Notes du cours d'analyse, ENS Cachan première année

Jean-Michel Morel

July 12, 2001

Contents

Traités recommandés :

H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.
J.M. Bony, Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, Ecole Polytechnique, 1994 (polycopié).
G. Choquet, Cours de Topologie, seconde édition, Masson, 1992.
T.W. Körner, Fourier Analysis, Cambridge University Press, 1988.
J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.
W. Rudin, Real and complex analysis, Mc-Graw-Hill, 1966, traduction française Masson 1980.
W. Rudin, Functional Analysis, Mc-Graw-Hill, 1980.

Autres sources

F. Hélein, Notes de cours, ENS Cachan, 1996 (manuscrit).
Y. Meyer, cours de DEA ondelettes 94-97 (manuscrits).

Chapter 1

Les Théorèmes de séparation de Hahn-Banach

Définition 1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, normé, complet.*

Exemples : $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{C}^N$, l^p, $1 \leq p \leq +\infty$, $l^p = \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$, $C^0(\mathbb{R}^N)$, espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini. Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire non dégénéré $< x, y >$, il est alors normé par $||x|| = \sqrt{< x, x >}$. On dit alors que E est préhilbertien. Si de plus il est complet, on dit que c'est un espace de Hilbert. Exemple canonique : l^2.

Théorème 1.1 de Hahn-Banach. *Soit E un espace vectoriel normé. Soit G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue de norme*

$$||g||_{G'} = \sup_{x\in G, ||x||\leq 1} g(x).$$

Alors il existe $f \in E'$, le dual topologique de E, qui prolonge g et telle que $||f||_{E'} = ||g||_{G'}$.

Exercice : le montrer en dimension finie.

Définition 1.2 (Zorn.) *Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel notée $\leq$. On dit que $Q \subset P$ est totalement ordonné si $\forall a, b \in Q$, $a \leq b$ ou $b \leq a$. On dit que $c \in P$ est un majorant de $Q \subset P$ si $\forall a \in Q$, $a \leq c$. On dit que $m \in P$ est maximal si $\forall x \in P$ tel que $m \leq x$, alors $m = x$. On dit que P est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.*

Lemme 1.1 de Zorn. *Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.*

Théorème 1.2 de Hahn-Banach (version analytique) *Soit $p : E \to \mathbb{R}^+$ une application vérifiant $\forall\lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et $\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x)+p(y)$. Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $g(x) \leq p(x), \forall x \in G$. Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g, i.e. $g(x) = f(x), \forall x \in G$, $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$.*

Démonstration On considère
$P = \{h : D(h) \to \mathbb{R}, D(h)$ s.e.v. de E, h linéaire $, G \subset D(h),\ h$ prolonge g et $h(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(h).\}$.
P est muni de la relation d'ordre

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow [D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1].$$

On vérifie que $P \neq \emptyset$ car $g \in P$, que P est inductif car si $Q \subset P$ est un sous-ensemble totalement ordonné, alors $D(h_1) = \bigcup_{h\in Q} D(h)$ et $h_1(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$ est un majorant pour Q. Donc, d'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal que l'on appelle f. On va vérifier que $D(f) = E$. Sinon, il existerait $x_0 \notin D(f)$. Posons $D(h) = D(h) + \mathbb{R}x_0$ et $\forall x \in D(f)$, $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Alors h est un prolongement de f et si on arrive à trouver α tel que $h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)$, on aura $f \leq h$ en contradiction avec la maximalité de h. Il faut choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ en sorte que

$$\forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R},\ h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0).$$

Cela revient à chercher α tel que

$$\forall x \in D(f),\ \forall t > 0,\ \ f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0),\ \ f(x) - t\alpha \leq p(x - tx_0).$$

On cherche donc s'il existe α tel que

$$\forall x \in D(f), \forall t > 0,\ \ \frac{f(x) - p(x - tx_0)}{t} \leq \alpha \leq \frac{p(x + tx_0) - f(x)}{t},\ \text{ ou encore :}$$

$$[\sup_{x\in D(f),t>0} \frac{f(x) - p(x - tx_0)}{t}, \inf_{x\in D(f),t'>0} \frac{p(x + t'x_0) - f(x)}{t}] \neq \emptyset, \text{ce qui veut dire}$$

$$\forall x, y \in D(f), \forall t, t' > 0,\ t'f(y) - t'p(y - tx_0) \leq tp(x + t'x_0) - tf(x),\ \text{ ou encore}$$

$$\forall x, y \in D(f), \forall t, t' > 0,\ tf(x) + t'f(y) \leq tp(x + t'x_0) + t'p(y - tx_0).\ \text{Or,}$$

$$tf(x)+t'f(y) = f(tx+t'y) \leq p(tx+t'y) \leq p(tx+tt'x_0)+p(t'y-tt'x_0) = tp(x+t'x_0)+t'p(y-tx_0).$$

◦

Démonstration du théorème 1.1. On considère $p(x) = ||g||_{G'}||x||$. On vérifie que p satisfait les hypothèses du théorème 1.2. Donc en appliquant le théorème 1.2, on construit f prolongeant g avec $\forall x,\ f(x) \leq ||g||_{G'}||x||$. Donc, $||f||_{E'} \leq ||g||_{G'}$. ◦

Corollaire 1.1 *(application de "dualité"). Si E est un espace vectoriel normé, il existe pour tout $x \in E$ une forme linéaire $f \in E'$ telle que $||f_0|| = ||x_0||$ et $f(x_0) = ||x_0||^2$.*

Démonstration Prendre $G = \mathbb{R}x$, $g(tx) = t||x||^2$, de sorte que $||g||_{G'} = ||x||$. ○

Exercice 1.1 *Montrer le corollaire précédent directement quand E est de dimension finie et euclidien. Regarder également le cas $E = \mathbb{R}^N$ muni de la norme $||x||_p = (|x_1|^p + ... + |x_N|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Corollaire 1.2 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors*

$$||x|| = \sup_{f \in E',\, ||f|| \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in E',\, ||f|| \leq 1} |f(x)|.$$

Démonstration En effet, l'inégalité ($||x|| \geq f(x)$ si $||f|| \leq 1$) est immédiate et l'égalité est obtenue grâce à l'application de dualité (corollaire 1.1). ○

Définition 1.3 *Un hyperplan affine est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1 *L'hyperplan d'équation $f = \alpha$ est fermé si et seulement f est continue.*

Démonstration Si f est continue, alors $H = f^{-1}(\alpha)$ est un fermé. Réciproquement, supposons H fermé. Soit $x_0 \in H^c$. Supposons pour fixer les idées que $f(x_0) < \alpha$. Alors, puisque H^c est ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B(x_0, r) = \{x \in E, ||x - x_0|| < r\} \subset H^c$, et on va en déduire que

$$\forall x \in B(x_0, r),\ f(x) < \alpha.$$

En effet, si on avait un point x_1 de la boule où $f(x_1) \geq \alpha$, on trouverait par interpolation, f étant linéaire, un point x du segment $[x_0, x_1]$ où $f(x) = \alpha$, en contradiction avec $B(x_0, r) \subset H^c$. Finalement, $\forall x \in B(x_0, r),\ f(x) < \alpha$ et donc

$$\forall z \in B(0,1),\ f(x_0) + rf(z) < \alpha, \text{ soit}$$

$$\forall z \in B(0,1),\ f(z) \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{r}.$$

Cela entraîne $||f|| \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$, et donc que f est continue. ○

Définition 1.4 *Soit E un espace vectoriel normé et $A, B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $f(x) = \alpha$ sépare A et B au sens large si*

$$f(x) \leq \alpha,\ \forall x \in A \quad \textit{et} \quad f(x) \geq \alpha, \forall x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ f(x) \leq \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in A \quad \textit{et} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \forall x \in B.$$

Théorème 1.3 de Hahn-Banach (version géométrique) *Soit E un espace vectoriel normé et $A, B \subset E$ deux ensembles convexes non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

Lemme 1.2 *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert, avec $0 \in C$. Pour tout $x \in E$, on pose $p(x) = \inf\{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\}$. On dit que p est la jauge de C. Alors p vérifie $\forall \lambda > 0,\ p(\lambda x) = \lambda x$, l'inégalité triangulaire $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ et*
(i) $\exists M, 0 \leq p(x) \leq M||x||, \forall x \in E$.
(ii) $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.

Démonstration On a immédiatement $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. Montrons l'inégalité triangulaire $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour x et y dans E. Elle découle de la convexité de C. On a évidemment $\tilde{x} = \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ et $\tilde{y} = \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Puisque C est convexe, on a donc $\frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\tilde{x} + \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\tilde{y} \in C$, c'est-à-dire

$$z = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C.$$

Mais $z \in C \Rightarrow p(z) \leq 1$. Donc

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.
Montrons maintenant (i). Comme C est ouvert et $0 \in C$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Donc $\forall x \neq 0$, $r\frac{x}{||x||} \in C$ et donc $p(x) \leq \frac{||x||}{r}$. Terminons en montrant (ii), $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$. Si $x \in C$, comme C est ouvert, $\exists \varepsilon,\ (1+\varepsilon)x \in C$. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement, si $p(x) < 1$, $\exists \alpha,\ 0 \leq p(x) < \alpha < 1$, et donc $\frac{x}{\alpha} \in C$. Comme C est convexe et que x appartient au segment $[0, \alpha x]$ il est aussi dans C.

$\circ$

Exercice 1.2 *Montrer la réciproque du théorème précédent : si $p : E \to \mathbb{R}^+$ est une application vérifiant $p(\lambda x) = \lambda x$, $\lambda > 0$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, la relation (i), $\exists M, 0 \leq p(x) \leq M||x||$, alors $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$ est un convexe ouvert contenant 0 dont p est la jauge.*

Lemme 1.3 *Soit E un espace vectoriel normé , $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et $x_0 \in E$, $x_0 \notin C$. Alors $\exists f \in E'$, $f(x) < f(x_0), \forall x \in C$. En particulier, l'hyperplan $\{x, f(x) = f(x_0)\}$ sépare x_0 et C au sens large.*

Démonstration On peut toujours se ramener au cas où $0 \in C$ et introduire la jauge p de C. On considère $G = \mathbb{R}x_0$, et $g :\ \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ définie par $tx_0 \to t$, de sorte que $g(x_0) = 1$. Comme $x_0 \notin C$, on a $g(x) \leq p(x), \forall x \in G$. En effet, $x_0 \notin C \Leftrightarrow p(x_0) \geq 1$ et si $t \geq 0$, $g(tx_0) - p(tx_0) = t(1 - p(x_0)) \leq 0$. Si $t < 0$, $g(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. On applique le théorème de Hahn-Banach à g. Il existe f linéaire sur E qui prolonge g, telle que $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$. En particulier, $f(x_0) = 1$ et f est continue car $f(x) \leq p(x) \leq M||x||$, C étant ouvert (Lemme 1.2(i)). Finalement, $f(x) \leq p(x) < 1$ pour tout x dans C en vertu du Lemme 1.2-(ii).

Démonstration du théorème 1.3 On pose $C = A - B$ qui est un convexe ouvert car $A - B = \bigcup_{y \in B}(A - y)$ est une union d'ouverts. Comme $0 \notin C$, car $A \cap B = \emptyset$, on utilise le lemme 1.3 pour séparer C et 0. Donc

$$\exists f \in E',\ f(z) < 0, \forall z \in C,\ \text{soit}$$

$$f(x) < f(y), \forall x \in A, y \in B.$$

On choisit $\alpha \in [\sup_{x \in A} f(x), \inf_{x \in B} f(x)] \neq \emptyset$ et $H = \{x, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B. ◦

Théorème 1.4 de Hahn-Banach, version fermé-compact. *Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$, $B \subset E$, deux sous-ensembles convexes non vides, disjoints. On suppose que A est fermé, B est compact. Alors il existe un hyperplan H fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Démonstration Posons $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$, $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$. On commence par montrer que $\exists \varepsilon, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. En effet, dans le cas contraire, on peut trouver pour tout ε un élément z_ε tel que $\exists x_\varepsilon \in A, ||z_\varepsilon - x_\varepsilon|| \leq \varepsilon$ et $\exists y_\varepsilon \in B$, $||z_\varepsilon - y_\varepsilon|| \leq \varepsilon$. Comme B est compact, une sous-suite $y_{\varepsilon'}$ de y_ε tend vers $y \in B$. La sous-suite correspondante $x_{\varepsilon'}$ tend aussi vers y, et comme A est supposé fermé, on a $y \in A \cap B$, en contradiction avec l'hypothèse que A et B sont disjoints. On applique le théorème 1.3 à A_ε et B_ε. Il existe donc un hyperplan $\{x, f(x) = \alpha\}$ qui sépare A_ε et B_ε :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \forall z, z' \in B(0, \varepsilon),\ f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z').$$

D'où ,

$$f(x) + \varepsilon ||f|| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon ||f||$$

et A et B sont bien séparés au sens strict. ◦

Exercice 1.3 *En dimension finie, montrer par un argument constructif le théorème de Hahn-Banach, version fermé-compact : on montrera qu'il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $||x - y|| = d(A, B)$ et considérera l'hyperplan orthogonal à $[x, y]$ passant par $\frac{x+y}{2}$.*

Lemme 1.4 *Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual et L un sous-espace vectoriel de E. Alors L est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à zéro. En d'autres termes, L est dense si et seulement si*

$$\forall f \in E',\ (\forall x \in L,\ f(x) = 0) \Rightarrow f = 0). \tag{1.1}$$

Démonstration En effet, si L est dense et si $\forall x \in L$, $f(x) = 0$, on déduit par continuité de f que $\forall x \in E, f(x) = 0$ et donc $f = 0$. Réciproquement, supposons que la relation (1.1) soit satisfaite. Supposons par contradiction que L ne soit pas dense. Sa fermeture est alors un sous-espace vectoriel strict de E. Montrons qu'il est contenu dans un hyperplan fermé de E. On prend $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{L}$. On applique le théorème de Hahn-Banach (version fermé-compact) avec $A = \overline{L}$, $B = \{x_0\}$. Donc il existe $f \in E'$, $f \neq 0$,

$$\forall x \in \overline{L},\ f(x) < \alpha < f(x_0).$$

D'où nécessairement $f(x) = 0$ pour tout x dans L, puisque $\lambda f(x) < \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $f \in E'$ tel que $\forall x \in L,\ f(x) = 0$ avec $f \neq 0$. Ceci contredit (1.1). $\circ$

Chapter 2

Le Théorème de Banach-Steinhaus

Lemme 2.1 de Baire. *Soit X un espace métrique complet. Soit X_n une suite de fermés. On suppose que* Intérieur$X_n = \emptyset$. *Alors*

$$\text{Intérieur}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset.$$

En d'autres termes, "une union dénombrable *de fermés d'intérieurs vides reste d'intérieur vide". De manière équivalente, "une intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense".*

Remarque 2.1 Enoncé à relier au suivant : une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

Démonstration Nous allons montrer la deuxième forme. Soit O_n une suite d'ouverts denses et $G = \bigcap_n O_n$. Montrons que G rencontre un ouvert arbitraire O. Pour cela, on choisit une boule fermée

$$B_0 = B(x_0, r_0) = \{x, d(x, x_0) \leq r_0\} \subset O.$$

Comme O_1 est dense, on peut choisir $x_1 \in B_0$ et r_1 tels que

$$B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \text{ et } r_1 \leq \frac{r_0}{2}.$$

On construit de même par récurrence une suite $B(x_n, r_n)$ telle que

$$B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \text{ et } r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}.$$

La suite x_n est de Cauchy car $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{r_0}{2^n}$. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Alors $x \in O \cap \bigcap_n O_n$. $\circ$

Remarque : le théorème précédent est valable dans tout espace métrique complet. La structure d'espace vectoriel n'intervient pas. Soient maintenant E, F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel normé des opérateurs linéaires continus de E dans F, muni de la norme

$$||T||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, ||x||\leq 1} ||T(x)||.$$

On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Théorème 2.1 de Banach-Steinhaus. *Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E,F)$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\forall x \in E, \ \sup_{i\in I} ||T_i x|| < \infty.$$

Alors,

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty,$$

c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall i \in I, \ \forall x \in E, \ ||T_i x|| \leq c||x||.$$

Démonstration Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \{x \in E, \ \forall i, \ ||T_i x|| \leq n\}$, en sorte que chaque X_n est une intersection de fermés et est donc fermé. Par hypothèse, $\bigcup_n X_n = E$ et donc Intérieur$(\bigcup_n X_n) \neq \emptyset$. Par le lemme de Baire 2.1, l'un des X_n doit être d'intérieur non vide : Intérieur$(X_{n_0}) \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in X_{n_0}$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Alors

$$\forall i \in I, \ \forall z \in B(0,1), \ ||T_i(x_0 + rz)|| \leq n_0,$$

et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\forall z \in B(0,1), \ r||T_i(z)|| \leq n_0 + ||T_i(x_0)|| \leq 2n_0, \text{ soit}$$

$$||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r}.$$

$\circ$

2.1 Conséquences du Théorème de Banach-Steinhaus.

Corollaire 2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F, tels que pour tout $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée Tx. Alors on a*

$$\sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty,$$

$$T \in \mathcal{L}(E,F),$$

$$||T||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim \inf_{n\to+\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Démonstration La première relation est une conséquence directe du théorème 2.1 (de Banach-Steinhaus). On a donc

$$\exists c > 0, \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ ||T_n x|| \leq c||x||.$$

On en déduit que $\forall x \in E, \ ||Tx|| \leq c||x||$, et donc $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Comme $||T_n x|| \leq ||T_n|| ||x||$, on obtient par passage à la limite inférieure, $||Tx|| \leq \liminf_{\to\infty} ||T_n|| ||x||$, ce qui donne bien la dernière relation annoncée. $\circ$

Corollaire 2.2 *Soit G un espace de Banach, B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G'$, $f(B) = \{f(x),\ x \in B\}$ est borné. Alors B est borné.*

Démonstration On applique le théorème de Banach-Steinhaus (Thm 2.1) avec $E = G'$, $F = \mathbb{R}$, $I = B$. Pour $b \in B$ et $f \in E = G'$, on pose $T_b(f) = f(b)$. On a donc par hypothèse

$$\forall f \in E,\ \sup_{b \in B} |T_b(f)| < +\infty.$$

On en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall b \in B,\ \forall f \in E,\ ||T_b(f)|| \leq c||f||_{G'},\ \text{soit}$$

$$\forall f \in G', |f(b)| \leq c||f||_{G'}.$$

Comme par le corollaire 1.2, on a $||b|| = \sup_{f \in G', ||f|| \leq 1} f(b)$, on conclut que $||b|| \leq c$. B est donc borné. $\circ$

Ce théorème nous dit qu'un ensemble est borné si et seulement si ses projections sur des axes de coordonnées arbitraires sont bornées.

2.2 Exercices

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé
a) Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
b) Soit $u : E \to F$ linéaire, montrer que u est continue.

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés
a) Montrer que F complet $\Rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ complet (donc E' est toujours complet).
b) Montrer que $\overline{B}_E(0, 1)$ compacte $\Rightarrow \dim E < \infty$.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E'$, $f \not\equiv 0$. Soit $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$, on se propose de montrer que

$$\forall x \in E, \qquad d(x, H) = \inf_{y \in H} \|x - y\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \qquad (\star)$$

1) Vérifier que $|f(x)| \leq \|f\|\ d(x, H),\ \ \forall x \in E.$
2) Soit $u \in E \backslash H$, en notant que $y = x - \frac{f(x)}{f(u)} u$ est dans H, montrer que $d(x, H) \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|} \|u\|$ et

prouver ($\star$).
3) Soit $E = \mathcal{C}_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\star}$ tel que $x_n \to 0\}$ que l'on munit de

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

a) Vérifier que $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach.
b) Soient $f : E \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n}$ et $H = Ker f$. Vérifier que $f \in E'$, donner une expression de $d(x, H)$. $\|f\|_{E'}$ est-elle atteinte ?

Exercice 4 Théorèmes du point fixe

1) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne avec k<1. Montrer que f admet un unique point fixe $x = f(x)$.
2) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit Λ un espace topologique. Soit $f : E \times \Lambda \to E$ telle que
- $\forall x \in E, \quad \lambda \to f(x, \lambda)$ est continue de Λ dans E,
- $\exists k < 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad x \to f(x, \lambda)$ est k-lipschitzienne de E dans E. On pose $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$. Si a_λ est l'unique point fixe de f_λ, montrer que $\lambda \to a_\lambda$ est continue de Λ dans E.
3) Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.
4) Soit C un convexe compact dans E espace vectoriel normé et soit $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe (pour z fixé dans C, considérer $f_n(x) = \frac{1}{n+1} z + \frac{n}{n+1} f(x)$).

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.
a) Vérifier que N est une norme sur E.
b) Montrer que $\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$.
c) Montrer que $\| \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 6

Soit E un espace métrique complet tel que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ε, montrer que E est compact.

Exercice 7

Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé et soit K une partie convexe de E avec $0 \in K$. On pose

$$K^\star = \{f \in E';\ \forall x \in K, \quad < f, x > \leq 1\} \text{ et}$$

$$K^{\star\star} = \{y \in E;\ \forall f \in K^\star,\ < f, y > \leq 1\}.$$

Montrer que $\overline{K} = K^{\star\star}$.

Exercice 9

L'objet de cet exercice est de montrer qu'en dimension ∞, on ne peut pas séparer deux convexes fermés.
On note $\ell^1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty\}$ qui muni de $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ est un espace de Banach.
On considère les ensembles

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{x = (x_n)_n \in \ell^1 :\ \forall n \geq 1,\ x_{2n} = 0\} \text{ et} \\ B & = & \{x = (x_n)_n \in \ell^1 :\ \forall n \geq 1,\ x_{2n} = 2^{-n}\, x_{2n-1}\}. \end{array}$$

1) Vérifier que A_0 et B sont des sous-espaces fermés de ℓ^1 et que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.
2) Soit $c = (c_n)_n \in \ell^1$ tel que $\forall n \geq 1$, $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Vérifier que $c \notin A_0 + B$ et que si $A = A_0 - c = \{a - c,\ a \in A_0\}$, on a $A \cap B = \emptyset$. Montrer que A et B ne peuvent pas être séparés au sens large.

Exercice 10 Théorème de l'application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective alors
1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $B(0, 2C) \subset \overline{T(B(0,1))}$. Pour cela utiliser les ensembles $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$.
2) Démontrer qu'en fait $B(0, C) \subset T(B(0,1))$.

Exercice 11 Théorème d'isomorphisme d'espaces de Banach

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective, montrer que T^{-1} est continue.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel normé muni de $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$. Si E est complet pour les deux normes et si $\|\ \|_1 \leq\ C \|\ \|_2$, montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 13 Théorème du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que le graphe de T, G(T)= $\{(x, y) \in E \times F,\quad y = Tx\}$, est fermé dans $E \times F$, montrer que T est continue.
(On pourra considérer la norme du graphe $\|x\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.)

Exercice 14

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\forall f \in F'$, $f \circ T \in E'$. Montrer que T est continue.

Exercice 15

Soit $E = \mathcal{C}[0,1]$ muni de $\| \|_\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\forall f \in F$, f est dérivable. L'objet de cet exercice est de montrer que $\dim F < \infty$.

1) Soit $x_0 \in [0,1]$ fixé. On définit l'opérateur $\Lambda_y : f \mapsto \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$. Montrer que $\Lambda_y \in E'$ et que $\exists M > 0$ tel que $\forall f \in F$, $|\Lambda(f)| \leq M\|f\|$.

2) Soit B_F la boule unité fermée de F, montrer que B_F est équicontinue puis que B_F est compacte. Conclure.

