f_{k+1} - f_k$ est une somme de 2^k fonctions de Haar.

13) La relation (**??**)

$$\int_{[0,1]} (f_{k+1} - f_k)(f_{l+1} - f_l) = 0 \text{ si } k \neq l.$$

découle immédiatement de l'orthogonalité des fonctions de Haar d'échelles dyadiques différentes.

14) La relation $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ donne

$$|f_{k+1}(2i) + f_{k+1}(2i+1)|^2 + |f_{k+1}(2i) - f_{k+1}(2i+1)|^2 = 2(|f_{k+1}(2i)|^2 + |f_{k+1}(2i+1)|^2).$$

On somme l'identité en question en $i = 0, 2, ..., 2^k - 1$ et on multiplie les deux membres par 2^{-k} ce qui donne le résultat à condition de remarquer que par la question 12),

$$\int_C |f_{k+1} - f_k|^2 = \sum_{i=0,\dots,2^k-1} 2^{-k}\frac{1}{4}|f_{k+1}(2i) - f_{k+1}(2i+1)|^2,$$

et par la question 11), $f_k(i) = \frac{1}{2}(f_{k+1}(2i) + f_{k+1}(2i+1))$, et donc

$$\int |f_k|^2 = \sum_{i=0}^{i=2^k-1} 2^{-k}\frac{1}{4}|f_{k+1}(2i) + f_{k+1}(2i+1)|^2 dx$$

et qu'enfin

$$\int |f_{k+1}|^2 = \sum_{i=0}^{i=2^k-1} 2^{-k}\frac{1}{2}(|f_{k+1}(2i)|^2 + |f_{k+1}(2i+1)|^2.$$

On obtient donc (**??**),

$$\int_{[0,1]} |f_k(x)|^2 dx + \int_C |f_k - f_{k+1}|^2 dx = \int_C |f_{k+1}(x)|^2 dx.$$

15) En effet, C étant borné, l'inégalité de Hölder nous donne $||f_k||_{L^2(C)} \leq c||f_k||_{L^{p'}(C)}$ puisque $p' > 2$. Comme la suite $f_{k+1} - f_k$ est un système orthogonal, la relation (**??**)

implique que la suite f_k converge dans $L^2(C)$: en effet, on somme cette relation en k et en simplifiant, il vient

$$\sum_1^\infty ||f_k - f_{k+1}||_{L^2}^2 \leq \limsup_k ||f_{k+1}||^2 - ||f_0||^2 \leq C,$$

car f_k est bornée dans $L^{p'}(C)$ et $p' > 2$, ce qui implique, C étant borné, que $||f_k||_{L^2} \leq C$. Comme la suite $f_k - f_{k+1}$ est une suite orthogonale dans un Hilbert, on déduit que la série $f_k - f_{k+1}$ converge dans $L^2(C)$ et donc que f_k converge dans $L^2(C)$ vers une fonction $f \in L^2(C)$.

16) On considère une sous-suite de $f_{\varphi(k)} = g_k$ qui converge presque partout vers f (réciproque du théorème de Lebesgue). Alors, par le Lemme de Fatou, $\int_C \lim_k |f(x)|^{p'} \leq \liminf_k \int |g_k(x)|^{p'} dx$.

17) La relation $\tilde{f}(v) = \int_C fv$ pour $v \in L^p(C)$ est vraie si v est dans un quelconque V_k, car on a alors $\tilde{f}(v) = \int f_k v \to \int fv$, v étant bornée et f_k convergeant dans L^2. Les formes linéaires continues $\tilde{f}$ et f coïncident sur un sous espace dense de $L^p(C)$, l'union des V_k, et donc partout.