Chapter 3

Topologies faibles

Rappels de topologie générale : une *topologie* sur E est définie comme une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(E)$ stable par intersection finie et union quelconque et contenant E et $\emptyset$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de la topologie. On appelle *voisinage ouvert* de $x \in E$ tout ouvert $O \in \mathcal{O}$ contenant x. On appelle *base de voisinages ouverts* de la topologie toute partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ telle que si $x \in O \in \mathcal{O}$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset O$.
Conséquence : tout ouvert est une union de voisinages ouverts de la base. On appelle base de voisinages ouverts d'un point $x \in E$ toute partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ telle que si un ouvert O contient x, alors il existe U dans $\mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset O$.
Exemple classique : une topologie $\mathcal{O}$ sur E est dite métrisable s'il existe une distance sur E telle que $\mathcal{O}$ coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constituée par les boules ouvertes elles-mêmes. Les boules ouvertes centrées en x forment une base de voisinages ouverts de x et également les boules ouvertes contenant x. On appelle fermeture d'un ensemble A, notée $\overline{A}$, l'intersection de tous les fermés contenant A. On appelle ouverture, ou intérieur, de A l'union de tous les ouverts contenus dans A, noté Intérieur(A).
Convergence d'une suite. On dit qu'une suite x_n *tend vers* x pour la topologie $\mathcal{O}$ si pour tout voisinage O de x il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in O$.

Proposition 3.1 *Tout fermé F est séquentiellement fermé, c'est-à-dire que si $x_n \in F$, fermé, et si $x_n \to x$ pour la topologie, alors $x \in F$.*

Démonstration Si on avait $x \in F^c$, qui est ouvert, il existerait un voisinage ouvert U de x tel que $U \subset F^c$. Mais $x_n \to x$ implique que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$, ce qui contredirait $x_n \in F$. $\circ$

Application continue. Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *continue* si l'image réciproque de tout ouvert par l'application est un ouvert, ou de manière équivalente, si l'image réciproque de tout fermé est un fermé. Si on a une base de voisinages ouverts $\mathcal{U}$, on voit aisément que f est continue si et seulement si $f^{-1}(U)$ est un ouvert pour tout $U \in \mathcal{U}$.
Un exemple que nous utiliserons souvent : une application f de E dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(I)$ est un ouvert. En effet, les intervalles ouverts forment une base de voisinages ouverts de $\mathbb{R}$. Il convient de vérifier que notre

définition de la continuité généralise bien la notion de continuité séquentielle pour f (c'est-à-dire : $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.)

Proposition 3.2 *Si $f : (E, \mathcal{O}) \to (F, \mathcal{U})$ est continue, alors elle est séquentiellement continue.*

Démonstration Soit x_n tendant vers x pour $\mathcal{O}$. Fixons $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in U$ et montrons que $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U$. Or, f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Donc $\exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U)$ et on a donc, comme désiré, $f(x_n) \in U$.

$\circ$

Rappelons un résultat classique, qui n'est pas toujours vrai quand les topologies ne sont pas métrisables :

Exercice 3.1 *Si E et F sont métrisables, alors $f : E \to F$ est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue, c'est-à-dire si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.*

Les compacts On dit qu'un sous-ensemble K d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est compact si de tout recouvrement de K on peut extraire un recouvrement fini. Si la topologie E est métrisable, tout compact est séquentiellement compact, c'est-à-dire que K est compact si et seulement si toute suite x_n contenue dans K a un point d'accumulation. L'image d'un compact par une fonction continue est un compact. En conséquence, toute fonction réelle continue sur un compact atteint son maximum et son minimum.
Topologie produit Soit $(E_i, \mathcal{O}_i)$ des espaces topologiques. L'espace topologique produit $E = \Pi_i E_i$ peut être muni de la *topologie produit*, définie comme la moins fine rendant les projections de E sur chaque E_i continues.
Par *topologie la moins fine rendant des applications continues*, on entend la topologie ayant cette propriété qui a le moins d'ouverts possible. En termes formels, cette topologie $\mathcal{U}$ est telle que pour toute autre topologie $\mathcal{O}$ rendant également ces applications continues on ait $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$. On la trouve en prenant tout simplement l'intersection de toutes les topologies rendant les applications continues : c'est encore une topologie, le vérifier !

Théorème 3.1 de Tikhonov *Soit $K = \Pi_i K_i$ un produit de compacts. On note ses éléments $\omega = (\omega_i)_i$ et on le munit de la topologie produit, c'est-à-dire la moins fine rendant les projections $\omega \to w_i \in K_i$ continues. Alors K est compact.*

Exercice 3.1 Montrer ce théorème dans le cas un peu moins général suivant : $K = \Pi_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (produit dénombrable) et on suppose que K_n est métrisable et donc muni d'une distance d_n. Commencer par montrer que K est métrisable en posant

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n diam(K_n)},$$

où $diam(K_n) = \max\{d(x_n, y_n), x_n, y_n \in K_n\}$ est le diamètre de K_n et $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$.

3.1 Topologie faible

On note E un espace de Banach, E' son dual et $f \in E'$.

Définition 3.1 *On appelle topologie faible $\sigma(E, E')$ la topologie sur E la moins fine rendant toutes les applications $f: x \to f(x) \in \mathbb{R}$ continues.*

On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir à la topologie faible $\sigma(E, E')$ de la manière suivante : si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert, il faut que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\sigma(E, E')$. Mais comme les intervalles sont une base de voisinages de $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient à dire que pour tout intervalle I et tout $f \in E'$, $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E, E')$. En résumé, on vient de montrer que :

Proposition 3.3 *La topologie $\sigma(E, E')$ est la moins fine contenant tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in E'$ et tout intervalle I de $\mathbb{R}$.*

Proposition 3.4 *Tout ouvert O de $\sigma(E, E')$ peut s'écrire sous la forme*

$$O = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{f \in F_i} f^{-1}(I_f), \tag{3.1}$$

où I est un ensemble d'indices quelconque, chaque F_i un sous-ensemble fini de E' et I_f un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Démonstration Tout élément O de la forme (3.1) est bien un ouvert de $\sigma(E, E')$, puisqu'il est obtenu par intersection finie et union dénombrable d'éléments de $\sigma(E, E')$. Appelons $\mathcal{O}$ l'ensemble des éléments de la forme (3.1). Cet ensemble est évidemment stable par union quelconque. Il l'est aussi par intersection finie en vertu de la formule de distribution

$$\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcap_{i \in F} A_{\varphi(i)},$$

où Φ est l'ensemble de toutes les applications $i \in F \to \varphi(i) \in J_i$. Cette dernière formule prouve que si $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles, alors "toute intersection finie d'unions d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ est une union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$". $\circ$

Donnons une base de voisinages commode pour $\sigma(E, E')$.

Corollaire 3.1 *Les ouverts de la forme $\bigcap_{i=1,\ldots,k} f_i^{-1}(I_i)$, où $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$ et I_i sont des intervalles ouverts quelconques de $\mathbb{R}$, forment une base de voisinages de $\sigma(E, E')$.*
Les ouverts de la forme $U = \bigcap_{i=1,\ldots,k} f_i^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$, $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$, $\varepsilon > 0$ forment une base de voisinages de $x \in E$.

Démonstration Le premier énoncé est immédiat. Pour montrer que les ouverts de la forme U forment une base de voisinages de x, on remarque que si I est un intervalle ouvert et $f^{-1}(I)$ contient x, alors I contient un intervalle $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Donc $f^{-1}(I)$ contient $f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$. $\circ$

Proposition 3.5 *La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée, c'est-à-dire que si $x, y \in E$, alors il existe deux ouverts $U \ni x$, $V \ni y$, tels que $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration Appliquer Hahn-Banach, version compact-fermé: il existe $f \in E'$ et α tels que l'hyperplan $\{z,\ f(z) = \alpha\}$ sépare au sens strict x et y et donc on peut prendre $U = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et $V = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$. ◦

Définition 3.2 *Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, on dit que x_n converge faiblement vers x dans E et on note $x_n \rightharpoonup x$, $\sigma(E, E')$.*

Proposition 3.6 *Soit E un espace de Banach. Soit (x_n) une suite de E. Alors*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ si et seulement si $\forall f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$.

(ii) Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$, alors $||x_n||$ est bornée et $||x|| \leq \liminf_{n \to +\infty} ||x_n||$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Démonstration Montrons l'équivalence (i). La topologie $\sigma(E, E')$ ayant été construite pour que les éléments de E' soient continus, l'implication directe ($\Rightarrow$) est claire, puisque la continuité des $f \in E'$ entraine leur continuité séquentielle. La réciproque découle de la forme des voisinages dans la topologie faible. On doit montrer que si $f(x_n) \to f(x)$ pour tout f, alors pour tout U voisinage de x pour $\sigma(E, E')$, il existe n_0 tel $n \geq n_0$ implique $x_n \in U$. Or on a vu (Corollaire 3.1) qu'on peut choisir des voisinages U de x de la forme $U = \bigcap_{i=1,\dots,k} f_i^{-1}(]f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon[)$. On choisit n_0 assez grand pour que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$. Alors $x_n \in U$. On a donc bien $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$.

La relation (ii) résulte de $|f(x_n) - f(x)| \leq ||f|| ||x - x_n||$. Pour montrer (iii), on considère les x_n comme des formes linéaires sur E' et on applique le théorème de Banach-Steinhaus (Théorème 2.1). Les opérateurs continus de E' dans $\mathbb{R}$ définis par $T_n(f) = f(x_n)$ vérifient $\forall f \in E'$, $\sup_n |T_n(f)| < +\infty$, car $T_n(f) = f(x_n)$ a une limite, $f(x)$. Donc $\sup_n ||T_n|| \leq C < +\infty$. Mais, (corollaire 1.2), $||x|| = \sup_{f \in E'} f(x))$ et donc

$$||T_n|| = \sup_{||f||_{E'} \leq 1} f(x_n) = ||x_n||.$$

La suite x_n est donc bornée. On a

$$\forall f \in E',\ ||f||_{E'} \leq 1,\ |f(x)| = \lim |f(x_n)| \leq \liminf_n ||x_n||, \text{ et donc}$$

$$\forall f \in E',\ |f(x)| \leq \liminf_n ||x_n||, \text{ soit } ||x|| \leq \liminf_n ||x_n||.$$

On termine en montrant (iv) par la simple inégalité

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq ||f_n - f|| ||x_n|| + |f(x_n - x)|.$$

◦

Proposition 3.7 *Si la dimension de E est finie, la topologie faible et la topologie forte coïncident.*

Remarque 3.1 *En dimension infinie, les ouverts faibles sont des ouverts forts, mais il y a plus d'ouverts forts que d'ouverts faibles. De même, tous les fermés faibles sont des fermés forts, mais il y a plus de fermés forts que de fermés faibles.*

Exemple 3.1 *La boule unité $B(0,1) = \{x, ||x|| < 1\}$ est un ouvert de la topologie forte mais n'est pas un ouvert de la topologie faible. (Et donc son complémentaire est un fermé de la topologie forte, mais pas de la topologie faible).*

Démonstration En effet, tous les ouverts de la topologie faible contiennent des ensembles de la forme $U = \bigcap_{i=1,...,k} f_i^{-1}(]f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon[)$. Montrons que de tels ensembles sont non bornés. On choisit, dans E, $y \neq 0$ tel que $f_i(y) = 0, i = 1, ..., k$. Comme E est de dimension infinie et donc supérieure à k, c'est possible. On remarque que $x + ty \in U$ pour tout $t > 0$. Mais $||x+ty|| \geq |t|||y|| - ||x||$ tend vers l'infini quand $t \to +\infty$. Donc U n'est pas inclus dans la boule unité, qui n'est donc pas ouverte pour la topologie faible. ○

Exercice 3.2 Montrer que la fermeture de $S(0,1) = \{x, ||x|| = 1\}$ pour la topologie faible est $B(0,1) = \{x, ||x|| \leq 1\}$.

Théorème 3.2 *Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ convexe. Alors, C est faiblement fermé pour la topologie faible si et seulement si il est fortement fermé.*

Démonstration Si C est faiblement fermé, il est fortement fermé puisque la convergence forte implique la convergence faible. Réciproquement, supposons C fortement fermé et montrons qu'il est faiblement fermé. Il suffit de montrer que C est une intersection de fermés pour la topologie faible. Mais par le théorème de Hahn-Banach (version compact-fermé, théorème 1.4), il existe pour tout $y \in C^c$ un hyperplan $\{x, f_y(x) = \alpha_y\}$ séparant x et C, c'est-à-dire $f_y(y) > \alpha_y$ et $f_y(x) \leq \alpha_y$ pour tout x dans C. On en déduit que

$$C = \bigcap_{y \in C^c} f_y^{-1}(] - \infty, \alpha_y],$$

qui est une intersection de fermés faibles.

○

Corollaire 3.2 (Théorème de Mazur) *Soit E un espace vectoriel normé. Si $x_n \to x$, $\sigma(E, E')$, il existe une suite y_n de combinaisons convexes des x_k, $k \geq n$, qui converge fortement vers x.*

Démonstration On considère $C_k = \overline{Conv\{x_k,\ k \geq n\}}^{\sigma(E,E')}$, la fermeture pour la topologie faible de l'enveloppe convexe des x_k, $k \geq n$. D'après le théorème 3.2, C_k est aussi fermé pour la topologie forte. Puisque $x_n \rightharpoonup x$, on a donc aussi

$$x \in C_k = \overline{Conv\{x_k,\ k \geq n\}},$$

où la fermeture s'entend pour la topologie forte. Il existe donc, pour tout n, $y_n \in Conv\{x_k,\ k \geq n\}$ tel que $||y_n - x|| \leq \frac{1}{n}$. ◦

Définition 3.3 *On dit qu'une fonction φ définie sur un espace topologique est semicontinue inférieurement si les ensembles de niveau inférieurs, $\{x, \varphi(x) \leq \lambda\}$ sont fermés pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit de même que φ est semi continue supérieurement (s.c.s.) si les ensembles de niveau supérieurs, $\{x, \varphi(x) \geq \lambda\}$ sont tous fermés.*

Proposition 3.8 *Si φ est s.c.i., et si x_n est une suite convergeant vers x, on a*

$$\varphi(x) \leq \lim \inf_{n\to\infty} \varphi(x_n). \tag{3.2}$$

Si φ est s.c.s.,

$$\varphi(x) \geq \lim \sup_{n\to\infty} \varphi(x_n). \tag{3.3}$$

Démonstration Si φ est s.c.i., soit $m = \lim\inf_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. Par définition de la limite inférieure, on peut trouver pour tout voisinage $V(x)$ un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(x_n) \leq m+\varepsilon$. L'ensemble de niveau $\{y,\ \varphi(y) \leq m + \varepsilon\}$ étant fermé, on en déduit que $\varphi(x) \leq m + \varepsilon$. Mais ε est arbitrairement petit et on obtient (3.2). La relation (3.3) peut s'obtenir en remarquant que φ est s.c.i. si et seulement si $-\varphi$ est s.c.s.. ◦

Corollaire 3.3 *Soit $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$, convexe, semicontinue inférieurement (s.c.i.) pour la topologie forte. Alors φ est aussi s.c.i. pour la topologie faible et donc si $x_n \rightharpoonup x$, $\sigma(E, E')$, alors*

$$\varphi(x) \leq \lim \inf_{n\to+\infty} \varphi(x_n).$$

Démonstration Il suffit de vérifier que chaque ensemble

$$X_\lambda\varphi = \{x \in E,\ \varphi(x) \leq \lambda\}$$

est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Or, par le théorème 3.2, c'est un convexe fermé fort. ◦

3.2 La topologie $\star\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach, E' son dual, E'' son bidual topologique, muni de la norme

$$||\xi||_{E''} = \sup_{f\in E', ||f||_{E'}\leq 1} \xi(f).$$

On a une *injection canonique* $J: E \to E''$. En effet, tout élément $x \in E$ définit un élément $Jx \in E''$ par $Jx(f) = f(x)$. Jx est bien une forme linéaire continue sur E', puisque $|Jx(f)| = |f(x)| \leq ||x||_E ||f||_{E'}$. En fait, $||Jx||_{E''} = ||x||_E$ car, grâce au Corollaire 1.2,

$$||Jx|| = \sup_{||f|| \leq 1} |Jx(f)| = \sup_{||f|| \leq 1} |f(x)| = ||x||.$$

On a donc $JE \subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 3.4 *La topologie $\star\sigma(E', E)$ est la moins fine rendant continues les formes linéaires $f \to f(x)$, pour tout $x \in E$.*

Cette topologie est donc *a priori* moins fine que $\sigma(E', E'')$.

Proposition 3.9 *On a la base de voisinages en $f_0 \in E'$ pour la topologie faible-$\star$:*

$$U = \{f \in E',\ |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon\},\ i = 1, ..., n,\ x_i \in E,\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3.10 *Soit E un espace de Banach. Si (f_n) est une suite de E',*
(i) $(f_n \rightharpoonup f, \star\sigma(E', E)) \Leftrightarrow (\forall x \in E\ f_n(x) \to f(x))$.
(ii) Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$, $\star\sigma(E', E)$.
(iii) Si $f_n \rightharpoonup f$, $\star\sigma(E', E)$, alors $||f_n||$ est bornée et

$$||f|| \leq \lim \inf_{n \to +\infty} ||f_n||.$$

(iv) Si $f_n \rightharpoonup f$, $\star\sigma(E', E)$, si $x_n \to x$ fortement, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Démonstration Pour (i), (i), (iv), les mêmes que pour la proposition 3.6. ◦

Proposition 3.11 *La topologie $\sigma(E', E)$ est séparée.*

Démonstration En effet, si deux formes linéaires f et g sur E sont distinctes, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq g(x)$. ◦

Théorème 3.3 *(Banach-Alaoglu-Bourbaki).l L'ensemble $\overline{B_{E'}} = \{f \in E',\ ||f|| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\star\sigma(E', E)$.*

Démonstration On plonge E' dans $Y = \mathbb{R}^E$, l'espace des applications de E dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les projections $Y \to \mathbb{R}$, $\omega = (\omega_x)_{x \in E} \to E$. En clair, la topologie sur $Y = \mathbb{R}^E$ est la topologie de la convergence simple. On appelle le plongement $\Phi : (E', \sigma(E', E)) \to Y$, $f \to (f(x))_{x \in E} \in Y$. L'application Φ est continue et injective et d'inverse continue sur son image. On peut le vérifier en regardant les images et images réciproques des ouverts, mais on peut aussi simplement remarquer que les topologies sur Y et sur E', $\star\sigma(E', E)$ sont la même, puisque la topologie $\star\sigma(E, E')$ n'est autre que la topologie de la convergence simple (restreinte aux formes linéaires sur E). Montrons que l'image K de $\overline{B_{E'}}$ par Φ est un compact. On a

$$K = \{\omega \in Y,\ \forall x \in E,\ |\omega_x| \leq ||x||,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x\}.$$

On écrit $K = K_1 \cap K_2$, avec

$$K_1 = \{\omega \in Y,\ \forall x \in E, |\omega_x| \leq ||x||\} \text{ et}$$

$$K_2 = \{\omega \in Y,\ \forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x.\}$$

On voit que $K_1 = \Pi_{x \in E}[-||x||, ||x||]$ est compact et que K_2 est fermé. Donc K est compact et donc $\overline{B_{E'}}$ aussi. $\circ$

Remarque 3.2 Le théorème précédent n'est réellement utilisable que si la boule unité $\overline{B_{E'}}$ est métrisable. On verra plus loin que c'est le cas quand E est séparable.

3.3 Exercices

Rappels

Soit E un espace topologique. On appelle voisinage de $x \in E$, tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Conséquences :
1) Un ouvert est voisinage de chacun de ses points.
2) Un ensemble voisinage de chacun de ses points est ouvert. En effet, si $x \in A$ voisinage de chacun de ses points, alors $\exists W_x$ ouvert tel que $x \in W_x \subset A$. Par suite $A = \bigcup_{x \in A} W_x$ donc est ouvert.
3) Les ouverts sont connus dés que sont connus pour tout x les voisinages de x.
Définition : On dit qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de $\mathcal{V}(x)$ si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset V$.
Donc connaissant $\mathcal{B}$, on obtient les éléments de $\mathcal{V}(x)$ comme sur-ensembles quelconques des éléments de $\mathcal{B}$.

Introduction Définition de la topologie faible

Dans tout ce qui suit E désignera un espace de Banach. Pour $f \in E'$, on définit $p_f(x) = |f(x)|$, c'est bien une semi-norme sur E. On note $\mathcal{P} = (p_f)_{f \in E'}$. Soit $p \in \mathcal{P}$, on appelle p-boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r l'ensemble $B(x, r)$ des points $y \in E$ tels que $p(x - y) < r$. Enfin on appelle $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre x toute intersection finie de p_i-boules ouvertes.
Définition : Une partie U de E est ouverte si ou bien $U = \emptyset$, ou bien $\forall x \in U$, il existe une $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre x contenue dans U. On peut vérifier facilement que l'on définit bien ainsi une topologie sur E.
On note $(E, \mathcal{P})$ l'espace E muni de cette topologie. La topologie (E,$\mathcal{P}$) s'appelle la topologie faible sur E (par "opposition" à la topologie de la norme qui est dite topologie forte). Elle est souvent notée $\sigma(E, E')$ ou bien E_w (w=weak) dans la littérature.

Pour simplifier les notations, on pose $E' = (f_i)_{i\in I}$ et on notera P.F.I l'ensemble des parties finies de I. Par définition de la topologie associée à une famille de semi-normes, les ensembles $V(x, J, \varepsilon) = \{y \in E, | < f_i, x - y > | < \varepsilon, \forall i \in J\}$ où $J \in P.F.I$ et $\varepsilon > 0$ constituent une base de voisinages (ouverts) de x dans E.

Exercice 1

1) Vérifier que la topologie faible est séparée.
2) Montrer qu'un ouvert faible est un ouvert fort.
3) Montrer que $E' = (E_w)'$. En particulier les ensembles $\{x \in E, < f, x >< \alpha\}$ où $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont des ouverts faibles.
4) Montrer que si $\dim E < \infty$, $\sigma(E, E')$ est équivalente à $(E, \| \|)$ (pour cela montrer que toute boule $B(x, r)$ contient un $V(x, J, \varepsilon)$).

Exercice 2

On suppose $\dim E = +\infty$. On se propose de montrer que la topologie faible n'est pas métrisable. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une distance d sur E dont la topologie est équivalente à $\sigma(E, E')$.
1) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E' telle que
$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \exists I_k \in P.F.\mathbb{N}^\star, \quad \exists \varepsilon_k > 0$ tels que

$$\bigcap_{i\in I_k} \{x \in E : | < f_i, x > | < \varepsilon_k\} \subset B_d(0, \frac{1}{k}),$$

où $B_d(0, \frac{1}{k}) = \{x \in E : d(0, x) < \frac{1}{k}\}$.
2) Soient $g \in E'$ et $V = \{x \in E : \ | < g, x > | < 1\}$. Montrer que $\exists I \in P.F.\mathbb{N}^\star$ tel que

$$\bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset V, \text{ puis que } \bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset \ker g.$$

On note $I = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$.
3) On considère

$$\begin{array}{rcl} F : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k+1} \\ x & \longmapsto & (g(x), f_{n_1}(x), ..., f_{n_k}(x)). \end{array}$$

Séparer ImF de (1,0,...,0) dans $\mathbb{R}^{k+1}$. En déduire que $\exists (\lambda_i)_i \in \mathbb{R}^k$ tel que $g = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_{n_i}$.
4) Soit $F_n = \text{vect}\{f_1, ..., f_n\}$. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $E' = F_{n_0}$. (remarquer que $E' = \bigcup_n F_n$).
5) Conclure.

Exercice 3

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ linéaire.
1) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llcl} (1) & T : E & \longrightarrow & F \text{ continue.} \\ (2) & T : E_w & \longrightarrow & F_w \text{ continue.} \\ (3) & T : E & \longrightarrow & F_w \text{ continue.} \end{array}$$

2) Montrer que $T : E_w \longrightarrow F$ linéaire continue $\Longrightarrow \dim Im(T) < \infty$.

Exercice 4

On note $\ell^1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty\}$ que l 'on munit de $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, et $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup_n |x_n| < \infty\}$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.
On admettra que ℓ^1 et ℓ^∞ sont des espaces de Banach.
Enfin on note $e^n = (\delta_{ni})_{i\geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si i =n, $\delta_{ni} = 0$ sinon.
1) Pour $x = (x_n) \in \ell^1$ on note $x^N = \sum_{n=1}^N x_n e^n$. Vérifier que $\|x^N - x\|_1 \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$. (On écrira alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^n$.)
2) Soit $y \in \ell^\infty$ avec $y = (y_n)$. On considère

$$\begin{aligned} f : \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sum_{n\geq 1} x_n y_n, \end{aligned}$$

avec $x = (x_n)$. Montrer que $f \in (\ell^1)'$. On pose $\Lambda_y = f$ et on définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell^\infty &\longrightarrow (\ell^1)' \\ y &\mapsto \Lambda_y, \end{aligned}$$

où $< \Lambda_y, x >= \sum x_n y_n$, $\forall x \in \ell^1$.
a) Montrer que Λ est une isométrie.
b) Montrer que Λ est un isomorphisme.

Dans la suite on identifiera ℓ^∞ et $(\ell^1)'$ à l'aide de Λ, c'est à dire que si $y \in \ell^\infty$, on écrira $< y, x >= \sum_n x_n y_n$ $\forall x \in \ell^1$. De plus, $< y, e^i >=< e^i, y >= y_i$, $\forall i \geq 1$ et $\forall y \in \ell^1$ ou ℓ^∞.
3) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1, exprimer le fait que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 muni de la topologie faible.
4) On se propose de démontrer le théorème suivant :
Si $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 pour la topologie faible $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ alors $x^n \to 0$ pour la topologie forte i.e. $\|x^n\| \to 0$.
NB : C'est un cas TRES PATHOLOGIQUE.
Soit donc $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 faible.

a) Soit $K = \overline{B}_{\ell^\infty} = \{f \in \ell^\infty : \|f\|_\infty \leq 1\}$. On note

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n - g_n|}{2^n}.$$

Montrer que (K,d) est un espace métrique.

b)Montrer que $\forall r > 0$ et $\forall f \in K$,

$$\Omega = \{g \in K : d(f, g) < r\} = B_d(f, r) \cap K$$

est un voisinage de f dans K pour la topologie faible $\star$ $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$.

c) En déduire que (K,d) est un espace métrique compact.

d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On pose

$$F_k = \{f \in K : |< f, x^n >| \leq \varepsilon, \forall n \geq k\}.$$

Montrer que $\exists f^0 \in K$, $\exists \rho > 0$ et $\exists k_0$ tels que

$$f \in K \text{ et } d(f^0, f) < \rho \Longrightarrow f \in F_{k_0},$$

(appliquer le lemme de Baire).

e) Soit $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{1}{2^{N-1}} < \rho$, montrer que $\forall n \geq k_0$,

$$\|x^n\|_1 \leq \varepsilon + 2 \sum_{i=1}^{N} |x_i^n|,$$

(choisir $f = (f_1^0, f_2^0, ..., f_N^0, \pm 1, \pm 1, ..., \pm 1, ...)$ et utiliser le fait que $f \in F_{k_0}$.

f) Conclure.

5) On vient de démontrer que l'application, id : ℓ^1 faible $\to \ell^1$ fort, est séquentiellement continue. Est-elle continue ?

Chapter 4

Espaces réflexifs, espaces séparables

4.1 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach. Commençons par quelques remarques sur la dualité.

Proposition 4.1 *Si $E \subset F$, alors $F' \subset E'$ et $E'' \subset F''$. Si $M \subset E$ est un sous-espace fermé de E et si $M' = E'$, alors $M = E$.*

Démonstration Les deux premiers énoncés sont évidents, mais attention, les inclusions en question sont des plongements : en effet $F' \subset E'$ veut dire que les formes linéaires continues sur F peuvent être restreintes à E et apparaissent alors comme des formes linéaires continues sur E. Si $M' = E'$, l'orthogonal de M dans E' est $\{0\}$. Par le Lemme 1.4, M est dense dans E. Comme M est fermé, on a donc $M = E$. $\circ$

Soit $J : E \to E''$ l'injection canonique de E dans E'', définie par $Jx(f) = f(x)$ pour tout $x \in E$, $f \in E'$.

Définition 4.1 *E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Théorème 4.1 *(Kakutani). Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si $\overline{B_E} = \{x \in E,\ ||x|| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Démonstration très abrégée Si E est réflexif, on a $E = J^{-1}(E'')$ et, avec cette identification, $\sigma(E, E') = \sigma(E'', E')$ et $\overline{B_E} = \overline{B_{E''}}$. Comme cette dernière boule est compacte pour $\sigma(E'', E')$, on déduit que $\overline{B_E}$ est compacte pour $\sigma(E, E')$. Pour la réciproque, voir Brezis pages 44 et 45. $\circ$

Proposition 4.2 *Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé de E, espace de Banach, muni de la norme induite. Alors si E est réflexif, M est réflexif.*

Démonstration Montrons que la topologie $\sigma(M, M')$ est une restriction à M de la topologie $\sigma(E, E')$. Cela provient du fait que, par le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur M peut se prolonger en une forme linéaire continue sur E. Inversement, toute forme linéaire continue sur E est continue sur M. On applique le théorème de Kakutani : la boule $\overline{B_M} = \{x \in M \; ||x|| \leq 1\}$ est un fermé de $\overline{B_E}$ qui est un compact pour $\sigma(E, E')$. Donc c'est aussi un compact pour $\sigma(E, E')$. Donc, à nouveau par le théorème 4.1, M est réflexif. $\circ$

Proposition 4.3 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Démonstration Supposons que E soit réflexif. On sait que $\overline{B_{E'}}$ est compact pour la topologie $\sigma(E', E)$ (Théorème 3.3 de Alaoglu). Comme E est réflexif, on a $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$. Donc $\overline{B_{E'}}$ est aussi compact pour $\sigma(E', E'')$, ce qui implique par le théorème de Kakutani que E' est réflexif.

Réciproquement, Si E' est réflexif, alors par l'étape précédente, E'' est réflexif. Donc $J(E)$, qui est un sous-espace fermé (fort) de E'', est aussi réflexif par la proposition 4.2, et donc E est réflexif. $\circ$

Corollaire 4.1 *Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné d'un espace de Banach réflexif. Alors K est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Démonstration K est fermé dans $\sigma(E, E')$, et $K \subset \overline{B(0, M)}$ est compact dans $\sigma(E, E') = \sigma(E'', E')$. $\circ$

4.2 Espaces séparables

Un espace séparable est un espace métrique qui contient un sous-ensemble D dense et dénombrable.

Proposition 4.4 *Soit E un espace métrique séparable et F un sous-espace de E. Alors F est séparable.*

Démonstration Considérons $d(x_n, F)$, la distance de x_n à F. On choisit $y_n \in F$ tel que $d(y_n, x_n) \leq 2d(x_n, F)$. Montrons que y_n est dense dans F. Soit $y \in F$. Comme

$$d(x_n, y) \geq d(x_n, F) \geq \frac{1}{2} d(y_n, x_n),$$

on obtient $d(y, y_n) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_n) \leq 3d(x_n, y)$. Comme x_n est dense, on en déduit que $\liminf d(y, y_n) \leq 3 \liminf d(x_n, y) = 0$. $\circ$

Théorème 4.2 *Soit E un espace métrique tel que E' soit séparable. Alors E est séparable.*

Attention : la réciproque est fausse. On verra que $(L^1(\mathbb{R}))' = L^\infty(\mathbb{R})$, mais L^∞ n'est pas séparable.

Démonstration du théorème 4.2. Soit f_n une suite dénombrable de E' dense dans E'. A tout f_n, on associe $x_n \in E$ tel que

$$||x_n|| = 1 \text{ et } f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}||f_n||.$$

Ces x_n sont donc choisis pour être des éléments duaux approximatifs des f_n (voir le corollaire 1.2 sur l'application de dualité). On considère L_0, l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les x_n et L celui engendré sur $\mathbb{R}$. L_0 est dénombrable et dense dans L. Montrons que L est à son tour dense dans E. Remarquons qu'il suffit par le lemme 1.4 de démontrer que

$$\forall f \in E',\ (\forall x \in L,\ f(x) = 0) \Rightarrow f = 0. \tag{4.1}$$

Soit donc $f \in E'$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in L_0$. Montrons que $f = 0$. Or, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$, $||f - f_n|| < \varepsilon$ et $f(x_n) = 0$, $\forall n$. Donc

$$\frac{1}{2}||f_n|| \leq f_n(x_n) = (f_n - f)(x_n) + f(x_n) \leq \varepsilon.$$

Donc $||f|| \leq ||f_n - f|| + ||f_n|| \leq 3\varepsilon$ et donc $f = 0$. ○

Corollaire 4.2 *Si E est un espace de Banach, alors E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Démonstration On sait déja que si E' est réflexif et séparable, alors E aussi. Réciproquement, si E est réflexif et séparable, alors $E'' = J(E)$ aussi, et donc E' aussi.

○

Théorème 4.3 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors la boule unité fermée $\overline{B_{E'}}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Démonstration Soit (x_n) une suite de B_E dense dans $\overline{B_E}$. On définit une distance sur E' par

$$\forall f, g \in E',\ d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|(f - g)(x_n)|.$$

Il faut montrer que les voisinages pour $\sigma(E', E)$ et pour cette distance sont les mêmes.

a) Soit $f_0 \in B_{E'}$ et V un voisinage de f_0 pour $\sigma(E', E)$. On montre que $\exists r > 0$, $U = \{f \in \overline{B_{E'}},\ d(f, f_0) < r\} \subset V$. On peut supposer (Proposition 3.10) que V est de la forme

$$V = \{f \in \overline{B_{E'}},\ (f - f_0)(y_i) < \varepsilon,\ i = 1, ..., n\}, \text{ avec } ||y_i|| \leq 1.$$

Comme la suite x_n est dense dans $\overline{B_E}$, on peut trouver x_{n_i} tels que $||y_i - x_{n_i}|| < \frac{\varepsilon}{4}$. On choisit r tel que $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$d(f, f_0) < r \Rightarrow \frac{1}{2^{n_i}}|(f - f_0)(x_{n_i})| < r,\ i = 1, ..., n.$$

$$\Rightarrow |(f-f_0)(y_i)| \le |(f-f_0)(y_i - x_{n_i})| + |(f-f_0)(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f \in V.$$

Donc $U \subset V$.
b) Réciproquement, soit $f_0 \in \overline{B_{E'}}$. Fixons $r > 0$ et considérons

$$U = \{f \in \overline{B_{E'}},\ d(f, f_0) < r\}.$$

On va montrer qu'il existe un voisinage V de f_0 pour $\sigma(E', E)$ dans $B_{E'}$ tel que $V \subset U$. On cherche V de la forme

$$V = \{f \in \overline{B_{E'}},\ |(f-f_0)(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, ..., k\}.$$

Choisissons k et ε pour que $V \subset U$: on a, si $f \in V$,

$$d(f, f_0) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_n)| < \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$= \varepsilon + \frac{1}{2^k}.$$

On choisit donc $\varepsilon < \frac{r}{2}$ et k suffisamment grand pour que $\frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$. ○

Une adaptation immédiate de la démonstration précédente donne le résultat dual :

Théorème 4.4 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors $\overline{B_E}$ est métrisable pour $\sigma(E, E')$.*

Théorème 4.5 *Soit E un espace de Banach séparable, f_n une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraite f_{n_k} qui converge pour $\sigma(E', E)$.*

Démonstration En effet, par le théorème 3.3 (Théorème d'Alaoglu), la boule unité de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$ et par le théorème 4.3, cette topologie est métrisable. Or, dans un compact métrique, toute suite a un point d'accumulation.

○

Corollaire 4.3 *Soit E un espace de Banach et réflexif. Soit x_n une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite x_{n_k} qui converge pour $\sigma(E, E')$.*

Démonstration Soit F le plus petit sous-espace fermé contenant la suite x_n. F étant réflexif, il est le dual de F' et $\sigma(F, F') = \sigma(F'', F')$. Donc le théorème 4.5 s'applique. ○

Corollaire 4.4 *Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné d'un espace de Banach réflexif. Alors K est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Corollaire 4.5 *Soit E un espace de Banach réflexif et $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe s.c.i. sur un convexe fermé A telle que*

$$\lim_{x \in A, ||x|| \to \infty} \varphi(x) = +\infty,\ \textit{ et } \exists x_0, |\varphi(x)| < \infty.$$

Alors φ atteint son minimum sur A.

Démonstration L'ensemble convexe $K = \{x, \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ est convexe, fermé, borné, non vide. Donc c'est un compact pour $\sigma(E, E')$. Comme φ est aussi s.c.i. pour la topologie $\sigma(E, E')$, φ atteint son minimum sur K en vertu du lemme qui suit. ◦

Lemme 4.1 *Soit φ une fonction s.c.i. sur un espace topologique compact K. Alors φ atteint sa borne inférieure.*

Démonstration Supposons par contradiction que φ n'atteigne pas son infimum m sur K. Alors les ouverts $O_\varepsilon =]m + \varepsilon, +\infty[$ recouvrent $\varphi(K)$. Comme φ est s.c.i., les ensembles $\varphi^{-1}(O_\varepsilon)$ sont ouverts. De plus, ils recouvrent K et on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. On en déduit un recouvrement fini $O_{\varepsilon_1}, ..., O_{\varepsilon_k}$ de $\varphi(K)$. Donc $\varphi(K) \subset] \min(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k), +\infty[$, ce qui contredit la définition de m.

◦

4.3 Exercices

Rappel

On définit $J : E \longrightarrow E''$ par

$$< Jx, f >_{E'',E'} = < f, x >_{E',E} \quad \forall x \in E, \ \forall f \in E'.$$

On a $\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} | < f, x > | = \|x\|$ par Hahn-Banach, donc J est linéaire isométrique.
(On peut donc identifier E et J(E) quand on le souhaite.)

Exercice 1

Montrer que $E = (E'_{w\star})'$.

Exercice 2

Soit $E = \ell^\infty$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.
Trouver une suite $(f_n)_n$ de E' telle que $\|f_n\|_{E'} = 1$ et $(f_n)_n$ ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible $\star$. Y a t'il contradiction avec le fait que $(B_{E'}, w\star)$ est compact ? Que pouvez-vous en conclure sur E ?

Exercice 3

Soient E et F deux espaces de Banach, on note $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que T est compacte si $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F (pour la norme).
1) Vérifier qu'un compact dans un espace vectoriel normé est borné.

2) Montrer que T compacte $\Longrightarrow$ T continue.
3) Montrer que T compacte $\Longrightarrow$ T vérifie $(\star)$,

$$(\star) \qquad [x_n \rightharpoonup x \text{ dans } E_w \Longrightarrow Tx_n \longrightarrow Tx \text{ dans } F]$$

4) Réciproquement : si de plus E est réflexif, montrer que T vérifie $(\star)$ $\Longrightarrow$ T compacte (on pourra d'abord vérifier que $T(B_E)$ est fermé).
5) On suppose que $E = F$. Montrer que T compacte $\Longrightarrow$ dim ker(Id-T)$< \infty$.

Exercice 4

Soit E un espace réflexif et soit $f \in E'$, montrer que $\|f\|_{E'}$ est atteinte.
(C'est un critère simple pour montrer qu'un espace n'est pas réflexif.)

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}[0,1]$ muni de $\| \|_\infty$ et soit $\varphi_n(x) = 1 - nx$ si $x \leq 1/n$ et nulle ailleurs. Vérifier que $(\varphi_n)_n$ n'a aucune sous-suite faiblement convergente. Que pouvez-vous conclure sur E ?

Chapter 5

L'intégrale de Lebesgue

On admet l'existence d'une classe de fonctions $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ que l'on appelle mesurables au sens de Borel-Lebesgue. Si $f = \mathbb{1}_E$ est une fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire $f(x) = 1$ si $x \in E$, $f(x) = 0$ sinon et si f est mesurable, on dit que E est mesurable, ou Lebesgue-mesurable. Dans tout ce qui suit, nous admettrons que les fonctions et les ensembles considérés sont mesurables et nous admettons l'existence d'une application qui à toute fonction f mesurable et à valeurs dans $[0, +\infty]$ associe son *intégrale de Lebesgue* que l'on notera de manière plus ou moins abrégée

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int f(x)dx = \int f \in [0, +\infty].$$

Si $f = \mathbb{1}_E$ est une fonction caractéristique, on note $\mu(E) = \int \mathbb{1}_E$ que l'on appelle *mesure de E*. En l'absence d'une construction explicite, les **propriétés** qui suivent doivent être considérées comme des axiomes vérifiés par l'intégrale de Lebesgue. A partir de ces axiomes, nous démontrerons les autres propriétés dont nous aurons besoin.

Propriété 5.1 *Linéarité : pour f et g à valeurs dans $[0, +\infty]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$.*

Remarquons que l'en déduit la croissance de l'intégrale : si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$

Propriété 5.2 . *Si $f \geq 0$ est Riemann-intégrable elle est Lebesgue mesurable et son intégrale au sens de Lebesgue est égale à son intégrale au sens de Riemann.*

Propriété 5.3 *(Théorème de Beppo-Levi ou de la convergence monotone) Si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty.$$

Exercice 5.1 *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions $\mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$, on peut intervertir sommation et intégration : $\int \sum_n u_n(x)dx = \sum \int u_n(x)dx$.*

Il suffit d'appliquer le théorème de Beppo-Levi à la suite croissante des sommes partielles $\sum_{n=1}^k u_n$.

Proposition 5.1 *Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. Si A_n sont des ensembles disjoints, $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. (Appliquer de nouveau Beppo-Levi aux fonctions caractéristiques des ensembles). Si les A_n ne sont pas disjoints, on a $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.*

Définition 5.1 *On appelle ensemble négligeable tout ensemble de mesure nulle. On dit qu'une propriété est vérifiée presque partout si elle est vraie sauf sur un ensemble négligeable.*

En vertu de la proposition 5.1, toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Proposition 5.2 *Soit f définie sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a*

$$\int f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ p.p..$$

Démonstration On pose $A = \{x, f(x) \neq 0\}$. On a

$$f(x) \leq \lim_{j\to\infty} j\mathbb{1}_A(x).$$

Si $\mu(A) = 0$, on obtient par le théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi),

$$\int f(x)dx \leq \lim_{j\to\infty} j \int \mathbb{1}_A(x)dx = 0.$$

Réciproquement, si $\int f(x)dx = 0$, remarquons que $\mathbb{1}_A(x) \leq \lim_{j\to\infty} jf(x)$ et donc, à nouveau par Beppo-Levi,

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A(x)dx \leq \lim_{j\to\infty} \int jf(x)dx = 0.$$

$\circ$

Définition 5.2 *Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On dit que f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx < \infty.$$

L'espace des fonctions sommables est noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Si $f(x) \in \mathbb{R}$, on note $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Ces deux fonctions sont intégrables si $|f|$ l'est et on pose

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Si $f = f_1 + if_2$ est à valeurs complexes, on pose

$$\int f = \int f_1 + i \int f_2.$$

Exercice 5.1 Si une fonction f à valeurs réelles vérifie $f = g - h$, avec $g \geq 0$, $h \geq 0$, alors $\int f = \int g - \int h$.

Proposition 5.3 *L'application $f \to \int f$ est linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbf{C}$. Si f et g sont sommables et à valeurs complexes,*

$$|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx, \ |\int f(x) + g(x)|dx \leq \int |f(x)|dx + \int |g(x)|dx. \tag{5.1}$$

Démonstration On montre l'additivité pour des fonctions réelles : on a $f+g=f^++g^+-(f^-+g^-)$ et donc, en vertu de l'exercice 5.1, et de l'additivité de l'intégrale pour les fonctions positives,

$$\int(f+g)=\int(f^++g^+)-\int(f^-+g^-)=\int f+\int g.$$

On montre la première relation de (5.1), qui entraîne aisément la seconde. On choisit un nombre complexe θ de module 1 tel que $\theta\int f$ soit un réel positif. Donc

$$|\int f(x)dx|=\int \mathrm{Re}(\theta f(x))dx\leq\int(\mathrm{Re}(\theta f(x)))^+dx\leq\int|f(x)|dx.$$

∘

Définition 5.3 *L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$. Une conséquence de la proposition 5.2 est que si f et g sont égales presque partout, elles ont la même intégrale. A partir de maintenant on identifie les fonctions égales presque partout entre elles. On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace vectoriel des classes d'équivalence de fonctions pour cette relation d'équivalence. Tous les énoncés qui suivent concerneront désormais ces classes. On choisira souvent par commodité une représentante u de la classe, ce qui sera licite à condition de la considérer comme "définie presque partout" (p.p.). On s'autorisera donc à écrire $u(x)$, mais cette écriture n'aura jamais un sens ponctuel (à moins qu'un élément de la classe ne s'avère continu). Les énoncés portant sur $u(x)$ n'auront de sens que si on leur ajoute la mention "presque partout".*

Théorème 5.1 *(***de Lebesgue, ou de la convergence dominée)** *Soit f_n une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que l'on ait pour tout n, $|f_n(x)|\leq h(x)$ p.p.. (Cette fonction $h(x)$ s'appelle un* chapeau intégrable de la suite f_n*). On a alors*

$$\int|f_n(x)-f(x)|\to 0,\quad \int f_n(x)dx\to\int f(x)dx \tag{5.2}$$

Démonstration On remarque que la conclusion (5.2) ne dépend pas du choix des représentants des fonctions f_n et de f. Soit $A_n=\{x, |f_n(x)|>h(x)\}$ et B l'ensemble des points où f_n ne converge pas vers f. Alors $C=B\cup(\bigcup_n A_n)$ est négligeable. On peut donc supposer, en changeant de représentants pour f_n et f, que $f_n(x)\to f(x)$ partout et que $|f_n(x)|\leq h(x)$ partout (pour tout x).

On pose $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$ et $h_n(x)=\sup_{k\geq n}g_k(x)$. Alors h_n est une suite décroissante de fonctions positives qui tend vers zéro partout. De plus, $h_n(x)\leq 2h(x)$ partout. On va montrer que $\int h_n(x)dx$ tend vers zéro, ce qui nous donnera (5.2). Or, le théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi) s'applique à la suite croissante de fonctions positives $2h-h_n$ et donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int(2h(x)-h_n(x))dx=2\int h(x)dx.$$

Donc $\int h_n(x)dx\to 0$. ∘

Théorème 5.2 *(Réciproque du théorème de Lebesgue).*
Si $f_n\to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite f_{n_k} de la suite f_n qui converge presque partout vers f et un chapeau intégrable h tel que $\forall k$, $|f_{n_k}(x)|\leq h(x)$ p.p..

Démonstration Voir l'exercice 5 à la fin du chapitre VI. ∘

Théorème 5.3 *(Théorème de dérivation sous le signe somme) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.*
(a) Pour tout $\lambda \in I$, la fonction $x \to f(x, \lambda)$ est sommable sur A.
(b) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe en tout *point de $A \times I$.*
(c) Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)| \leq h(x)$ pour tous x et λ. Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda) dx$$

est dérivable dans I et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx.$$

Démonstration On a, à λ fixé,

$$\frac{1}{l}[F(\lambda + l) - F(\lambda)] = \int_A g_l(x) dx,$$

où l'on a posé

$$g_l(x) = \frac{1}{l}[f(x, \lambda + l) - f(x, \lambda)].$$

La fonction g_l converge en tout point vers $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$. D'autre part,

$$|g_l(x)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda + \theta l)| \leq h(x)$$

d'après le théorème des accroissements finis. Le théorème résulte alors de l'application du théorème de Lebesgue. ∘

L'avant-dernière propriété de l'intégrale de Lebesgue que nous admettrons est la suivante. Comme précédemment, on suppose que les fonctions considérées sont mesurables.

Définition 5.4 *On considère un quadrillage de taille a de l'espace $\mathbb{R}^N$ par des hypercubes de longueur d'arête a. Posant $C = [0, a[^N$, ce quadrillage peut se définir par le recouvrement disjoint*

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N} (a\mathbf{n} + C).$$

On appelle fonction en escalier une fonction à laquelle on peut associer un quadrillage de taille a tel que f soit constante sur chacun des hypercubes du quadrillage et à support borné .

Définition 5.5 *On appelle fonction en escalier dyadique une fonction en escalier associée à un quadrillage de taille $a = 2^k$, $k \in \mathbf{Z}$.*

Propriété 5.4 *Pour toute fonction f sommable sur $\mathbb{R}^N$, il existe une suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Cette propriété reste vraie si on impose aux fonctions en escaliers d'être dyadiques.*

On va déduire de la proposition 5.4 une propriété de densité plus forte concernant les fonctions continues à support compact.

Définition 5.6 *Soit f une fonction continue et nulle en dehors d'une boule. On appelle support de f la fermeture de l'ensemble $\{x, f(x) > 0\}$ qui est fermé et borné et donc compact. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions coninues à support compact contenu dans Ω.*

Corollaire 5.1 *Pour toute fonction f sommable sur $\mathbb{R}^N$ il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire continues et à support compact, telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| \to 0.$$

Démonstration On commence par montrer que si C est un hypercube de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{1}_C$ sa fonction caractéristique, alors il existe des fonctions continues f_N à support compact telles que $\int |f_N - \mathbb{1}_C|(x)dx$ soit arbitrairement petit. On peut bien sûr se ramener au cas où $C = [-1, 1]^N$. Commençons par le cas $N = 1$. On considère l'unique fonction continue et affine sur $[-1-\varepsilon, -1]$ et sur $[1, 1+\varepsilon]$ telle que $f_1(x) = 0$ si $|x| \geq 1+\varepsilon$ et $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. La fonction $f_N(x_1, ..., x_N) = f_1(x_1)...f_N(x_N)$ convient en dimension N. En considérant les supports de f_N et de $\mathbb{1}_C$, on voit en effet que $||\mathbb{1}_C - f_N||_{L^1} \leq (1 + 2\varepsilon)^N - 1$ qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Toute combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'hypercubes est donc approchable dans L^1 par une combinaison linéaire finie de fonctions continues à support compact. Il en résulte que toute fonction en escalier est approchable par des fonctions à support compact dans L^1. On conclut en utilisant la propriété 5.4.

$\circ$

L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$ apparaît donc comme la complétion de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ pour la norme

$$||f||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx,$$

mais il faudra montrer qu'il est effectivement complet. Voyons tout de suite deux conséquences importantes de cette propriété de densité.

Théorème 5.4 *(équicontinuité en moyenne des fonctions sommables) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|dx = 0.$$

Démonstration On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit grâce à la proposition 5.1 une fonction f_ε, continue et à support compact inclus dans une boule $B(0, R)$, telle que $||f_\varepsilon - f||_{L^1} \leq \varepsilon$. La fonction f_ε

est uniformément continue. Il existe donc η tel que $|y| \leq \eta \Rightarrow |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}(B(0,2R)}$. Ceci implique en intégrant $\int |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)|dx \leq \varepsilon$ pour $y \leq \min(\eta, R)$. On a donc

$$\int |f(x) - f(x+y)|dx \leq$$

$$\int |f - f_\varepsilon|(x)dx + \int |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x+y)|dx + + \int |f_\varepsilon(x+y) - f(x+y)|dx \leq 3\varepsilon.$$

○

Théorème 5.5 *(de changement de variable)*
Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ un difféomorphisme entre Ω_1 et Ω_2. On notera $J_\varphi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Soit f une fonction définie sur Ω_2.
(a) Si la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les deux membres ont un sens dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx. \tag{5.3}$$

(b) Si f est à valeurs complexes, elle est sommable dans Ω_2 si et seulement si $f(\varphi(x))J_\varphi(x)$ est sommable dans Ω_1, et les deux membres de l'égalité précédente sont alors égaux.

Démonstration : La formule (5.3) est vraie si f est intégrable au sens de Riemann, continue à support compact par exemple. Si f est sommable, on considère des fonctions continues f_n à support compact qui approchent f dans L^1. On a donc

$$\int_{\Omega_2} f_n(y)dy = \int_{\Omega_1} f_n(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx \tag{5.4}$$

et on peut écrire une formule analogue pour $|f_n - f_p|$. Il en résulte que les fonctions $f_n(x)|J_\varphi(x)|$ forment une suite de Cauchy dans L^1. Leur limite $f(x)|J_\varphi(x)|$ est donc bien sommable et en passant à la limite dans (5.4), on obtient la formule de changement de variable (5.3). ○

La dernière propriété de l'intégrale de Lebesgue que nous admettons est la suivante (nous supposons toutes les fonctions considérées mesurables).

Propriété 5.5 (Théorème de Fubini-Tonelli)
Soit $f(x,y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.
(a) (Tonelli) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les trois membres définissent un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)dxdx = \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy) = \int_{\mathbb{R}^q} (\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx)dy.$$

(b) (Fubini) Si f est sommable dans $\mathbb{R}^{p+q}$, les trois membres de l'égalité précédente ont un sens et sont égaux. Plus précisément, dire que le troisième membre a un sens signifie :
- *pour presque tout y, la fonction $x \to f(x,y)$ est sommable dans $\mathbb{R}^p$,*
- *la fonction $\varphi(y) = \int f(x,y)dx$ qui est ainsi définie presque partout est sommable dans $\mathbb{R}^q$.*

Chapter 6

Les espaces de Lebesgue, L^1, L^p, L^∞

On appelle, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions définies presque partout et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx < \infty.$$

On appelle $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions définies presque partout et telles qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour presque tout x. La plus petite constante C pour laquelle cette relation est vraie s'appelle le "sup essentiel" de $|f(x)|$ et on le note $||f||_{L^\infty}$. On dit que f est "essentiellement bornée."

Exercice 6.1 Vérifier que les espaces L^1 et L^∞ sont des espaces vectoriels normés: leurs normes sont

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|dx \text{ et } ||f||_{L^\infty} = \text{supess}_{x\in\mathbb{R}^N}|f(x)|.$$

On note parfois ces normes $||f||_1$ et $||f||_\infty$. On va aussi poser pour $1 < p < \infty$

$$||f||_p = ||f||_{L^p} = (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

mais il faudra montrer que c'est une norme. On montrera aussi que les espaces L^p sont complets et donc des espaces de Banach. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$, en sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On appelle p' "l'exposant conjugué" de p. On va aussi montrer dans ce chapitre que les espaces L^p et $L^{p'}$ sont duaux l'un de l'autre.

Théorème 6.1 *(Inégalité de Hölder) Pour tout $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, la fonction fg est sommable et*

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||f||_{p'}.$$

Démonstration On utilise la concavité du logarithme. Si $a > 0$, $b > 0$,

$$\log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) = \log(ab). \text{ D'où}$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \text{ et donc}$$

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'}, \text{ qui donne}$$

$$\int |f(x)g(x)| \le \frac{1}{p}||f||^p_{L^p} + \frac{1}{p'}||g||^{p'}_{L^{p'}}.$$

Pour trouver l'inégalité recherchée, on remplace le couple (f,g) par $(\lambda f, \frac{g}{\lambda})$, où $\lambda > 0$. On choisit

$$\lambda = \frac{||g||_{p'}^{\frac{1}{p}}}{||f||_p^{\frac{1}{p'}}}. \text{ Alors}$$

$$\int |fg| \le (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'})||f||_p||g||_{p'},$$

qui est bien l'inégalité annoncée. ◦

Théorème 6.2 *$L^p(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel et $||f||_p$ est une norme pour tout $1 < p < \infty$.*

Démonstration On applique l'inégalité de Hölder :

$$||f+g||_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \le$$

$$|||f+g|^{p-1}||_{p'}||f||_p + |||f+g|^{p-1}||_{p'}||g||_p = (||f||_p + ||g||_p)||f+g||_p^{p-1},$$

soit $||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$. Les autres relations caractérisant une norme ($||\lambda f|| = |\lambda|||f||$, $||f|| = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout) sont immédiates pour $1 \le p \le \infty$. ◦

Théorème 6.3 *Les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$, ($1 \le p \le +\infty$) sont des espaces de Banach.*

Démonstration Soit h_k une suite de Cauchy dans L^p. Si $p = +\infty$, il est immédiat de voir que $h_k(x)$ est de Cauchy pour presque tout x et converge uniformément vers une fonction essentiellement bornée $h(x)$. Soit maintenant $1 \le p < \infty$. Il existe une suite extraite de la suite de Cauchy h_k, que nous noterons par commodité $f_n = h_{k_n}$, telle que

$$q, r \ge n \Rightarrow ||f_q - f_r||_{L^p} \le \frac{1}{2^n}.$$

On pose $g_n(x) = \sum_1^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. La suite de fonctions $g_n(x)^p$ est croissante. Notons $g(x)^p$ sa limite. Par l'inégalité triangulaire,

$$\int |g_n|^p \le (\sum_1^n ||f_{k+1} - f_k||_p)^p \le 1.$$

Donc, par le théorème de convergence monotone,

$$\int |g(x)|^p = \lim_n \int |g_n|^p \le 1.$$

Il en résulte que $g(x)$ est presque partout finie, appartient à L^p et que $g_n(x)$ tend presque partout vers $g(x)$. Comme (pour $n \ge m$), $\sum_m^n |f_{k+1} - f_k|(x) \le g_n(x) - g_m(x)$, la série $\sum_1^\infty (f_{k+1} - f_k)$

converge également presque partout. Donc $f_n(x) - f_1(x)$ converge presque partout vers une limite que l'on appelle $f(x) - f_1(x) \in L^p$. La suite $f_n(x)$ converge donc presque partout vers $f(x) \in L^p$. De plus, $|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\sum_n^\infty |f_{k+1} - f_k(x)|)^p \leq g(x)^p$ qui est chapeau intégrable. Donc $f_n - f$ converge vers 0 dans L^p. Rappelons que $f_n = h_{n_k}$ est une sous-suite extraite de la suite de Cauchy h_k. Mais si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge, toute la suite converge. ◦

On a vu (Propriété 5.1) que les fonctions continues à support compact forment un sous-ensemble dense de L^1. C'est encore vrai pour les espaces L^p, avec la restriction $p < \infty$.

Théorème 6.4 *Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration On commence par montrer que l'on peut approcher une fonction f de L^p par des fonctions bornées et à support compact. L'approximation se fait par simple troncature : on pose $f_k(x) = f(x)$ si $||x|| \leq k$ et $|f(x)| \leq k$, $f_k(x) = 0$ sinon. La suite $|f(x) - f_k(x)|^p$ a $|f(x)|^p$ pour chapeau intégrable et tend presque partout vers 0. Par le théorème de Lebesgue, elle converge donc vers 0 et il en résulte que $f_k \to f$ dans L^p.

Reste à montrer que si une fonction f est bornée ($|f| \leq k$) et à support compact ($|f(x)| = 0$ si $||x|| \geq k$), alors elle est approchable dans L^p par des fonctions continues. Mais comme $f \in L^1$, il existe une suite de fonctions continues et à support compact f_n convergeant vers f dans L^1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut suppposer que la suite f_n converge presque partout vers f (réciproque du théorème de Lebesgue). En remplaçant f_n par la nouvelle fonction continue $\max(-k, \min(k, f_n(x))$, qui converge aussi presque partout vers f et a un un chapeau intégrable, on peut finalement supposer que $|f_n(x)| \leq k$. Utilisons une fonction g continue et à support compact valant 1 sur $B(0, k)$. La suite de fonctions $h_n = gf_n$ converge presque partout vers f et a la fonction bornée $k\mathbb{1}_{B(0,k)}g$ comme chapeau intégrable dans tout L^p. Elle converge donc vers f dans tous les L^p tels que $1 \leq p < \infty$. ◦

Corollaire 6.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que pour toute fonction continue à support compact $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ on ait $\int f(x)u(x) = 0$. Alors $f = 0$ p.p.*

Démonstration En reprenant exactement le même raisonnement que dans la démonstration précédente, on voit qu'il existe pour toute boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$ une suite $u_n \in \mathcal{C}_c(B(0, R + 1))$ qui converge vers Signe(f) dans $L^1(B(0, R))$ et presque partout et vérifie $|u_n| \leq 1$. Il vient alors

$$0 = \int_{B(0,R)} f(x)v_n(x) \to \int_{B(0,R)} f(x)\text{Signe}(f(x)) = \int_{B(0,R)} |f(x)|dx.$$

Donc $f = 0$.

◦

Théorème 6.5 *Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, on a*

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x + y) - f(x)|^p dx = 0.$$

Démonstration : Exercice. C'est vrai pour les fonctions continues à support compact car elles sont uniformément continues et on le montre pour une fonction arbitraire de $L^1(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c$ dans L^p (Proposition 6.4).

$\circ$

6.1 Convolution et régularisation des fonctions de L^p

Théorème 6.6 et définition *Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors le produit de convolution $f * g$ est défini par*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy,$$

la fonction de y figurant sous le signe somme étant sommable pour presque tout x. En outre, la fonction $f * g$ appartient à L^1 et on a

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1.$$

Démonstration On montre d'abord en appliquant le théorème de Fubini et le théorème de changement de variable que la fonction $|f(x-y)g(y)|$ est sommable. En effet,

$$\int\int |f(x-y)g(y)|dxdy = \int |g(y)|(\int |f(x-y)|dx)dy =$$

$$\int |g(y)|(\int |f(x)|dx)dy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

La fonction $f(x-y)g(y)$ est donc sommable sur $\mathbb{R}^{2N}$ et le théorème de Fubini assure que la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est sommable pour presque tout x et que la fonction alors définissable par $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ est elle-même sommable sur $\mathbb{R}^N$. On a finalement

$$||f * g||_{L^1} = \int |f * g|(x)dx \leq \int |g(y)|(\int |f(x-y)|dx)dy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

$\circ$

Théorème 6.7 (régularisation par convolution) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et soit g une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}^N$. Alors la fonction $f * g$ définie <u>en tout point</u> par $f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$ est continue et bornée. Si de plus les dérivées partielles de g existent et sont continues et bornées, il en est de même pour $f * g$ et l'on a*

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial(f * g)}{\partial x_j \partial x_k} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j \partial x_k}, \; ...$$

Démonstration On remarque d'abord que la fonction $g(x-y)f(y)$ est sommable pour tout x. En effet, $|g(x-y)f(y)| \leq ||g||_\infty |f(y)|$. La continuité découle du théorème de Lebesgue. En effet, si $x_n \to x$, alors $g(x_n - y)f(y)$ tend partout vers $g(x-y)f(y)$ et $||g||_\infty |f(y)|$ est chapeau intégrable. Donc

$$f * g(x_n) = \int g(x_n - y)f(y)dy \to \int g(x-y)f(y)dy = f * g(x).$$

Si g est dérivable par rapport à x_j et de dérivée continue et bornée, appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme. On a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g(x-y)f(y)) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)f(y)$$

et cette fonction est majorée en module par $||\frac{\partial g}{\partial x_j}||_\infty f(y)$, qui est indépendante de x et sommable. Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique donc et donne bien $\frac{\partial (f*g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$.
$\circ$

Théorème 6.8 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $(f * g)(x)$ est défini pour presque tout x et c'est une fonction de carré sommable vérifiant*

$$||f * g||_2 \leq ||f||_1 ||g||_2. \tag{6.1}$$

Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * g(x)$ est défini pour tout x et c'est une fonction continue, tendant vers zéro à l'infini et satisfaisant

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_2 ||g||_2. \tag{6.2}$$

Démonstration Pour évaluer

$$\int (|f| * |g|)^2(x)dx,$$

on remarque que cette intégrale est égale grâce au théorème de Tonelli à

$$I = \int\int\int |g(x-y)||g(x-z)||f(y)||f(z)|dxdydz. \tag{6.3}$$

(intègrer I d'abord par rapport à y, puis par rapport à z). On applique à nouveau le le théorème de Fubini pour intégrer I d'abord en x, puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui donne

$$I = \int\int |f(y)||f(z)|(\int |g(x-y)||g(x-z)|dx)dydz \leq ||f||_1^2 ||g||_2^2. \tag{6.4}$$

La relation (6.1) vient immédiatement des relations (6.3) et (6.4).

Si maintenant f et g sont de carré sommable, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $(f * g)(x)$ est défini pour tout x et on obtient la relation (6.2). Montrons maintenant que $f * g$ est continue et tend vers zéro à l'infini. On considère deux suites approximantes continues à support compact f_n et g_n telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par le théorème 6.7,

$f_n * g_n$ est continue et il est immédiat que $f_n * g_n$ est encore à support compact. Finalement on a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f * g(x) - f_n * g_n(x)| \leq (|f - f_n| * |g|)(x) + (|f_n| * |g - g_n|)(x) \leq$$

$$||f - f_n||_2 ||g||_2 + ||f_n||_2 ||g - g_n||_2 \to 0.$$

Donc la suite de fonctions $f_n * g_n$, continues et tendant vers zéro à l'infini, tend uniformément vers $f * g$. Il en résulte que $f * g$ est continue et tend vers zéro à l'infini. ◦

Définition 6.1 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, on appelle support de f et on note* Support(f) *le complémentaire du plus grand ouvert O tel que $f(x) = 0$ presque partout sur 0. Le support de f est donc un fermé. S'il est de plus borné, on dit que f est à support compact.*

Proposition 6.1 *Si f et g sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$,*

$$\text{Support}(f * g) \subset \overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}.$$

Démonstration Soit $x \notin \text{Support}(f) + \text{Support}(g)$, alors $(x - \text{Support}(f)) \cap \text{Support}(g) = \emptyset$ et donc

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) dy = \int_{(x - \text{Support}(f)) \cap \text{Support}(g)} f(x - y) g(y) dy = 0.$$

Donc $(f * g)(x) = 0$ en tout point n'appartenant pas à $\text{Support}(f) + \text{Support}(g)$ et donc aussi en tout point n'appartenant pas à sa fermeture $\overline{\text{Support}(f) + \text{Support}(g)}$, ce qui donne le résultat. ◦

Théorème 6.9 *(Approximations de l'identité) Soit $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\int k(x)dx = 1$ et $k(x) \geq 0$ presque partout. On pose pour tout $h > 0$,*

$$k_h(x) = h^{-N} k(\frac{x}{h}).$$

Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, les fonctions $f * k_h$ convergent vers f dans L^1.

Démonstration On remarque d'abord que

$$\int k_h(x) dx = \int k(x) dx = 1, \tag{6.5}$$

$$k_h * f(x) - f(x) = \int (k_h(y)(f(x - y) - f(x))dy, \tag{6.6}$$

on rappelle que comme $f \in L^p$, on peut choisir η assez petit pour que

$$|y| \leq \eta \Rightarrow \int |f(x - y) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon \tag{6.7}$$

et que (une conséquence du théorème de Lebesgue), pour h assez petit,

$$\int_{|y|\geq\eta} |k_h(y)|dy \leq \varepsilon \tag{6.8}$$

Enfin, la convexité de la fonction $r \to |r|^p$ et le fait que $k_h \geq 0$, $\int k_h = 1$ impliquent que pour toute fonction f dans L^p, on ait

$$(\int k_h(x)|f(x)|dx)^p \leq \int k_h(x)|f(x)|^p dx. \tag{6.9}$$

En utilisant les relations (6.5)-(6.9) et le théorème de Fubini,

$$\int |k_h * f(x) - f(x)|^p dx = \int |\int (k_h(y)(f(x-y) - f(x))dy|^p dx \leq \int \int k_h(y)|f(x-y) - f(x))|^p dy dx \leq$$

$$2^p \int |f(x)|^p dx \int_{|y|\geq\eta} |k_h(y)|dy + \int_{|y|\leq\eta} |k_h(y)|dy \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq$$

$$2^p ||f||^p_{L^p} \varepsilon + \int |k_h(y)|\varepsilon = (2^p ||f||^p_{L^p} + ||k||_{L^1})\varepsilon.$$

$\circ$

Exercice 6.2 Reprendre la démonstration précédente dans le cas $p = 1$ et montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse que k est positive.

Proposition 6.2 *Si f est uniformémement continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$, alors $f * k_h$ converge vers f uniformément.*

Démonstration C'est le même raisonnement, en plus simple que pour le théorème 6.9 : On écrit simplement

$$|(k_h * f)(x) - f(x)| = |\int k_h(y)|f(x-y) - f(x))dy|$$

$$\leq 2 \sup |f| \int_{|y|\geq\eta} |k_h(y)|dy + \sup_{|y|\leq\eta} |f(x-y) - f(x)| \int |k_h(y)|dy.$$

$\circ$

Corollaire 6.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω et on munit $\mathcal{C}_c(\Omega)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω, de la topologie suivante : on dit que u_n tend vers u si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait* $\mathrm{Support}(u_n) \subset \mathrm{Support}(u) + B(0, \varepsilon)$ *et* $\sup_{x\in\Omega} |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$. *Alors $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$.*

Démonstration Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, alors elle est uniformément continue et $k_h * f$ tend vers f uniformément. De plus, par la proposition 6.1, Support$(k_h * f) \subset$ Support$(f) + B(0,h)$. Donc $k_h * f$ tend bien vers f dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Enfin, par le théorème 6.7, on a bien $k_h * f \in \mathcal{C}^\infty$. ∘

Pour compléter la démonstration précédente, il nous reste à montrer qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Lemme 6.1 *Il existe une fonction $f_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, à support compact, positive et de support contenu dans $\overline{B}(0,1)$.*

Démonstration On pose simplement, en dimension 1, $f_1(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon. Il est facile de voir que $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$ pour tout ordre k et que donc f est $\mathcal{C}^\infty$. En dimension N, on pose simplement $g_N(x_1, ..., x_N) = f_1(x_1)...f_N(x_N)$ qui est a support dans l'hypercube $[-1,1]^N$ puis $f_N(x) = g_N(2\sqrt{N}x)$ pour ramener le support dans $B(0,1)$. ∘

Exercice 6.3 Construire une fonction radiale $f_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_N(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $f_N(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.
(i) Commencer par le cas de la dimension 1 : Soit f une fonction positive, $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans $[-1,1]$ et d'intégrale 1. On peut construire une telle fonction par le lemme 6.1. Poser $h(x) = f_1(x+3) - f_1(x-3)$, puis $g(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$. Dessiner $h(x)$ et $g(x)$, montrer que $f_1(x) = h(2x)$ répond à la question en dimension 1.
(ii) Montrer que $f_N(x) = f_1(||x||)$ convient en dimension N.

Proposition 6.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration On considère les voisinages intérieurs de Ω, $\Omega_r = \{x, B(x,r) \subset \Omega\}$. Comme $\Omega = \cup_{r>0}\Omega_r$, on a par le théorème de Lebesgue

$$\forall \varepsilon \exists r, \int_\Omega |f(x) - f(x)\mathbb{1}_{\Omega_r}|dx < \varepsilon.$$

On choisit alors $r' < r$ tel que

$$||(f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * h_{r'} - f\mathbb{1}_{\Omega_r}||_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

On obtient donc $||f - (f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * h_{r'}||_{L^1(\Omega)} < 2\varepsilon$. Comme $r' < r$, le lemme 6.1 et le théorème 6.7 impliquent que $(f\mathbb{1}_{\Omega_r}) * h_{r'} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. ∘

6.2 Théorèmes classiques de compacité

Théorème 6.10 (Ascoli-Arzela) *Soit f_n une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact et à valeurs réelles. On suppose que la suite f_n a les deux propriétés suivantes :*
- *f_n est équicontinue : $\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall x, y \in K, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq \eta$.*
- *La suite $(f_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in K$.*

Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge vers une fonction continue f.

Démonstration Remarquons d'abord qu'il existe une suite de points $(x_k)_k$ qui est dense dans K. En effet, K est compact et donc on peut le recouvrir pour tout n par un nombre fini de boules de rayon plus petit que $\frac{1}{n}$. L'union des centres de ces boules est un ensemble dénombrable qui répond à la question.
On va alors extraire pour tout k de la suite f_n une sous-suite $f_{\varphi_k(n)}$ telle que $f_{\varphi_k(n)}(x_l)$ converge pour $l \leq k$ et telle que $f_{\varphi_k(n)}$ soit une sous-suite de $f_{\varphi_{k-1}(n)}$. On procède par extractions successives. Comme la suite $f_n(x_1)$ est bornée, la suite f_n admet une sous-suite convergente en x_1 que nous notons $f_{\varphi_1(n)}$. On extrait de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $f_{\varphi_2(n)}$ qui converge aussi en x_2, etc.. On applique alors le procédé dit d'extraction diagonale : on considère la suite de fonctions $g_n = f_{\varphi_n(n)}$. Elle converge en tout point de la suite x_k. On appelle $g(x_k)$ sa limite en x_k. Dès que $n \geq k$, la suite $f_{\varphi_n(n)}$ devient une sous-suite de $f_{\varphi_k(n)}$. Elle converge donc en x_k. La suite g_n converge donc en tout x_k. En fait, la fonction g est équicontinue et se prolonge d'une manière unique en une fonction continue sur K, que nous noterons encore g. Voyons pourquoi. On a

$$|g(x_l) - g(x_k)| \leq |g(x_l) - g_n(x_l)| + |g(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_l) - g_n(x_k)|.$$

Le troisième terme est rendu inférieur à ε pour tout n si on impose $||x_l - x_k|| < \eta(\varepsilon)$. Les deux premiers termes tendent vers zéro quand $n \to \infty$. On obtient donc $|g(x_l) - g(x_k)| \leq \varepsilon$ si $||x_k - x_l|| < \eta(\varepsilon)$. Donc g est uniformément continue sur la suite x_k et a d'ailleurs le même module d'uniforme continuité que la suite f_n. On montre ensuite que g_n converge uniformément vers g. La fonction g est uniformément continue sur un ensemble dense dans K. Elle se prolonge donc de manière unique en une fonction uniformément continue sur K, avec le même module de continuité uniforme. Montrons pour finir que $g_n \to g$ uniformément. On fixe $\varepsilon > 0$, puis k assez grand pour

$$\forall x \in K,\ \exists l \leq k,\ ||x - x_l|| \leq \eta(\varepsilon).$$

On fixe finalement n_0 assez grand pour que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall l \leq k, ; |g_n(x_l) - g(x_l)| \leq \varepsilon.$$

En combinant les deux dernières inégalités, on a pour $n \geq n_0$ et x dans K,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_l)| + |g_n(x_l) - g(x_l)| + |g(x_l) - g(x)| \leq 3\varepsilon.$$

$\circ$

Corollaire 6.3 *Toute famille f_n de fonctions L-lipschitziennes, définies sur un compact K et telle que pour un certain point x_0, $f_n(x_0)$ soit borné admet une sous-suite uniformément convergente vers une fonction également L-lipschitzienne.*

Démonstration Comme K est compact, il est borné et on a donc $||x - x_0|| \leq M$ pour tout x dans K. D'où $||f_n(x)|| \leq ||f_n(x_0)|| + LM$ est aussi borné. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. $\circ$

Exercice 6.4 (longueur d'un arc rectifiable) On appelle arc rectifiable un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^N$ qui est l'image d'une application Lipschitz $c : s \in [0,1] \to c(s) \in \mathbb{R}^N$. On appelle longueur de l'arc, $l(C)$, l'infimum des constantes de Lipschitz des applications surjectives $c : [0,1] \to C$. Montrer que cet infimum est atteint.
Marche à suivre : considérer une suite c_n dont les constantes de Lipschitz tendent vers $l(C)$. Extraire une sous-suite convergeant uniformément vers un arc c et montrer que c est Lipschitz et que sa constante de Lipschitz est égale à $l(C)$.

Théorème 6.11 *(Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert contenu dans un compact, lui même contenu dans Ω. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta < dist(\omega, \Omega^c),\ \forall f \in \mathcal{F}, \forall h < \delta,\ ||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$. (Il existe une suite $f_n \in \mathcal{F}$ qui converge dans $L^p(\omega)$).

Démonstration On considère des noyaux régularisants $\rho_r, r > 0$ tels que $\int \rho_r(x)dx = 1$, $\rho \geq 0$, support$(\rho) \subset B(0,r)$. On commence par montrer que le théorème d'Ascoli-Arzela s'applique à la famille $(\rho_r * f), f \in \mathcal{F}$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$ et $|z|, r \leq \frac{1}{2}\text{dist}(\omega, \Omega^c)$, $x \in \omega$, on a par l'inégalité de Hölder,

$$|(\rho_r * f)(x+z) - (\rho_r * f)(x)| \leq \int \rho_r(y)|f(x-y) - f(x-y+z)|dy \leq ||\rho_r||_{L^{p'}}^{p'} ||\tau_z f - f||_{L^p(\Omega)}.$$

La famille $\rho_r * f$ est donc équicontinue sur ω. Montrons que la famille $\rho_r * f(x)$ est bornée. En reprenant les calculs précédents on a aussi pour $r < \frac{1}{2}\text{dist}(\omega, \Omega^c)$,

$$|\rho_r * f(x)| \leq \int \rho_r(y)|f(x-y)|dy \leq ||\rho_r||_{L^{p'}}^{p'} ||f||_{L^p(\Omega)}.$$

On conclut que la famille $\rho_r * \mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur ω et donc aussi pour la norme $L^p(\omega)$, ω étant borné.

On montre ensuite que l'on peut approcher uniformément les éléments de $\mathcal{F}$ par les fonctions $\rho_r * f$. On choisit $r < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$, de sorte que $\omega + B(0,r) \subset \Omega$. En utilisant la convexité de la fonction $s \to s^p$,

$$|\rho_r * f(x) - f(x)| \leq \int_\omega \rho_r(y)|f(x-y) - f(x)|dy \leq (\int_\omega \rho_r(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui donne

$$|\rho_r * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{B(0,r)} \rho_r(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli et si $r < \delta(\varepsilon)$, on obtient

$$\int_\omega |\rho_r * f(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{B(0,r)} \rho_r(y)||\tau_y f - f||_{L^p(\Omega)}^p dy \leq \varepsilon^p. \tag{6.10}$$

Pour conclure, on montre que la famille $\mathcal{F}$ peut être pour tout ε recouverte par un nombre fini de boules de rayon arbitrairement petit. On commence par recouvrir la famille $\rho_r * f$ par des boules en nombre fini $B(f_i * \rho_r, \varepsilon)$. Grâce à (6.10), on en déduit que $\mathcal{F}$ est recouverte par les boules en nombre fini $B(f_i, \varepsilon + 2\varepsilon^p)$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$, il existe i tel que $\rho_r * f \in B(\rho_r * f_i, \varepsilon)$ et on a donc

$$||f - f_i|| \leq ||\rho * f - \rho * f_i|| + ||\rho * f - f|| + ||\rho * f_i - f_i|| \leq \varepsilon + 2\varepsilon^p.$$

$\circ$

6.3 Exercices

Exercice 1

1) Soit $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.
2) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0\}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Propriété d'absolue continuité de l'intégrale

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, montrer que $f \in L^1(\Omega) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, si A est mesurable et $|A| \leq \delta$ alors $\int_A |f| dx \leq \varepsilon$.
(Le faire d'abord pour une fonction bornée et passer au cas général.)

Exercice 3 (J.M.Bony, Ecole Polytechnique)

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$. On pose, $\forall n \geq 1$, (lorsque cela a un sens),

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y^n) g(y) dy.$$

1) si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $T_n(f)$ est définie p.p. et $T_n(f) \in L^1(\mathbb{R})$.
2) Si f est continue et bornée, montrer que $T_n(f)$ est continue et bornée.
3) Si f est continue et $f(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \to +\infty$, montrer que $\forall x$, $T_n(f)(x) \longrightarrow C\, f(x)$ où C est une constante à déterminer.

Exercice 4

On note $\star$ le produit de convolution.
Montrer que $(L^1(\mathbb{R}), +, \star)$ est une algèbre de Banach commutative qui ne possède pas d'élément neutre pour $\star$.

Exercice 5 Réciproque du Théorème de convergence dominée

Si $f_n \longrightarrow f$ dans L^1, montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} de la suite f_n qui converge p.p. vers f et un chapeau intégrable h tel que $\forall k$, $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p.

Exercice 6

On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt$. Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 7

1)Soit $f \in L^p \cap L^q$ avec $p < q$. Montrer que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

avec $\theta \in [0,1]$ et donc $f \in L^r$, $\forall r \in [p,q]$.
2) Soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^1 tel que $E \subset \bigcup_{1<q\leq +\infty} L^q$, montrer que $\exists p > 1$ tel que $E \subset L^p$ avec injection continue (considèrer les ensembles $E_n = \{f \in E \cap L^{1+\frac{1}{n}},\ \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n\}$).

Exercice 8

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
2) Soit $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega)$, on suppose que $\exists C$ telle que $\|f\|_p \leq C$, $\forall p$ tel que $1 \leq p < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.
3) Soit $\Omega =]0,1[$ et $f(x) = \log x$, vérifier que $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega)$ et que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Chapter 7

Réflexivité, séparabilité, dualité des L^p

Remarque 7.1 préliminaire : si $f \in L^{p'}$, alors pour tout $u \in L^p$ on a par l'inégalité de Hölder $|\int fu| \leq ||f||_{L^{p'}}||u||_{L^p}$. Donc on a l'inclusion $L^{p'} \subset (L^p)'$. On va montrer dans ce chapitre l'inclusion inverse.

Théorème 7.1 *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ *est le dual topologique de* L^p. *Pour toute forme linéaire continue* $\tilde{f}$ *sur* L^p, *il existe donc une fonction* $f \in L^{p'}$ *telle que*

$$\forall u \in L^p, \tilde{f}(u) = \int gu$$

et

$$||\tilde{f}||_{(L^p)'} = ||f||_{L^{p'}}.$$

La stratégie que nous adoptons pour montrer ce théorème consiste à approcher L^p par des espaces de dimension finie emboités, que l'on notera V_k. Pour avoir des V_k commodes, il est bon de montrer d'abord le théorème précédent pour $L^p(C)$, où C est un borné que l'on rendra ensuite de plus en plus grand.

Soit $C = [-a, a]^N$ un hypercube de $\mathbb{R}^N$. On considère une suite d'espaces emboités V_k de fonctions en escalier constantes sur des hypercubes $(C_i^k)_i$. Les hypercubes (C_i^{k+1}) sont obtenus en subdivisant en 2^N hypercubes égaux chaque hypercube C_i^k. On note $\mathcal{T}_k$ la tribu engendrée, c'est-à-dire l'ensemble des unions quelconques d'hypercubes C_i^k.

Si $v_k \in V_k$, on note $v_k(i)$ sa valeur, constante, sur C_i^k. On associe à $\tilde{f} \in (L^p)'$ sa "projection" f_k sur V_k, définie par

$$f_k(i) = \tilde{f}\left(\frac{1}{\text{mes}(C_i^k)} \mathbb{1}_{C_i^k}\right).$$

La fonction f_k est en fait la restriction de $\tilde{f}$ à V_k car elle vérifie

Lemme 7.1

$$\forall v \in V_k, \tilde{f}(v) = \int f_k v. \textit{ De plus,} \tag{7.1}$$

$$||f_k||_{L^{p'}} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}. \tag{7.2}$$

Démonstration Si $v \in V_k$, on a $v = \sum_i v(i)1\!\!1_{C_i^k}$. Donc

$$\tilde{f}(v) = \sum_i v(i)\tilde{f}(1\!\!1_{C_i^k}) = \sum_i v(i)f_k(i)\mathrm{mes}(C_i^k) = \int_C f_k(x)v(x)dx,$$

ce qui prouve (7.1). Pour montrer (7.2), posons, pour $v \in L^p$, $v_k(i) = \frac{1}{\mathrm{mes}(C_i^k)}\int_{C_i^k} v(x)dx$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on remarque que

$$||v_k||_{L^p} \leq ||v||_{L^p}. \tag{7.3}$$

Comme f_k est constante sur chaque cube, C_i^k, on a en utilisant (7.1-7.3),

$$\forall v \in L^p,\ \int_C f_k v = \int f_k v_k = \tilde{f}(v_k) \leq ||\tilde{f}||||v_k||_{L^p} \leq ||\tilde{f}||||v||_{L^p}.$$

Comme $||f_k||_{L^{p'}} = \sup_{v\in L^p} \frac{\int f_k v}{||v||_{L^p}}$, on obtient (7.2). ∘

Lemme 7.2 *La suite $(f_k, \mathcal{T}_k)$ est une* martingale, *c'est-à-dire que l'on a*

$$\forall E \in \mathcal{T}_k, \forall l \geq k,\ \int_E f_l = \int_E f_k. \tag{7.4}$$

Démonstration En effet, si $E \in \mathcal{T}_k$, sa fonction indicatrice $1\!\!1_E$ est dans $V_k \subset V_l$ et on a donc en utilisant deux fois (7.1)

$$\forall l \geq k, \int_E f_l = \int_C f_l 1\!\!1_E = \tilde{f}(1\!\!1_E) = \int_C f_k 1\!\!1 E = \int_E f_k.$$

∘

Lemme 7.3 *Soit f_k une suite de fonctions telles que $||f_k||_{L^{p'}} \leq c$ et que $f_k(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$. Alors f appartient aussi à $L^{p'}$.*

Démonstration En appliquant le lemme de Fatou, on a

$$c \geq \liminf \int |f_k|^{p'} \geq \int \liminf |f_k(x)|^{p'} = \int |f(x)|^{p'}.$$

∘

Lemme 7.4 *Si $(f_k, \mathcal{T}_k)$ est une martingale à temps discret, et si $\sup_k \int f_k^+ < +\infty$, alors la suite $f_k(x)$ converge presque partout.*

Nous allons démontrer ce lemme dans la sous-section suivante sur les martingales à temps discret.

Lemme 7.5 *(Vitali) Soit C un borné de $\mathbb{R}^N$ et f_k est une suite de fonctions équiintégrable dans $L^1(C)$ qui converge presque partout vers une fonction f. Alors f_k converge vers f dans $L^1(C)$.*

Rappel : une suite de fonctions f_k est dite *équiintégrable* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta,\ \mathrm{mes}(K) < \eta \Rightarrow \int_K |f_k(x)|dx < \varepsilon.$$

Démonstration du Lemme de Vitali On a

$$M\text{mes}(\{|f_k| \geq M\}) \leq \int |f_k(x)| \leq c$$

et donc $\text{mes}(\{|f_k| \geq M\}) \leq \eta$ pour M assez grand. En prenant $\eta = \eta(\varepsilon)$ et en utilisant l'équiintégrabilité, on en déduit que $\int_{\{|f_k| \geq M\}} |f_k(x)|dx \leq \varepsilon$ pour M assez grand. La suite $f_k^M = \max(-M, \min(M, f))$ converge par le théorème de Lebesgue dans $L^1(C)$ vers $f_M = \max(-M, \min(M, f))$. Donc on a pour k assez grand

$$\int |f - f_k| \leq \int |f - f^M| + \int |f^M - f_k^M| + \int |f_k^M - f_k| \leq 3\varepsilon.$$

$\circ$

Lemme 7.6 *La suite des restrictions f_k de $\tilde{f}$ à V_k converge presque partout vers une fonction $f \in L^{p'}(C)$ telle que*

$$\forall v \in L^p(C),\ \tilde{f}(v) = \int_C f(x)v(x)dx \tag{7.5}$$

Cette fonction f satisfaisant (7.5) est unique.

Démonstration Par l'inégalité de Hölder et par (7.2), on obtient $||f_k||_{L^1} \leq c||f_k||_{L^{p'}} \leq c||\tilde{f}||_{(L^p)'}$. On peut appliquer le lemme 7.4. Donc $f_k(x)$ converge presque partout et par le lemme 7.3 on conclut que f est dans $L^{p'}(C)$. Comme la suite f_k est bornée dans $L^{p'}(C)$ et que $p' > 1$, elle est équiintégrable. En effet, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_K |f_k(x)|dx \leq (\text{mes}(K))^{\frac{1}{p}} ||f_k||_{L^{p'}} \leq c\text{mes}(K).$$

Par le lemme de Vitali, f_k converge donc vers f dans $L^1(C)$. Reste à montrer que $\tilde{f}(v) = \int_C fv$ pour tout $v \in L^p(C)$. Mais cette relation est vraie si v est dans un quelconque V_k. En effet, $\tilde{f}(v) = \int_C f_k v$ et f_k tend vers $f \in L^1(C)$. Comme les fonctions de V_k sont bornées, on peut passer à la limite quand $k \to \infty$. Cela prouve que les formes linéaires $\tilde{f}$ et f coïncident sur un sous-espace dense de $L^p(C)$, l'union des V_k, et donc partout.

Montrons que la fonction f est unique. Si on a pour toute fonction v dans $L^p(C)$, $\int_C f_1 v = \int_C f_2 v$, alors $\int (f_1 - f_2)v = 0$ et en choisissant $v = \text{Signe}(f_1 - f_2)$ on obtient $f_1 = f_2$ presque partout. $\circ$

Lemme 7.7 *$L^p(\mathbb{R}^N)$ est réflexif et $(L^p)' = L^{p'}$.*

Démonstration On considère les espaces emboités $V_l = L^p(C_l)$, où $C_l = [-l, l]^N$, $l \in \mathbb{N}$. Par le lemme 7.6 il existe des fonctions $f \in L^{p'}(C_l)$ telles que

$$\forall v \in L^p(C_l),\ \tilde{f}(v) = \int_C f_l(x)v(x)dx \tag{7.6}$$

et on a, par unicité de f_l, $f_{k+l} = f_l$ sur C_l et

$$||f_l||_{L^{p'}} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}. \tag{7.7}$$

On peut donc poser $f(x) = f_l(x)$ si $x \in C_l$. En appliquant le théorème de Beppo-Levi, on déduit de (7.7) que $f \in L^{p'}$ et $||f||_{L^{p'}} \leq ||\tilde{f}||_{(L^p)'}$. Comme f (considérée comme une forme linéaire sur L^p) et $\tilde{f}$ coïncident sur le sous-espace dense de $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\cup_l V_l$, elles sont égales. ◦

Proposition 7.1 *$L^1(\mathbb{R}^N)$ n'est pas réflexif.*

Démonstration Supposons le contraire et soit

$$f_n = \frac{\mathbb{1}_{B(0,\frac{1}{n})}}{\text{mes}(B(0,\frac{1}{n}))}.$$

On a $||f_n||_1 = 1$. Comme L^1 est supposé réflexif et que L^∞ est son dual, il existe une sous-suite f_{n_k} et $f \in L^1$ telles que $f_{n_k} \rightharpoonup f$, $\sigma(L^1, L^\infty)$, ou encore $\int f_{n_k}\varphi \to \int f\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in L^\infty$. On peut donc prendre $\varphi = 1$ et on trouve $\int f\varphi = \int f = 1$. Mais on peut aussi prendre $\varphi = \mathbb{1}_{||x|| \geq \varepsilon}$ et on trouve pour tout ε, $\int_{||x|| \geq \varepsilon} f = 0$. En faisant tendre ε vers zéro, on obtient par le théorème de Lebesgue $\int f = 0$, contradiction. ◦

Remarque 7.2 L^1 n'est donc pas le dual de L^∞ et on a seulement $L^1 \subset (L^\infty)'$.

Proposition 7.2 *$L^p(\mathbb{R}^N)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et non séparable pour $p = +\infty$.*

Démonstration On rappelle (Proposition 5.4) que les fonctions en escalier dyadiques sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $\tilde{V}_k \subset V_k$ l'ensemble des fonctions dyadiques sur $[-2^k, 2^k]^N$, à valeurs rationnelles. Alors $\bigcup_k \tilde{V}_k$ est à la fois dénombrable et dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Considérons les fonctions $f_r = \mathbb{1}_{B(0,r)}$, $r \in \mathbb{R}^+$. On $||f_r - f_{r'}||_{L^\infty} = 1$ dès que $r \neq r'$. S'il y avait une suite g_n dense dans L^∞, on pourrait pour tout r trouver $n(r) \in \mathbb{N}$ tel que $||f_r - g_{n(r)}|| < \frac{1}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, $||g_{n(r)} - g_{n(r')}||_{L^\infty} > 0$ si $r \neq r'$. L'application $r \to n(r)$ est donc injective, une contradiction.

◦

7.1 Martingales à temps discret

Dans cette sous-section, nous démontrons le résultat de convergence presque partout de martingale que nous avons utilisé pour montrer la dualité $L^p - L^{p'}$.

Définition 7.1 *On dira qu'une suite de fonctions $f_k, k \in \mathbb{N}$ sommables sur un espace de probabilité C muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une suite croissante de sous-tribus, $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}$ est une* martingale à temps discret *si pour tout k f_k est $\mathcal{T}_k$-mesurable et*

$$\forall E \in \mathcal{T}_k, \forall l \geq k, \int_E f_l = \int_E f_k. \tag{7.8}$$

Définition 7.2 *On appelle* temps d'arrêt *associé à la martingale* $(f_k, \mathcal{T}_k)$ *une fonction à valeurs entières,* $k(x) \in \mathbb{N}$*, définie sur une partie de* C *et telle que pour tout* $k_0 \in \mathbb{N}$*, les ensembles* $\{x, k(x) = k_0\}$ *appartiennent à* $\mathcal{T}_{k_0}$*. On prendra la convention commode de poser* $k(x) = +\infty$ *quand* x *n'est pas dans le domaine de* k*.*

Lemme 7.8 *Si* $k(x) \le l(x)$ *sont deux temps d'arrêt associés à une martingale* $(f_k, \mathcal{T}_k)$*, alors*

$$\int_{\{x,k(x)\le p\}} f_{k(x)}(x)dx = \int_{\{x,k(x)\le p\}} f_{\min(l(x),p)}(x)dx. \tag{7.9}$$

Démonstration En effet, l'ensemble $\{k(x) \le p\}$ est une union d'ensembles $\{k(x) = k_0\} \in \mathcal{T}_k$. Par additivité de l'intégrale, il suffit de montrer (7.9) pour ces ensembles. Or, en utilisant deux fois la relation de martingale (7.8),

$$\forall k_0 \le p, \int_{k(x)=k_0} f_{k_0} = \int_{k(x)=k_0} f_p = \sum_{l_0\le p} \int_{k(x)=k_0,\, l(x)=l_0} f_p + \int_{k(x)=k_0,\, l(x)>p} f_p =$$

$$\sum_{l_0\le p} \int_{k(x)=k_0,\, l(x)=l_0} f_{l_0} + \int_{k(x)=k_0,\, l(x)>p} f_p = \int_{k(x)=k_0} f_{\min(l(x),p)},$$

car $\{k(x) = k_0,\ l(x) = l_0\} \in \mathcal{T}_{l_0}$.

$\circ$

On définit les temps d'arrêts suivants, sur l'intervalle $[0,p] \subset \mathbb{N}$ associés à deux réels $b > a$.

• $k_1^p(x) =$ premier k, s'il existe dans $[0,p]$, tel que $f_k(x) > b$.
• $k_2^p(x) =$ premier $k > k_1^p$, s'il existe dans $[0,p]$, tel que $f_k(x) < a$.
....

• $k_{2m-1}^p(x) =$ premier $k \ge k_{2m-2}$, s'il existe dans $[0,p]$, tel que $f_k(x) > b$.
• $k_{2m}^p(x) =$ premier $k > k_{2m-1}^p$, s'il existe dans $[0,p]$, tel que $f_k(x) < a$.

Il est immédiat que les k_m sont des temps d'arrêt pour la martingale $(f_k, \mathcal{T}_k)$. On peut interpréter leur domaine ainsi :

• $\Omega_{2m} = \{x, k_{2m}(x) \le p\}$ est l'ensemble des $x \in C$ tels que $f_k(x)$ traverse exactement m fois l'intervalle $[a,b]$ dans le sens descendant pour $1 \le k \le p$.
• $\Omega_{2m+1} = \{x, k_{2m+1}(x) \le p)$ est l'ensemble des $x \in C$ tels que $f_k(x)$ traverse exactement $m \ge 1$ fois l'intervalle $[a,b]$ dans le sens descendant et puis encore une fois de plus dans le sens ascendant pour $1 \le k \le p$.

On définit enfin $\gamma_{a,b}^p(x)$ comme le nombre de passages de $f_k(x)$ par $[a,b]$ dans le sens descendant pour $k \le p$ et $\gamma_{a,b}(x)$ le nombre de passages, éventuellement infini, de f_k par $[a,b]$ dans le sens descendant. On a bien-sûr

$$\forall m \in \mathbb{N}, \{x, \gamma_{a,b}^p(x) \ge m\} = \{x, k_{2m}(x) \le p\} = \Omega_{2m} \tag{7.10}$$

et on peut donc calculer l'espérance du nombre de passages par $[a,b]$:

$$\int \gamma_{a,b}^p(x)dx = \sum_m \text{mes}\{x, \gamma_{a,b}^p(x) \ge m\} = \sum_m \text{mes}\Omega_{2m}, \tag{7.11}$$

en vertu de (7.10) et de la remarque suivante :

Remarque 7.3 Si $\gamma(x)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\int \gamma(x)dx = \sum_{m\in\mathbb{N}} \text{mes}\{x, g(x) \geq m\}$. En effet,

$$\int \gamma(x)dx = \sum_m m\text{mes}\{x, \gamma(x) = m\} = \sum_m \sum_{k\geq m} \text{mes}\{x, \gamma(x) = k\} = \sum_m \text{mes}\{x, \gamma(x) \geq m\}.$$

Lemme 7.9

$$(b-a)\int_C \gamma_{a,b}(x)dx \leq \sup_p \int_C (f_p^+(x) - b). \tag{7.12}$$

Démonstration Comme sur $\Omega_{2m-1} = \{k_{2m-1}^p(x) \leq p\}$ on a $f_{k_{2m-1}(x)} \geq b$, on obtient en utilisant (7.9),

$$0 \leq \int_{\Omega_{2m-1}} (f_{k_{2m-1}}(x) - b)dx = \int_{k_{2m-1}^p(x)\leq p} (f_{k_{2m-1}}(x) - b)dx =$$

$$\int_{k_{2m-1}^p(x)\leq p} (f_{\min(k_{2m},p)}(x) - b)dx \leq (a-b)\text{mes}(\Omega_{2m}) + \int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}} (f_p(x) - b)dx.$$

D'où

$$(b-a)\text{mes}(\Omega_{2m}) \leq \int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}} (f_p(x) - b)dx.$$

et en sommant sur m et en utilisant (7.11), on obtient

$$(b-a)\int_C \gamma_{a,b}^p(x)dx \leq \int_C (f_p(x) - b). \tag{7.13}$$

La relation (7.12) vient car $\gamma_{a,b}$ est la limite croissante des $\gamma_{a,b}^p$. ◦

Démonstration du lemme 7.4 On choisit une suite (a_n) dense dans $\mathbb{R}$ avec $a_n \neq a_m$, quand $n \neq m$. Considérons pour $n \neq m$ les ensembles $N_{n,m} = \{x, \gamma_{a_n,a_m} = +\infty\}$. Ces ensembles sont négligeables par la relation 7.12, ainsi que leur union N. Si x est dans le complémentaire de N, la suite $f_k(x)$ ne peut osciller indéfiniment. Elle converge donc soit vers une valeur finie $f(x)$, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$. Mais comme $\sup_k \int f_k^+ < \infty$, on déduit du lemme de Fatou que l'ensemble des x où la limite est $+\infty$ est aussi négligeable. En effet, le lemme de Fatou donne $\int \liminf_k f_k^+(x)dx \leq \sup \int f_k^+$. Comme $\int_C f_k(x)dx = \int_C f_1(x)dx$ est constante, on a aussi $\sup_k \int f^-(x)dx < \infty$ et l'ensemble des points où $f_k(x)$ tend vers $-\infty$ est également négligeable. ◦

7.2 Exercices

Exercice 1

Soit $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ muni de $\| \; \| = \| \; \|_1 + \| \; \|_2$.
1) Vérifier que $(E, \| \; \|)$ est un espace de Banach.
Soit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, montrer que

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx \in E'.$$

2) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, montrer que

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx \in E'.$$

(Décomposer l'intégrale suivant les ensembles $[|x| > M]$ et $[|x| \leq M]$.)
3) Soit $K = \{u \in E : u \geq 0 \text{ p.p. et } \int_{\mathbb{R}} udx \leq 1\}$.
Montrer que K est un convexe fermé de E.

Soit $(u_n)_n \subset K$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ faible.
4) Montrer que $u \in K$.
5) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} u_n dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx.$$

6) Pour $u \in E$, on définit

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx,$$

où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.
Montrer que $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $J(u) \geq C$, $\forall u \in K$.
On pose $m = \inf_{u \in K} J(u)$. On cherche à prouver que cet inf est atteint.
7) Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $J(u_n) \longrightarrow m$. Montrer que $\|u_n\|$ reste bornée.
8) Extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ et conclure.
9) E est-il réflexif ?

Exercice 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction mesurable sur Ω. On pose $K = \{u \in L^p(\Omega);\, u \geq f \; p.p.\}$.
1) Si $1 \leq p < +\infty$, vérifier que K est fermé pour la topologie faible de $L^p(\Omega)$.
2) On considère le cas $p = +\infty$.
a) Montrer que

$$K = \{u \in L^\infty(\Omega);\, \forall \varphi \in L^1(\Omega),\, \varphi \geq 0,\, f\varphi \in L^1(\Omega), \text{on ait } \int_\Omega u\varphi \geq \int_\Omega f\varphi\}.$$

(On pourra d'abord supposer que $|\Omega| < \infty$.)
b) En déduire que K est fermé faible $\star$ dans $L^\infty(\Omega)$.
c) Soient f_1 et f_2 dans $L^\infty(\Omega)$ telles que $f_1 \leq f_2$ p.p. Montrer que "l'intervalle" $\{u \in L^\infty(\Omega) : f_1 \leq u \leq f_2 \; p.p.\}$ est compact faible $\star$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Exercice 3

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ fixée, montrer que $y \mapsto \tau_y f$ où $\tau_y f(x) = f(x-y)$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Rappels

1) Propriété d'absolue continuité :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soit $f \in L^1(\Omega)$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall A$ mesurable avec $|A| \leq \delta$ on a $\int_A |f|dx \leq \varepsilon$.
(Ce résultat a été démontré en exercice 2, chap. VI)
2) Théorème d'Egoroff :
On suppose $|\Omega| < \infty$.
Soient $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $f_n \to f$ p.p. alors $\forall \delta > 0$, $\exists A$ mesurable tel que $|A| \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $\Omega \backslash A$.

Exercice 4

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, soit $(f_n)_n \in L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose qu'il existe C tel que $\|f_n\|_p \leq C$, $\forall n$ et $f_n \to f$ p.p.
1) Montrer que si $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ alors $\|f_n - f\|_p \to 0$.
2) On suppose $1 < p < +\infty$. Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ faible.
3) Lorsque $p = 1$, considèrer $f_n = n1_{(0,\frac{1}{n})}$ avec $\Omega =]0,1[$ et vérifier que f_n ne converge pas faiblement vers $f = \lim f_n$ p.p.

Exercice 5

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une suite $(f_n)_n$ de $L^1(\Omega)$ est dite équi-intégrable si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, t.q. \forall E \subset \Omega \text{ mesurable avec} |E| \leq \delta \Longrightarrow \forall n \geq 1,\, \int_E |f_n|dx < \varepsilon.$$

Première partie :
1) Montrer que si $(f_n)_n$ est équi-intégrable alors elle est bornée dans $L^1(\Omega)$.
2) Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\Omega)$. Montrer que $(f_n)_n$ est équi-intégrable si et seulement si elle vérifie

$$\lim_{k \to +\infty} (\sup_{n \geq 1} \int_{[|f_n| > k]} |f_n|dx) = 0.$$

3) Montrer que si $(f_n)_n$ est relativement compacte dans $L^1(\Omega)$ alors elle est équi-intégrable.
Deuxième partie :
1) Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\Omega)$ telle que $\forall A \subset \Omega$ mesurable,

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n dx = 0.$$

Montrer que $(f_n)_n$ est équi-intégrable.
(Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer les ensembles $X = \{\mathbb{I}_A,\, A\text{mesurable} \subset \Omega\}$ et $X_n = \{\mathbb{I}_A \in X;\, \forall k \geq$

n, $|\int_A f_k dx| \leq \varepsilon\}$, vérifier que X est fermé dans $L^1(\Omega)$ et appliquer Baire.)
2) En déduire que si $(f_n)_n$ est une suite de $L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et si f_n converge faiblement vers f dans $L^1(\Omega)$ alors la suite $(f_n)_n$ est équi-intégrable.
3) Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\Omega)$ et soit $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que

$$\begin{cases} f_n & \rightharpoonup \quad f \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ faible} \\ f_n & \longrightarrow f \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

Montrer que $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$. (Utiliser le Théorème d'Egoroff.)

Chapter 8

Espaces de Hilbert

Définition 8.1 *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire* (u,v) *et tel que* $||u|| = \sqrt{(u,u)}$ *soit une norme pour laquelle* H *soit complet. Un espace de Hilbert hermitien est un espace vectoriel sur* $\mathbf{C}$ *muni d'un produit hermitien* (u,v) *c'est-à-dire vérifiant*

$$(u,v) = \overline{(v,u)},\ (\lambda u, v) = \lambda(u,v),\ (u+v,w) = (u,w)+(v,w).$$

et tel que $||u|| = \sqrt{(u,u)}$ *soit une norme rendant* H *complet. Remarquons aussi que*

$$(f,\lambda g) = \overline{\lambda}(f,g) \text{ et } (u, v+w) = (u,v) + (u,w).$$

Exemple 8.1 *On pose* $l^2(\mathbb{N})$ *l'ensemble des suites* $u = (u_1, ..., u_n, ...)$ *avec* $u_n \in \mathbf{C}$ *et vérifiant* $\sum_n |u_n|^2 < \infty$. *Muni du produit scalaire* $(u,v) = \sum_n u_n \overline{v_n}$, *c'est un espace de Hilbert.* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *muni du produit scalaire* $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ *est également un espace de Hilbert : on a vu qu'il est complet. Remarquer que* $l^2(\mathbb{N})$ *peut être plongé naturellement dans* $L^2(\mathbb{R})$ *en posant* $u(x) = u_n$ *si* $x \in [n, n+1[$ *et qu'il apparaît alors sous-espace fermé de* $L^2(\mathbb{R})$. *La complétude de* $L^2(\mathbb{R})$ *implique donc la complétude de* $l^2(\mathbb{N})$.

Proposition 8.1 *Nous avons toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|(f,g)| \leq ||f||||g||.$$

Démonstration la démonstration est la même qu'en dimension finie : elle se fait dans le plan de f et g. On pose $(f,g) = e^{i\theta}|(f,g)|$ et on développe $||f + te^{i\theta}g||^2 \geq 0$, ce qui donne

$$||f||^2 + t(f, e^{i\theta}g) + t(e^{i\theta}g, f) + t^2||g||^2 \geq 0, \text{ soit}$$

$$||f||^2 + 2t|(f,g)| + t^2||g||^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme est négatif. ◦

La relation de Pythagore reste valable : si f et g sont orthogonaux, alors

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

Cette relation s'étend à une suite de vecteurs orthogonaux deux à deux, f_k. On a alors

$$||\sum_k f_k||^2 = \sum_k ||f_k||^2.$$

Grâce à la complétude, le premier membre de cette égalité, $\sum_k f_k$, est bien un élément de H si le deuxième membre est une série convergente. On a donc

Proposition 8.2 *Soit H un Hilbert et f_n une suite d'éléments de H. Si la série u_n est composée d'éléments orthogonaux deux à deux et si $\sum_n ||u_n||^2$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge dans H. Si la série de terme général $||u_n||$ est convergente, la série $\sum_n u_n$ converge dans H.*

Démonstration La deuxième partie de l'énoncé se déduit de la complétude de H. En effet, la suite $v_k = \sum_0^k v_n$ est de Cauchy puisque $||v_k - v_l|| \leq \sum_l^k ||u_n||$. ∘

Théorème 8.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H. Pour tout $f \in H$ il existe un unique point de C, appelé* projection *de f sur H dont la distance à f soit minimum. Cette projection se caractérise comme l'unique point g de C tel que*

$$\forall h \in C,\ \mathrm{Re}(f - g, h - g) \leq 0. \tag{8.1}$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f - g$ soit orthogonal à tous les éléments de C.

Lemme 8.1 *L'identité du parallélogramme :*

$$||u||^2 + ||v||^2 = \frac{1}{2}(||u + v||^2 + ||u - v||^2).$$

La somme des carrés des longueurs des cotés d'un parallélogramme est égale à la demi-somme des carrés de ses diagonales.

Démonstration du théorème 8.1 Montrons d'abord l'unicité. S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant la projection de f sur C, on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}||2f - (g_1 + g_2)||^2 = ||f - g_1||^2 + ||f - g_2||^2 - \frac{1}{2}||g_1 - g_2||^2.$$

Donc $||f - \frac{g_1+g_2}{2}||^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1+g_2}{2}$ est dans C, c'est impossible. On montre maintenant l'existence de la projection. Soit g_n une suite de C telle que $||f - g_n|| \to d(f, C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}||g_n - g_m||^2 = ||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2 - 2||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. La suite g_n est donc de Cauchy et converge vers un élément g de C, car C est fermé. Montrons l'inégalité variationnelle (8.1). Pour tout $h \in C$, et $t \in [0, 1]$, les points $g + t(h - g)$ du segment $[g, h]$ appartiennent à C. On a donc

$$\forall t \in [0, 1],\ ||g - f||^2 \leq ||f - g - t(h - g)||^2 \text{ ce qui est équivalent à} \tag{8.2}$$

$$\forall t \in [0, 1],\ t^2||h - g||^2 - 2t\mathrm{Re}(f - g, h - g) \geq 0.$$

On divise par t et on fait tendre t vers $0^{\pm}$ pour obtenir (8.1). Réciproquement, si (8.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (8.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $||f - g||$ réalise la distance minimale de f à un point de C.

Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit g la projection de f. Pour tout v dans C, $g + e^{i\theta}v$ appartient à C. On a donc $\mathrm{Re}(e^{i\theta}(v, g - f)) \leq 0$ pour tout θ et donc $(v, g - f) = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $(v, g - f) = 0$ pour tout $v \in C$, on a $(v - g, g - f) = 0$ pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème 8.1, g est bien la projection de f sur C. $\circ$

Exercice 8.1 Démontrer en utilisant (8.1) que la projection P sur un convexe est une application contractante : $||Pf_1 - Pf_2|| \leq ||f_1 - f_2||$.

Définition 8.2 *On appelle orthogonal d'un sous-ensemble A de H et note $A^{\perp}$ l'ensemble*

$$A^{\perp} = \{v, \forall f \in A,\ (v, f) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Corollaire 8.1 *Si F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme*

$$f = g + h,\ g \in F,\ h \in F^{\perp} \tag{8.3}$$

où g est la projection de h sur F et h la projection de h sur $F^{\perp}$. On a donc

$$H = F + F^{\perp},\ (F^{\perp})^{\perp} = F,\ H^{\perp} = \{0\}.$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

Démonstration La relation (8.3) est une conséquence du théorème 8.1 : si $f \in H$ on note g sa projection orthogonale sur F. Alors $f - g = h$ appartient à $F^{\perp}$ par (8.1). On remarque enfin que $A^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp}$. En effet, si un élément f est orthogonal à A, il est orthogonal aux combinaisons linéaires d'éléments de A et donc à $\mathrm{Vect}(A)$ et par un passage à la limite immédiat à $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$. $\circ$

Corollaire 8.2 et définition *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si l'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(A)$ *engendré par A est dense dans H. Pour que A soit dense dans H, il faut et il suffit que $A^{\perp}$ soit réduit à $\{0\}$.*

Démonstration Si A est total, $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est égal à H et donc $A^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. Réciproquement, si $A^{\perp} = 0$, on a $\overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp} = \{0\}$ et donc $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = H$, ce qui signifie que A est total. $\circ$

Théorème 8.2 *(Riesz) Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \to (v, f)$ est une forme linéaire continue sur H. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H, il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$\tilde{f}(v) = (v, f).$$

En d'autres termes, H est son propre dual. Tout espace de Hilbert est donc réflexif.

Remarque 8.1 On connaît déja ce résultat dans le cas où $H = L^2(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Réciproquement, soit $\tilde{f}$ une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace strict et donc $F^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^\perp$, non nul. On a donc $\tilde{f}(g) \neq 0$ et on pose pour tout $v \in H$

$$v = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g + (v - \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L. Comme $g \in L^\perp$, on a donc

$$(v, g) = \frac{\tilde{f}(v)}{\tilde{f}(g)} ||g||^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = (v, \frac{\overline{\tilde{f}(g)}}{||g||^2} g).$$

○

Théorème 8.3 *(L'Universalité de la convolution) Soit $T : L^2(\mathbb{R}^N) \to C^0(\mathbb{R}^N)$ un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $T(f) = g * f$.*

Démonstration On considère la forme linéaire $f \to (Tf)(O)$, qui appartient par hypothèse à $(L^2(\mathbb{R}^N))'$. Il existe donc une fonction $g_0 \in L^2$ telle que

$$(Tf)(O) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g_0}(x)dx. \tag{8.4}$$

Par hypothèse aussi, $T(\tau_x f) = \tau_x Tf$, où l'on rappelle que l'on note $\tau_x f(y) = f(y + x)$. Donc par (8.4),

$$Tf(x) = (\tau_x(Tf))(0) = T(\tau_x f)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x + y)\overline{g_0}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)\overline{g_0}(-y)dy = f * g(x),$$

où $g(y) = \overline{g_0}(-y)$.

○

8.1 Bases hilbertiennes

Définition 8.3 *On dit qu'un espace de Hilbert est séparable s'il admet une suite dénombrable et dense.*

Définition 8.4 *Soit un espace de Hilbert séparable. On appelle* base hilbertienne *de H un système orthonormé fini ou infini $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est total. On a donc $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ et $\overline{\mathrm{Vect}((e_n)_n)} = H$.*

Théorème 8.4 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H. On en extrait par récurrence sur n un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est-à-dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Hilbert-Schmidt à la suite f_n. On pose par récurrence

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (f_{n+1}, g_k) g_k,$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{||g_n||}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total puisque les e_n engendrent les f_n et c'est donc une base hilbertienne. ◦

Théorème 8.5 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors tout élément de H peut s'écrire comme la somme d'une série convergente*

$$f = \sum_n (f, e_n) e_n = \sum_n c_n(f) e_n \tag{8.5}$$

et les coordonnées sur la base vérifient l'égalité de Parseval

$$||f||^2 = \sum_n |c_n(f)|^2. \tag{8.6}$$

Réciproquement, si c_n est une suite vérifiant $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, la série $\sum_n c_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(f) = c_n$.

Démonstration On pose $f_m = \sum_1^m c_n(f) e_n$. On vérifie que $(f - f_m, e_n) = 0$ pour $n \leq m$. Donc f_m est la projection orthogonale de f sur l'espace engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Donc $||f_m||^2 \leq ||f||^2$. Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$||f_m||^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2, \tag{8.7}$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f) e_n$ est convergente dans H (proposition 8.2). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n \leq m$, on voit que $(f_m - g, e_n) = 0$ et en passant à la limite quand $m \to \infty$, on obtient $(f - g, e_n) = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul. La relation de Parseval s'obtient en passant à la limite dans (8.7).

La réciproque du théorème est immédiate en reprenant les arguments précédents. ◦

Exercice 8.2 (Inégalité de Parseval) Montrer que si (e_n) est un système orthonormé quelconque de H, alors $\sum_n |(e_n, f)|^2 \leq ||f||^2$. Montrer que si cette inégalité est une égalité, alors (e_n) est une base hilbertienne. Montrer que tout système orthonormé peut être complété en une base hibertienne.

Corollaire 8.3 *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$. Il suffit d'associer à $f \in H$ son vecteur de coordonnées sur une base hilbertienne, $c = (c_1(f), ..., c_n(f), ...)$. En particulier, on a*

$$(f, g) = \sum_n c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

Exercice 8.3 Montrer qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si il existe C tel que $|a(u, v)| \leq C||u||||v||$.

Théorème 8.6 *(Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert réel et soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire sur H continue et coercive, c'est-à-dire satisfaisant*

$$|a(u, v)| \leq C||u||||v||, \;\; \exists c > 0, \; a(u, u) \geq c||u||^2$$

et $f \in H'$. Alors il existe un unique élément u de H tel que

$$\forall v \in H, \; a(u, v) = f(v).$$

De plus, u est l'unique minimum de $\varphi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$.

Démonstration On applique le corollaire 4.5 à la fonction $\varphi(v)$, qui est convexe, coercive et continue (et donc s.c.i. !) sur l'espace réflexif H. Il existe donc $u \in H$ qui minimise φ. Comme φ est strictement convexe, ce minimum est unique, car si u_1 et u_2 réalisent le minimum on a $\varphi(\frac{u_1+u_2}{2}) < \frac{1}{2}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$ si $u_1 \neq u_2$. On a pour tout v dans H et $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - f(u+tv) \geq \frac{1}{2}a(u, u) - f(u)$, soit $\frac{1}{2}t^2 a(v, v) + ta(u, v) - tf(v) \geq 0$. En divisant par t et en passant à la limite quand $t \to 0^{\pm}$, on obtient $a(u, v) = f(v)$. ◦

Terminons par quelques remarques sur la convergence faible dans un espace de Hilbert.

Proposition 8.3 *(i) Si $u_n \in H$ est bornée et H séparable, alors il existe une sous-suite qui converge faiblement :*

$$\forall v \in H, \; (u_n, v) \to (u, v).$$

(ii)Réciproquement, si $u_n \to u$, alors u_n est bornée et

$$||u|| \leq \liminf_n ||u_n||.$$

Démonstration (i) C'est une conséquence directe de la réflexivité de H séparable, qui implique la compacité séquentielle de la boule unité.
(ii) Conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus. ◦

Exercice 8.4 On pose dans $H = L^2(0, 2\pi)$, $u_n(x) = \sin nx$ et $v_n(x) = |\sin(nx)|$. Montrer que ces suites convergent faiblement dans H mais pas fortement. Calculer leur limite faible.

8.2 Exercices

Exercice 1

1) Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx,$$

et trouver

$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx,$$

où g est soumis aux contraintes

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

2) Si $x_0 \in M$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, énoncer le problème de maximum correspondant à $\min\{\|x_0 - x\|,\ x \in M\}$ comme dans la question précédente.

Exercice 2 (Lemme de Grothendieck)

Soit Ω un espace mesuré et μ une mesure de probabilité sur Ω. Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\mu)$ tel que $S \subset L^\infty(\mu)$. On va montrer que $\dim S < \infty$.
1) Montrer que $\exists C, M$ tels que $\forall f \in S$, $\|f\|_\infty \leq C\,\|f\|_1$ puis que $\|f\|_\infty \leq M\,\|f\|_2$.
2) Vérifier que $(S, \|\,\|_2)$ est un espace de Hilbert. Soit $\Phi_1, ..., \Phi_n$ une famille orthonormée quelconque de S, montrer que

$$\sum_1^n |\Phi_i(x)|^2 \leq M^2, \quad \text{p.p.}$$

Conclure.
(On pourra considèrer la fonction $f_c(x) = \sum_1^n c_i \Phi_i(x)$ où $c = (c_i)_i \in \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.)

Exercice 3 Base de Haar

On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur $\leq 2^{-j}$. On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j, l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.
3) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ à moyenne nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2), \quad \forall a, b \in E.$$

On se propose de montrer que l'expression suivante

$$(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in E,$$

définit un produit scalaire sur E tel que $(x,x) = \|x\|^2$.
1) Vérifier que $(x,y) = (y,x)$, $(-x,y) = -(x,y)$ et $(x,2y) = 2(x,y)$, $\forall x, y \in E$.
2) Montrer que $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$, $\forall x, y, z \in E$.
On pourra appliquer l'identité du parallélogramme successivement avec

$$\begin{aligned} &(1) \quad a = x,\ b = y, \\ &(2) \quad a = x+z,\ b = y+z, \\ &(3) \quad a = x+y+z,\ b = z. \end{aligned}$$

3) Montrer que $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$. (Le faire d'abord pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Chapter 9

Séries de Fourier

On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$ que l'on notera aussi $L^2(-\pi,\pi)$. On va montrer que le système orthonormé

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{ikt})_{k\in\mathcal{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi,\pi)$. Cette base s'appelle la base de Fourier. On notera

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,$$

en sorte que pour toute f dans $L^2([-\pi,\pi])$ on puisse écrire

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2. Les $c_n(f)$ s'appellent les coefficients de Fourier de f et sont proportionnels aux coordonnées de f dans la base de Fourier.

Pour montrer ce résultat, on va commencer par analyser le comportement des coefficients de Fourier selon la régularité de f.

Lemme 9.1 *(Lemme de Riemann-Lebesgue)*
i) On pose pour $f\in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Si $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est k fois différentiable et telle que $f^{(k)}\in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\hat{f}(\xi)|\le\frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{iax}dx\to 0$ quand $|a|\to\infty$.
iii) Application aux coefficients de Fourier : si $f\in L^1(-\pi,\pi)$,

$$\lim_{|n|\to\infty}c_n(f)=0.$$

Remarque 9.1 Si $f\in L^2$, on sait immédiatement que $c_n(f)\to 0$ car $c_n(f)$ s'interprètent comme les coordonnées de f sur un système orthonormé.

Démonstration i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant $\hat{f}$, on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\hat{f}(\xi)| = |\frac{1}{(i\xi)^k}\int f^{(k)}(x)e^{-ix\xi}dx| \leq \frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

ii) Soit f_n une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact qui tendent vers f dans L^1 (proposition 6.3). On a, pour n fixé assez grand : $||f_n - f||_1 \leq \varepsilon$, ce qui implique $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour tout ξ. En utilisant (i), on voit que $|\hat{f}_n(\xi)| \to 0$ quand n est fixé et $|\xi| \to \infty$. Donc $|\hat{f}_n(\xi)| \leq \varepsilon$ pour ξ assez grand. Finalement,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

pour ξ assez grand. $\circ$

La proposition suivante nous dit que la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ en tout point x où f est suffisamment régulière.

Proposition 9.1 *(Principe de localisation)*
Si $f \in L^1(-\pi,\pi)$ et si la fonction $y \to \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est intégrable sur un voisinage de x, alors $\lim_{N\to\infty} s_N f(x) = f(x)$, où on a noté : $s_N f(x) =: \sum_{|n|\leq N} c_n(f)e^{inx}$.

Expliquons pourquoi le résultat précédent s'appelle principe de localisation. Alors que $s_N(f)$ est le résultat d'un calcul intégral sur tout l'intervalle $[-\pi,\pi]$, et donc d'un calcul global, le comportement de $s_N f(x)$ dépend du comportement local de f au voisinage de x. Il y a donc "localisation".

Démonstration **Etape 1** On se ramène au cas $f(x) = 0, x = 0$.
Supposons la proposition démontrée pour $x = 0$, $f(x) = 0$. Soit maintenant $g \in L^1(-\pi,\pi)$ telle que $\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ soit intégrable au voisinage de x. Alors on pose $f(y) = g(x+y) - g(x)$. On a bien $f(0) = 0$ et $\frac{f(y)}{y} = \frac{g(x+y)-g(x)}{y}$ est intégrable au voisinage de 0. Donc, par hypothèse, $s_N f(0) \to f(0) = 0$. Mais

$$s_N f(0) = \sum_{|n|\leq N} c_n(g(x+y) - g(x)) = \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(x+y) - g(x))e^{-iny}dy$$

$$= (\sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-in(z-x)}dz) - g(x) = (\sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi}e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}dz) - g(x)$$

$$= s_N g(x) - g(x).$$

Donc $s_N g(x) \to g(x)$. En fait, l'argument précédent montre que s_N commute avec les translations :

$$s_N[g(.+x)] = (s_N g)(.+x).$$

Etape 2 On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy. \tag{9.1}$$

En effet, $\sum_{-N}^{N} e^{iky} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$, ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique.

Etape 3 Par l'étape 1 il suffit de montrer que si $f \in L^1(-\pi,\pi)$ et si $\frac{f(y)}{y}$ est intégrable autour de 0, alors $s_N f(0) \to 0$. Comme sur $[-\pi,\pi]$, $|\sin\frac{y}{2}| \geq \frac{|y|}{\pi}$, on a

$$|\frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}}| \leq \frac{\pi|f(y)|}{|y|} \in L^1(-\pi,\pi).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $\frac{f(y)}{\sin\frac{y}{2}}$. On conclut que l'intégrale de (9.1) définissant $s_N f(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. ◦

Corollaire 9.1 *Le système*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(e^{ikt})_{k\in\mathcal{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(-\pi,\pi)$. *Notant* $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx$, *on a donc pour toute* f *dans* $L^2([-\pi,\pi])$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2.

Démonstration On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$, où les a_k sont des nombres complexes. Pour montrer que le système de Fourier est une base hilbertienne, il nous suffit de montrer que c'est un système total, c'est-à-dire que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de $L^2(-\pi,\pi)$. Mais le lemme 9.1 (Principe de localisation) nous assure que si f est (e.g.) $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, alors $s_N(f)(x) \to f(x)$ en tout point. Comme de plus les coefficients de la série de Fourier de f vérifient $|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^2}$, la série de Fourier est en fait uniformément convergente et donc converge aussi dans $L^2([-\pi,\pi])$ vers f. Or, les fonctions $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodiques forment un sous-espace dense de $L^2([-\pi,\pi])$. En effet, par le corollaire 6.3, les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[-\pi,\pi]$ sont denses dans $L^2(-\pi,\pi)$. On conclut que le système de Fourier est total, et donc une base hilbertienne. ◦

Corollaire 9.2 *si* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *est Höldérienne d'exposant* $0 < \alpha \leq 1$ *en* x *(c'est-à-dire* $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ *), alors* $s_N f(x) \to f(x)$. *Cette conclusion s'applique si* f *est une primitive sur* $[-\pi,\pi]$ *d'une fonction de* $L^2(-\pi,\pi)$.

Démonstration L'application du principe de localisation est immédiate : $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leq |x-y|^{\alpha-1}$ qui est bien intégrable au voisinage de x. Soit maintenant f une fonction qui est la primitive sur $[-\pi,\pi]$ d'une fonction de $L^2(-\pi,\pi)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = |\int_y^x f'(t)dt| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}}(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est donc Hölderienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et le principe de localisation s'applique. $\circ$

Remarque 9.2 (importante) *Le principe de localisation, quand il s'applique, nous assure que les sommes* symétriques, $s_n f(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)e^{ikx}$ *de la série de Fourier convergent vers* $f(x)$. *Le fait que le système de Fourier soit une base hilbertienne nous en dit plus, et moins. En effet, si* $f \in L^2([-\pi, \pi])$, *on peut assurer que les sommes asymétriques,* $s_{m,n}f(x) = \sum_{-m\leq k\leq n} c_k(f)e^{ikx}$ *convergent dans* L^2 *vers* f *quand* $n, m \to +\infty$. *Mais, attention : cette convergence n'est pas ponctuelle.*

9.1 Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ implique qu'on la considère comme une fonction $2\pi-$périodique, puisque la série de Fourier l'est.

Définition 9.1 et proposition *Si* $f \in L^1([-\pi, \pi])$ *et* $g \in L^1([-\pi, \pi])$, *on prolonge* f *et* g *en des fonctions* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$ *et on pose* $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$. *La fonction* $f * g$ *ainsi définie appartient à* $L^1(-\pi, \pi)$ *et est* 2π*-périodique.*

Exercice 9.1 En reprenant l'argument du théorème 8.3, montrer que si $T : L^2_{periodique}([-\pi, \pi]) \to C^0_{periodique}([-\pi, \pi])$ est linéaire, continu et commute avec les translations, alors il existe une fonction $g \in L^2([-\pi, \pi])$ telle que $Tf = g * f$, où "$*$" désigne la convolution périodique.'

Théorème 9.1 *Si* $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, *alors* $f * g$ *est continue et* $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$. *De plus, la série de Fourier de* $f * g$ *converge uniformément vers* $f * g$.

Remarquons que la relation précédente montre l'effet régularisant de la convolution : les hautes fréquences de $f * g$ sont plus faibles que celles de f, puisque $c_n(g)$ tend vers zéro.

Démonstration i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f * g)(t)| \leq \int |f(t-s)||g(s)|ds \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}.$$

Donc $f * g \in L^2(-\pi, \pi)$ et on a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur $[-\pi, \pi]$ ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) :

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int\int f(t-s)g(s)e^{-int}dsdt = \frac{1}{2\pi} \int\int f(t-s)e^{-in(t-s)}g(s)e^{-ins}dsdt$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\int g(s)e^{-ins}ds)(\int f(u)e^{-inu}du) = c_n(f)c_n(g).$$

Le terme général de la série de Fourier de $f * g$ vérifie

$$|c_n(f * g)e^{inx}| = |c_n(f)||c_n(g)| \leq |c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2.$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de $f * g$ est donc uniformément convergente. Sa limite est donc continue. Remarquer que si $f_n \to f$ dans L^2 et si $f_n \to g$ presque partout, alors $f = g$: c'est une conséquence de la réciproque du théorème de Lebesgue. $\circ$

Corollaire 9.3 *Autres bases de Fourier. Les fonctions*

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} cos(\frac{2k\pi t}{T}), \sqrt{\frac{2}{T}} sin(\frac{2k\pi t}{T}), k = 1, 2, ...$$

forment une base hilbertienne de $L^2(0, T)$.
ii) Il en est de même pour les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} cos(\frac{k\pi t}{T}), k = 1, 2, ...$$

La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la "transformée en cosinus."
La "base en sinus", $\sqrt{\frac{2}{T}} sin(\frac{k\pi t}{T}), k = 1, 2, ...$

Démonstration i) Cette première base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne, alors le système $f_0 = e_0$,..., $f_{2k} = \frac{e_k+e_{-k}}{\sqrt{2}}$, $f_{2k+1} = \frac{e_k-e_{-k}}{\sqrt{2}}$, ... aussi.
ii) Si $f \in L^2(0, T)$, on lui associe la fonction paire $\tilde{f}$ sur $[-T, T]$ qui coïncide avec f sur $[0, T]$. On décompose $\tilde{f}$ sur la base de Fourier de $[-T, T]$. La base de Fourier sur $[-T, T]$ est formée des fonctions $\frac{1}{\sqrt{2T}} e^{\frac{i\pi kt}{T}}$. Donc on a
$\tilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2T} (\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t) e^{\frac{-i\pi kt}{T}} dt) e^{\frac{i\pi kx}{T}}$. Comme $\tilde{f}$ est paire, on voit en faisant le changement de variables $t \to -t$ dans les intégrales que les coefficients de $e^{\frac{i\pi kt}{T}}$ et $e^{\frac{-i\pi kt}{T}}$ sont égaux. On remarque aussi que $\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t) e^{\frac{i\pi kt}{T}} dt = 2 \int_0^T f(t) \cos(\frac{\pi kt}{T}) dt$. Aussi,
$\tilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \tilde{f}(t) dt + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{2T} (\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t) e^{\frac{-i\pi kt}{T}})(e^{\frac{i\pi kx}{T}} + e^{\frac{i\pi kx}{T}})$, et donc
$f(x) =_{L^2} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{2}{T} (\int_0^T f(t) \cos(\frac{\pi kt}{T})) \cos(\frac{\pi kx}{T})$. Comme les fonctions $\frac{1}{\sqrt{T}}$, $\sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\frac{\pi kx}{T})$ forment un système orthonormé de $L^2(0, T)$, l'égalité précédente exprime qu'elles forment en fait une base hilbertienne.

(iii) Si on prolonge la fonction f en une fonction impaire sur $[-T, T]$ et que l'on reprend le raisonnement précédent, on trouve la base en sinus. Cette base a la propriété, utile pour modéliser les cordes vibrantes, que ses éléments valent 0 aux extrémités de l'intervalle.

$\circ$

9.2 Exercices

Exercice 1

Soit $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $s_n \longrightarrow s$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j \longrightarrow s.$$

Exercice 2

Montrer qu'il existe $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $(s_n)_n$ ne converge pas et

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j \text{ converge.}$$

Exercice 3

On note $\mathcal{C}(\Pi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ 2\pi\text{-périodiques}\}$, que l'on munit de $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$. On notera $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$. Soit $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\quad n \in \mathbb{Z}.$$

On note

$$\begin{aligned} S_n(f,t) &= \sum_{-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikt},\quad n \in \mathbb{N} \text{ et} \\ \sigma_n(f,t) &= \frac{1}{n+1}\sum_0^n S_j(f,t). \end{aligned}$$

1) On pose $D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{ikt}$ et $K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_0^N D_j(t)$, pour $N \in \mathbb{N}$.
Montrer que

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}},\quad t \neq 0,\quad D_N(0) = 2N+1, \\ K_N(t) &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,\quad t \neq 0,\quad K_N(0) = N+1. \end{aligned}$$

2) Vérifier que $K_N(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|K_N\|_1 = 1$ et que $\forall \delta > 0$, $K_N \longrightarrow 0$ uniformément sur $\delta \leq |t| \leq \pi$.
3) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ uniformément sur $[-\pi,\pi]$. (Remarquer que $\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t-x)dx = K_n \star f(t) = f \star K_n(t)$.)
4) On appelle polynome trigonométrique, toute fonction de la forme $\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikt}$.
En déduire que les ploynomes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et que si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $f = g$.
5) Théorème de Du Bois-Reymond :
$\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\limsup |S_n(f,0)| = +\infty$.
Pour démontrer ce résultat, on définit $\Lambda_n : \mathcal{C}(\Pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Lambda_n(f) = S_n(f,0)$.

a) Vérifier que $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$.

b) Montrer que $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.
c) Montrer que $\|D_n\|_1 \longrightarrow +\infty$ (par exemple : $\|D_n\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2} \log(n+1)$).
d) En déduire que $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f,0)| = +\infty$.

Chapter 10

Séries de Fourier et distributions périodiques

Dans toute la suite, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, borné ou pas. On note $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans I. On appelle distribution dans I toute forme linéaire u sur $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ ayant la propriété de continuité suivante : Pour tout intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$ il existe un entier p et une constante C tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(J)$ à support inclus dans J,

$$| < u, \varphi > | \leq C \max_{i \leq p} \max_{x \in J} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Cette relation exprime que la forme linéaire u n'agit que sur φ et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p. Si $u \in L^1_{loc}(I)$ est une fonction intégrable sur tout borné de I, on voit immédiatement que l'on peut l'identifier à une distribution $\tilde{u}$ dans I en posant, pour φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(I)$,

$$< \tilde{u}, \varphi >= \int_I u(x)\varphi(x)dx.$$

Exercice 10.1 Montrer que si deux distributions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ dans I sont associées à des fonctions u et v appartenant à $L^1_{loc}(I)$ et si elles sont deux distributions égales, alors $u = v$.

Exercice 10.2 Montrer que $< \delta_x, \varphi >= \varphi(x)$ est une distribution dans $\mathbb{R}$, appelée masse de Dirac en x. Montrer qu'il en est de même pour le "peigne de Dirac" $u = \sum_n \delta_{2k\pi}$ et pour $< \delta_x^{(k)}, \varphi >= (-1)^k \varphi^{(k)}(x)$.

On admettra le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 10.1 *si u_n est une suite de distributions dans I telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $< u_n, \varphi >$ converge vers une valeur que l'on note $< u, \varphi >$, alors u est aussi une distribution dans I.*

Voir l'exercice 2 à la fin de ce chapitre.

Exercice 10.3 Montrer que si $u_n \in L^1_{loc}$ converge vers u dans L^1_{loc}, alors aussi $u_n \to u$ au sens des distributions.

Définition 10.1 et proposition *Si u est une distribution dans I, alors on appelle dérivée k-ième de u la distribution dans I définie par $< u^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < u, \varphi^{(k)} >$. Si u est $\mathcal{C}^k$ dans I, alors sa dérivée classique, notée $\{u\}^{(k)}$ coïncide avec sa dérivée au sens des distributions, $u^{(k)}$.*

Démonstration Si u est $\mathcal{C}^k$ dans I, on a $< \{u\}^{(k)}, \varphi >= \int_I \{u\}^{(k)}(x)\varphi(x)$ et en intégrant par parties k fois, on obtient

$$< \{u\}^{(k)}, \varphi >= (-1)^k \int_I u(x)\varphi^{(k)}(x)dx =< u^{(k)}, \varphi > .$$

$\circ$

Théorème 10.2 (formule des sauts) *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ la suite discrète de ses sauts. On désigne par $\{f\}'$ la dérivée ponctuelle de f et par $f(a_n^{\pm})$ les limites à gauche et à droite de f en a_n. Alors la dérivée distributionnelle f' de f est donnée par*

$$f' = \{f\}' + \sum_n (f(a_n^+) - f(a_n^-))\delta_{a_n}.$$

Démonstration Prendre φ dans $\mathcal{C}_0^\infty$ et intégrer par parties $< f', \varphi >= -\int f\varphi'$. $\circ$

Que se passe-t-il quand la dérivée au sens des distributions d'une fonction est nulle ?

Lemme 10.1 *Soit $f \in L^1(I)$ telle que $f' = 0$, c'est-à-dire*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I f(x)\varphi'(x)dx = 0. \tag{10.1}$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration Voir l'exercice 3 à la fin de ce chapitre. $\int_I \psi(x)dx = 1$. $\circ$

Proposition 10.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $f \in L^2(0, 2\pi)$. On a le droit de dériver la série de Fourier de f autant de fois que l'on veut et on a donc*

$$f^{(p)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^p c_k(f)e^{ikt}, \tag{10.2}$$

cette égalité étant valide comme égalité de deux distributions dans $\mathbb{R}$.

Remarque 10.1 L'égalité est aussi valide comme égalité de deux distributions dans $]0, \pi[$ ou en fait dans tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Démonstration On remarque d'abord que si I est un ouvert et u une fonction dans $L^2(I)$, dans L^1, ou dans L^p_{loc}, alors elle est une distribution dans I, car toute fonction de $L^1_{loc}(I)$ est une distribution dans I. De plus, si une suite de fonctions u_n converge dans l'un des ces espaces, elle converge aussi au sens des distributions dans I. Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ et est 2π-périodique, elle est une distribution qui est la somme (au sens L^2_{loc} et donc au sens des distributions dans $\mathbb{R}$) de la série $\sum_k c_k(f)e^{ikt}$. Soient $s_{n,m}(f) = \sum_{-m}^n c_k(f)e^{ikt}$ les sommes partielles de la série de Fourier. Comme $s_{n,m}(f)$ tend vers f au sens des distributions quand n et m tendent vers l'infini, $s_{n,m}(f)^{(p)}$ tend vers $f^{(p)}$ au sens des distributions. Dérivant terme à terme $s_{n,m}(f)$, on obtient

$$f^{(p)} = \sum_k (ik)^p c_k(f) e^{ikt},$$

la convergence de la série se faisant au sens des distributions dans $\mathbb{R}$. ◦

Exercice 10.4 Montrer que si u est une distribution et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors fu définie par

$$< fu, \varphi >=< u, f\varphi >$$

est bien une distribution

Exercice 10.5 Dérivée de la masse de Dirac
Démontrer que $x\delta_0' = -\delta_0$.

Solution On calcule

$$< x\delta_0', \varphi >=< \delta_0', x\varphi >= - < \delta_0, (x\varphi)' >= - < \delta_0, \varphi + x\varphi' >=$$

$$-\varphi(0) =< -\delta_0, \varphi > .$$

◦

Proposition 10.2 *(Peigne de Dirac et formule sommatoire de Poisson) On pose*

$$< \tilde{\delta}, \varphi >= \sum_{n\in\mathcal{Z}} \varphi(2n\pi).$$

On l'appelle la "2π-périodisée" de la masse de Dirac, ou "peigne de Dirac". Alors $2\pi\tilde{\delta} - 1 = s'$ est la dérivée de la fonction "en dents de scie", 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $s(x) = \pi - x$ et on a

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\pi}\sum_n e^{inx},$$

ce qui se traduit pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ par la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \hat{\varphi}(p).$$

Démonstration Par intégration par parties, $c_n(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)e^{inx}dx = \frac{1}{in}$. Donc le développement en série de Fourier de s est

$$s = \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{in} e^{inx},$$

la convergence se faisant au sens L^2_{loc}, donc aussi au sens L^1_{loc} et donc aussi au sens des distributions. On dérive terme à terme cette dernière formule (au sens des distributions) et on obtient donc

$$s' = \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} e^{inx}.$$

La formule des sauts (théorème 10.2) nous donne $s' = -1 + \sum_{n\in\mathbf{Z}} 2\pi\delta_{2\pi n}$, les sauts de s aux points $2\pi n$ étant de $+2\pi$ et s étant $\mathcal{C}^1$ aux autres points et de dérivée ponctuelle égale à -1. On obtient donc

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2\pi\delta_{2\pi n} = 1 + \sum_{n\neq 0} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{inx},$$

soit la formule annoncée,

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{inx}.$$

La formule de Poisson s'obtient en appliquant cette dernière formule à une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ arbitraire. ◦

10.1 Distributions périodiques et leurs séries de Fourier

Définition 10.2 *Si $T \in \mathbb{R}$, on note $\tau_T u$ et on appelle "translatée de u de T" la fonction $\tau_T u(x) = u(x - T)$. Si u est une distribution, on pose*

$$< \tau_T u, \varphi > = < u, \tau_{-T}\varphi > .$$

On voit aisément que ces deux définitions sont compatibles quand u est une fonction de L^1_{loc}.

Définition 10.3 *On se donne un nombre $T > 0$, la "période", et lui associe la "fréquence" $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On dit qu'une distribution u est T-périodique si sa translatée $\tau_T u$ est égale à u.*

Proposition 10.3 *Soit $(\gamma_k)_{k\in Z}$ une suite à croissance lente, c'est-à-dire vérifiant une inégalité du type*

$$\forall k \in Z,\ |\gamma_k| \leq C(1 + |k|)^N.$$

Alors la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$ converge au sens des distributions et définit une distribution T-périodique.

Démonstration On pose

$$u(t) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{(ik\omega)^{N+2}} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

Il s'agit d'une série uniformément convergente, son terme général étant majoré par $\frac{C}{(1+|k|)^2}$. L'égalité précédente est donc valide au sens des distributions. En la dérivant $n + 2$ fois au sens des distributions, on obtient une nouvelle distribution et l'égalité

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = u^{(n+2)}.$$

Comme $u(t)$ est une fonction 2π-périodique, il est immédiat que $u^{(n+2)}$ est une distribution 2π-périodique. ∘

Proposition 10.4 *Si f est T-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, la suite des $c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{ik\omega t}$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire que l'on a $|c_k(f)| \leq C_N(1+|k|)^{-N}$ pour tout N et la différence*

$$f - \sum_L^{L'} c_k(f)e^{ik\omega t}$$

tend vers 0 uniformément ainsi que chacune de ses dérivées lorsque L et L' tendent vers $+\infty$.

Démonstration On obtient l'estimation $|c_k(f)| \leq C_N(1+|k|)^{-N}$ en intégrant par parties N fois $c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$. Grâce à cette estimation, la série $\sum_k c_k(f)e^{ik\omega t}$ et toutes ses dérivées terme à terme sont uniformément convergentes. On peut donc intervertir sommation et dérivation. ∘

Théorème 10.3 *(Unicité des coefficients de Fourier) Si γ_k est une suite à croissance lente telle que l'on ait $u = \sum_k \gamma_k e^{ik\omega t} = 0$ au sens des distributions, alors $\forall k, \gamma_k = 0$.*

Démonstration Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$,

$$< \sum_k \gamma_k e^{ik\omega t}, \varphi >= \sum_k \gamma_k < e^{ik\omega t}, \varphi >= \sum_k \gamma_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{ik\omega t}.$$

Le théorème résulte alors immédiatement du lemme qui suit.

∘

Lemme 10.2 $\forall k_0 \in \mathbf{Z},\ \exists \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty,\ \int \varphi(t)e^{ik\omega t}dt = \delta_{k,k_0}$.

Lemme 10.3 *Il existe $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\sum_{l\in Z} \chi(t+lT) = 1. \tag{10.3}$$

Démonstration Il suffit de prendre $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ positive partout et strictement positive sur $[0,T]$, puis de poser $\chi(t) = \frac{\phi(t)}{\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi(t+lT)}$. ∘

Démonstration du Lemme 10.2. On pose simplement $\varphi(t) = \chi(t)e^{-ik_0\omega t}$, où $\chi(t)$ définit une partition de l'unité (Lemme10.3). Alors

$$\int \varphi(t)e^{ik\omega t}dt = \int \chi(t)e^{i(k-k_0)\omega t}dt =$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} \int_{lT}^{(l+1)T} \chi(t)e^{i(k-k_0)\omega t}dt = \sum_{l} \int_0^T \chi(t+lT)e^{i(k-k_0)\omega t}dt =$$

$$\int_0^T \sum_{l\in\mathbf{Z}} \chi(t+lT)e^{i(k-k_0)\omega t}dt = \int_0^T e^{i(k-k_0)\omega t}dt = \delta_{k,k_0}.$$

$\circ$

10.2 Espaces de Sobolev périodiques $H^m_{per}(0, 2\pi)$

Définition 10.4 *On appelle espace de Sobolev périodique d'ordre $m \geq 1$ et on note $H^m_{per}(0, 2\pi)$ l'ensemble des fonctions 2π périodiques sur $\mathbb{R}$, appartenant à $L^2(0, 2\pi)$ et telles que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $1, ..., m$ appartiennent à $L^2(I)$. On le munit de la norme*

$$||u||_{H^m_{per}} = (\sum_{n\leq m} ||u^{(n)}||_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H^m_{per}} = \sum_{n\leq m} \int_{[0,2\pi]} u^{(n)}(x)\overline{v^{(n)}(x)}dx.$$

Les espaces $H^m_{per}(0, 2\pi)$ sont particulièrement faciles à étudier grâce au fait qu'ils sont caractérisés par le comportement de leur série de Fourier. Dans toute la suite de ce chapitre, on note $I =]0, 2\pi[$.

Proposition 10.5 *Si $u \in H^m_{per}$, alors pour tout $n \leq m$, les coefficients de $u^{(n)}$ vérifient*

$$c_k(u^{(n)}) = (ik)^n c_k(u).$$

Démonstration En effet, on a vu que si $u \in L^2(I)$, alors on peut écrire

$$u = \sum_k c_k(u)e^{ikt}, \; c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} u(t)dt,$$

cette égalité s'étendant à $\mathbb{R}$ à condition de périodiser u. En conséquence,

$$u^{(n)} = \sum_k c_k(u)(ik)^n e^{ikt},$$

la convergence se faisant au sens des distributions dans $\mathbb{R}$. Comme on a supposé que $u^{(n)}$ est dans $L^2(I)$, $u^{(n)}$ admet un développement en série de Fourier dont les coefficients $(c_k(u^{(n)}))_k$ appartiennent à $L^2(\mathbf{Z})$. Par unicité du développement de Fourier (théorème 10.3), on a

$$c_k(u)(ik)^n = c_k(u^{(n)}).$$

$\circ$

Proposition 10.6 *Les fonctions de* H^m_{per} *appartiennent à* C^{m-1}. *En particulier, les fonctions de* $H^1_{per}(I)$ *sont continues.*

Démonstration Prenons $n=1$. Alors $c_k(u)=\frac{1}{ik}c_k(u')$ est le produit de deux séries appartenant à $l^2(\mathbf{Z})$. Donc $c_k(u)\in l^1$ et donc la série $\sum_k c_k e^{ikt}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La limite est donc continue et donc u est continue (ou, pour être exact, u est égale presque partout à une fonction continue et est donc continue). On conclut la démonstration en remarquant que u est dans H^m_{per} si et seulement si $u^{(m-1)}$ est dans H^1_{per}. $\circ$

Proposition 10.7 *Les espaces* $H^m_{per}(0,2\pi)$ *sont des espaces de Hilbert et leur norme peut s'écrire*

$$||u||^2_{H^m_{per}}=\sum_{n\leq m}||u^{(n)}||^2_{L^2}=\sum_k|c_k(u)|^2(1+|k|^2+...+|k|^{2m}).$$

Une norme hilbertienne équivalente est $|u|^2_{H^m_{per}}=\sum_k|c_k(u)|^2(1+|k|^{2m})$.

Démonstration L'application $u\in H^m_{per}\to(c_k(u)(1+|k|^2+...+|k|^{2m})^{\frac{1}{2}}$ est une isométrie de $H^m_{per}(0,2\pi)$ sur $l^2(\mathbf{Z})$ qui est un espace de Hilbert. H^m_{per} est donc aussi un espace de Hilbert. L'équivalence des normes est immédiate. $\circ$

Théorème 10.4 *(première application) On considère le problème de l'élastique chargé,*

$$-u''+u=f,\ u(0)=v(2\pi)=0, \tag{10.4}$$

où $f\in L^2([0,2\pi])$. *Alors il existe une unique* $u\in L^2([0,2\pi])$ *solution (au sens des distributions !) de (10.4). Cette solution appartient en fait à* $H^2_{per}([0,2\pi])$

Démonstration Pour avoir de manière naturelle les conditions aux limites $u(0)=u(2\pi)=0$, il est convenable d'utiliser la base en sinus $(\sin(\frac{kt}{2}))$, $k\in\mathbb{N}^*$. On développe u et f dans cette base de Fourier et on identifie les coefficients de Fourier à droite et à gauche de l'équation, comme on le peut en vertu de l'unicité des coefficients de Fourier d'une distribution. (Cette unicité entraîne immédiatement l'unicité des coefficients sur la base en sinus, puisque les coefficients en sinus de u ne sont autres que les coefficients de Fourier classiques sur $[-2\pi,2\pi]$ de u prolongée en une fonction impaire). On pose donc $c_k(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\sin\frac{kt}{2}dt$ et on a $u=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}c_k(u)\sin\frac{kt}{2}$. L'équation (10.4) est alors équivalente à

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ (k^2+1)c_k(u)=c_k(f),\ \text{soit}$$

$$c_k(u)=\frac{c_k(f)}{1+k^2}.$$

Donc $u = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{c_k(f)}{1+k^2}\sin\frac{k}{2}t$, qui appartient bien à H^2_{per}. Remarquer que u n'est pas nécessairement $\mathcal{C}^2$ et que donc l'équation n'a pas de sens classique ! Par contre, comme $u \in H^2_{per}$, u est $\mathcal{C}^1$. Comme u est impaire, on a bien $u(0) = u(2\pi) = 0$. ◦

10.3 Exercices

Exercice 1

1) Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbb{R}$?

$$\varphi \to \sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(n), \qquad \varphi \to \sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

2) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et qu'il n'existe pas $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$.
Définition : Les distributions du type T_f sont appelées "fonctions".

Exercice 2

Rappel :
Pour K compact de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \in K\}$ qui est naturellement muni de la topologie définie par la famille de semi-normes $p_j(\varphi) = \sup_{m\leq j} \sup_K |\varphi^m(x)|$. On rappelle qu'une partie U de $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ est ouverte si ou bien $U = \emptyset$ ou bien $\forall \varphi \in U$, $\exists j, r$ tels que la boule $B_j(\varphi, r) = \{\psi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), p_j(\varphi - \psi) < r\} \subset U$. (on pourra vérifier que l'on définit bien ainsi une topologie.)
Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la suite $< T_n, \varphi >$ converge vers une limite que l'on note $< T, \varphi >$, on veut montrer que la forme linéaire T est une distribution.
Avec les notations du rappel, on pose $E = \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ et

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(f - g)).$$

1) Vérifier que d est une distance sur E. Montrer que sur E, la topologie de la distance d est équivalente à la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_n)_n$.
2) Vérifier que (E, d) est complet. On pose $F_k = \{\varphi \in E : \forall n, | < T_n, \varphi > | \leq k\}$. Montrer que $\exists k_0, i_0, \varphi, r$ tels que $B_{i_0}(\varphi, r) \subset F_{k_0}$. En déduire que T est continue sur E et donc que T est bien une distribution.
Remarque : On peut remplacer $\mathbb{R}$ par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 3

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\theta_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta_0 = 1$.

a) Vérifier que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\exists(\lambda, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(I)$ tel que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.
b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est une fonction constante.
c) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 4

Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^{k} a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $a_j \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant $\psi(0) = \psi'(0) = ... = \psi^{k-2}(0) = 0$ et $\psi^{k-1}(0) = \frac{1}{a_k}$.
1) Soit $Y = 1_{\mathbb{R}^+}$, on pose $E = T_{Y\psi}$. Vérifier que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer $\sum_{j=0}^{k} a_j E^{(j)}$.
2) Donner une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $E'' + E' + E = \delta_0$.

Chapter 11

Espaces de Sobolev sur l'intervalle

Dans toute la suite, $I =]a, b[$ représente un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, borné ou non.

Définition 11.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre $m \geq 1$ et d'exposant $p \geq 1$ sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ l'ensemble des fonctions de $L^p(I)$ telles que leurs dérivées au sens des distributions d'ordre $1, ..., m$ appartiennent à $L^p(I)$. On note cet espace $W^{m,p}(I)$ et on le munit de la norme*

$$||u||_{W^{m,p}} = \sum_{n \leq m} ||u^{(n)}||_{L^p}.$$

Si $p = 2$, on note $H^m = W^{2,m}$ et on prend pour norme

$$||u||_{H^m} = (\sum_{n \leq m} ||u^{(n)}||^2_{L^2})^{\frac{1}{2}},$$

associée au produit hermitien

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{n \leq m} \int_I u^{(n)}(x)\overline{v^{(n)}(x)}dx.$$

Une fonction u appartient donc à $W^{1,p}(I)$ si $u \in L^p(I)$ et sa dérivée au sens des distributions dans I est dans L^p. Cela veut dire

$$\exists v (= u') \in L^p,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I),\ \int_I v(x)\varphi(x)dx = -\int_I u(x)\varphi'(x)dx.$$

Théorème 11.1 *Si $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $\tilde{u} \in C^0(I)$ (c'est-à-dire continue dans I) telle que $u = \tilde{u}$ presque partout dans I et*

$$\forall x, y \in \overline{I},\ \int_x^y u'(t)dt = \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) \tag{11.1}$$

Démonstration Comme $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est dense dans $L^1(I)$ (Corollaire 6.2), on peut choisir une suite $v_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ qui converge vers u' dans $L^1(I)$. On pose $u_\varepsilon(x) = \int_a^x v_\varepsilon(x)dx$. La suite u_ε converge uniformément sur tout compact de I vers une fonction w continue sur I. Alors d'une part, si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$,

$$\int_I u_\varepsilon \varphi' = -\int v_\varepsilon \varphi \to -\int u'\varphi = \int u\varphi'$$

$$\text{et d'autre part } \int_I u_\varepsilon \varphi' \to \int w\varphi'.$$

$$\text{Donc } \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \ \int (w-u)\varphi' = 0,$$

ce qui prouve par le lemme 10.1 que $w - u$ est égale presque partout à une constante C. On conclut en posant $\tilde{u} = w - C$. ◦

Proposition 11.1 *Si $p < \infty$, alors toute fonction $u \in W^{1,p}$ se prolonge en une fonction continue sur la fermeture $\overline{I}$. Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on a de plus $u(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.*

Démonstration Si $p < \infty$ et si I est borné, on déduit immédiatement de la relation $|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(t)|dt$ que $u(x)$ est une suite de Cauchy quand x tend vers a ou b et on peut donc définir u comme une fonction continue sur $[a, b]$. Si I est non borné et $u \in W^{1,1}(I)$, on déduit par la même inégalité que $u(x)$ a une limite quand $x \to +\infty$ (par exemple). Cette limite ne peut être que zéro, puisque u est intégrable. Si $p > 1$, on écrit, par l'inégalité de Hölder,

$$|u|^p(x) - |u|^p(y) = p\int_x^y u'|u|^{p-2}u(x)dx \leq p(\int_x^y |u'|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_x^y |u|^p)^{\frac{1}{p'}},$$

ce qui implique encore que $u(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. ◦

Définition 11.2 *Si $I =]a, b[$ et que a ou b est fini, on note $W_0^{1,p}(I)$ le sous-espace des fonctions $u \in W^{1,p}(I)$ telles que $u(a) = u(b) = 0$. Cette définition a un sens grâce à la proposition précédente : on prend pour $u(a)$ et $u(b)$ les valeurs limites du représentant continu de u. Dans le cas particulier où $p = 2$, on note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

Remarque 11.1 Rappelons qu'en vertu de la proposition 11.1, si I est non borné, $u(x)$ tend vers 0 quand $x \to \infty$.

Théorème 11.2 *$\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est dense dans $W_0^{1,p}(I)$. En particulier, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$.*

Démonstration **Etape 1** Regardons d'abord le cas où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soit $u \in W_0^{1,p}(I)$ et $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ telle que $g_\varepsilon \to u'$ dans $L^p(I)$. Comme $\int_I u'(x)dx = 0$, il en résulte que $\int_I g_\varepsilon(x)dx \to 0$. Fixons $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ telle que $\int \varphi(x)dx = 1$. Alors aussi

$$v_\varepsilon = g_\varepsilon - \varphi \int_I g_\varepsilon \to u'$$

et on a maintenant $\int_I v_\varepsilon = 0$. On voit immédiatement que sa primitive $u_\varepsilon(x) = \int_a^x v_\varepsilon(x)dx$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ et par la relation (11.1) on déduit que u_ε converge uniformément (et donc dans $W^{1,p}$) vers u_0.

Etape 2 Supposons maintenant que I est non borné et traitons sans perte de généralité le cas $I =]0, +\infty[$. Grâce à l'étape 1, il suffit que nous montrions que toute fonction $u \in W^{1,p}(]0, +\infty[)$

est approchable par des fonctions u_n dans $W^{1,p}(]0,n[)$. Pour cela, on considère une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(x)| \leq 1$ et à support dans $]-1,1[$ et on pose simplement $u_n = u\varphi(\frac{x}{n})$. Par le théorème de Lebesgue, $u_n \to u$ dans L^p ($|u|^p$ est chapeau intégrable) et on a aussi $u_n' \to u'$ dans L^p. En effet,

$$u_n' = \frac{1}{n}\varphi'(\frac{x}{n})u + u'\varphi(\frac{x}{n}).$$

Or, le premier terme tend vers 0 dans L^p, φ' étant bornée, et le second terme tend vers u', à nouveau par le théorème de Lebesgue. On conclut que u_n tend vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. ∘

L'introduction de $W_0^{1,p}$ nous permet d'introduire un nouveau point de vue sur l'équation de la corde élastique chargée.

Théorème 11.3 *(Le point de vue variationnel) La solution de l'équation (10.4) se caractérise comme l'unique minimum de la fonction continue et coercive sur $H_0^1(I)$ définie par*

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_I ((u'(x)^2 + u(x)^2) - \int_I f(x)u(x)dx.$$

Démonstration On considère la forme bilinéaire sur $H_0^1([0,2\pi])$,

$$a(u,v) = \int_I (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx.$$

Comme $a(u,u) = ||u||^2_{H_0^1}$ est coercive, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram (théorème 8.6) et il existe un unique minimum de $\frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)$, qui satisfait de plus

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx = \int_I f(x)u(x)dx.$$

Comme $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est contenu dans $H_0^1(I)$, on a aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I (u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x))dx = \int_I f(x)\varphi(x)dx$$

$$\text{et donc } \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty,\ < -u'' + u, \varphi > = < f, \varphi >,$$

ce qui veut dire que u vérifie l'équation $-u'' + u = f$ au sens des distributions. ∘

11.1 Les espaces $W^{1,p}(I)$ comme espaces de Banach

Théorème 11.4 *$W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration Soit u_n une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$. Il existe donc $(u,g) \in (L^p(I))^2$ tels que

$$u_n \to u \text{ dans } L^p,\ u_n' \to g \text{ dans } L^p.$$

Comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, on a

$$\int_I u_n \varphi' + \int_I u_n' \varphi = 0,$$

on obtient en passant à la limite $\int_I u\varphi' + \int_I g\varphi = 0$, ce qui veut dire que $u' = g$ et donc que $u \in W^{1,p}$. On conclut que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$.

$\circ$

Théorème 11.5 *(Dual de $W^{1,p}(I)$) Si $1 \le p < \infty$, toute forme linéaire f sur $W^{1,p}(I)$ peut s'écrire sous la forme*

$$f(u) = \int_I gu + \int_I hu',\ \text{ où } g,h \in L^{p'}. \tag{11.2}$$

Réciproquement on peut associer à tout couple $g,h \in L^{p'}(I)$ une forme linéaire sur $W^{1,p}(I)$ par la formule (11.2).

Démonstration On a $f(u) \le C(||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p})$. On considère le plongement $u \in W^{1,p} \to I(u) = (u,u') \in (L^p)^2$. Donc $\tilde{f} = f \circ I$ vérifie, sur l'image $I(W^{1,p})$,

$$|\tilde{f}(v,w)| \le C(||v||_{L^p} + ||w||_{L^p}).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre $\tilde{f}$ à $(L^p)^2$ et par le théorème de Riesz il existe donc des fonctions $g,h \in (L^p)' = L^{p'}$ telles que $\tilde{f}(v,w) = \int gv + \int hw$. Donc $f(u) = \int gu + \int hu'$. La réciproque est immédiate. Remarquer que $||f||_{(W^{1,p})'} = \max(||g||_{L^{p'}}, ||h||_{L^{p'}})$. $\circ$

Remarque 11.2 La formule (11.2) appliquée avec $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ montre que la restriction $\tilde{f}$ de f à $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ est une distribution sur I et que l'on a $\tilde{f} = g - h'$. On peut donc considérer, en identifiant f et $\tilde{f}$, les éléments de $W^{1,p}$ comme des distributions et on écrit donc

$$(W^{1,p}(I))' = \{g - h',\ g,h \in L^{p'}(I)\}.$$

Corollaire 11.1 *$W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \le p < \infty$.*

Démonstration En effet, le plongement de $W^{1,p}$ dans $(L^p)^2$ en fait un sous-espace fermé d'un espace réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \le p < \infty$. $\circ$

Exercice 11.1 Montrer que toute fonction de $W^{1,p}([a,b])$ peut se prolonger en une fonction Pu de $W^{1,p}(\mathbb{R})$. On symétrisera $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ en posant par exemple $Pu(a-x) = u(a+x)$ si $0 \le x \le b-a$, on périodisera ensuite la fonction obtenue (période $2(b-a)$) et on la multipliera finalement par une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur I. On vérifiera que le prolongement P :

$u \to Pu$ ainsi obtenu est une application continue de $W^{1,p}(I)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, il suffit bien-sûr de faire une symétrisation par rapport à la borne finie de l'intervalle.

Exercice 11.2 . Déduire de l'exercice précédent et du théorème 11.2 que si $I =]a, b[$ est un intervalle borné, alors les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont denses dans $W^{1,p}(I)$.

Exercice 11.3 (Inégalité de Poincaré) Si $u \in W^{1,p}(]a, b[)$, $-\infty < a < b < +\infty$, alors

$$||u||_{W^{1,p}} \leq (1 + b - a)||u'||_{L^p}.$$

Marche à suivre : utiliser l'inégalité de Hölder et le fait que u est une primitive de u'.

Exercice 11.4 Produit de deux fonctions de $W^{1,p}$. Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$. On dit que $W^{1,p}$ est une algèbre de fonctions.
Si $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$, alors $G(u) \in W^{1,p}(I)$ et $(G(u))' = G'(u)u'$.
Si $\eta \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ est bornée et de dérivée bornée, alors $\eta u \in W^{1,p}(I)$ et $(\eta u)' = \eta u' + \eta' u$. Indication : commencer par remarquer (exercice 11.1) qu'il suffit de montrer les énoncés précédents quand $I = \mathbb{R}$. Utiliser des arguments de densité: $\mathcal{C}_0^\infty$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 11.5 Montrer que les inclusions suivantes sont continues et compactes :

$$W^{1,p}(I) \subset C(\bar{(I)}),\ 1 < p \leq +\infty,$$

$$W^{1,1}(I) \subset L^q(I),\ 1 \leq q < \infty.$$

Pour la première, on appliquera le théorème d'Ascoli, pour la seconde le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Exercice 11.6 Soit $u \in L^p(I)$, $1 < p \leq +\infty$. Alors (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii), où
(i) $u \in W^{1,p}$.
(ii) $\exists C > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, $|\int_I u\varphi'| \leq C||\varphi||_{L^{p'}(I)}$,
(iii) $\exists C$, $\forall \omega \subset\subset I$, $\forall h, |h| \leq distance(\omega, I^C)$, $||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq C|h|$.

11.2 Exercices

Exercice 1

1) Montrer que l'injection $H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est compacte.
2) Montrer que $\forall u, v \in H^1(0,1)$,

$$\int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

(On pourra d'abord le démontrer pour des fonctions de $H_0^1(0,1)$ en utilisant la densité de fonctions régulières.)

Exercice 2

Soit $f \in L^2(0,1)$ et $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$.

1) Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv$, $\forall v \in H^1(0,1)$.

2) Vérifier que $u \in H^2(0,1)$ et interpreter le problème différentiel résolu (i.e. trouver l'équation différentielle et les conditions aux limites satisfaites par u).

Exercice 3

Soit $V = \{u \in H^1(0,1) \,:\, u(\frac{1}{2}) = 0\}$.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0,1)$ et que $v \to \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur V équivalente à la norme usuelle de H^1.

2) Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $\int_0^1 u'v' = v(0)$ pour tout $v \in V$.

3) Interpreter le problème résolu, déterminer explicitement u et calculer u'' au sens des distributions. $u \in H^2(0,1)$??

Exercice 4

Vérifier que $v \to \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur $H^1(0,+\infty)$. Est-elle équivalente à $\|v\|_{H^1}$?

Exercice 5

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})\ t.q.\ f' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$. Soient $f \in E$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $|I| = +\infty$, on suppose de plus que $f(0) = 0$. Enfin, soit $u \in H^1(I)$.

1) Montrer que $f(u) \in L^2(I)$.

2) Soit $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$.

a) Vérifier que $f(u_n) \to f(u)$ dans $L^2(I)$.

b) Soient $\alpha_n = f'(u_n)(u_n' - u')$ et $\beta_n = (f'(u_n) - f'(u))u'$. Vérifier que $\alpha_n \to 0$ dans $L^2(I)$ et qu'il existe une sous-suite $(\beta_{n_k})_k$ telle que $\beta_{n_k} \to 0$ dans $L^2(I)$.

c) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\int_I f(u)\varphi' = -\int_I f'(u)u'\varphi.$$

En déduire que $f(u) \in H^1(I)$ et que $(f(u))' = f'(u)u'$.

3) Soit $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon$ si $t > 0$ et $f_\varepsilon \equiv 0$ ailleurs. Vérifier que $f_\varepsilon \in E$ et que $f_\varepsilon(u) \to u^+$ dans $L^2(I)$.

4) En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans

$$\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' = -\int_I f_\varepsilon'(u)u'\varphi,$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, montrer que $u^+ \in H^1(I)$ et que $(u^+)' = 1_{[u>0]}u'$.

5) En déduire que $|u| \in H^1(I)$.

Exercice 6

Soit N une norme dérivant d'un produit scalaire, montrer que N^2 est strictement convexe i.e. $\forall u \neq v$, $\forall t \in]0,1[$, $N^2(tu+(1-t)v) < tN^2(u) + (1-t)N^2(v)$. (une norme est-elle strictement convexe ?)

Exercice 7

On note $H_0^1(0,1) = \{u \in H^1(0,1) \, : \, u(0) = u(1) = 0\}$.
1) Vérifier que $\|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_2$ si $u \in H_0^1(0,1)$ et en déduire que $H_0^1(0,1)$ muni de $\|u'\|_2$ est un Hilbert.
2) Soit $f \in L^2(0,1)$. Pour $v \in H^1(0,1)$ on définit

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2 \, + \, \frac{1}{4}\int_0^1 |v|^4 \, - \, \int_0^1 fv.$$

Vérifier que $F(v)$ a bien un sens si $u \in H^1(0,1)$ et que $\exists C$ tel que $\forall v \in H_0^1(0,1)$, $F(v) \geq C$.
Montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $F(u) = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} F(v) \quad (\star)$.
3) Montrer que si u est solution de $(\star)$ alors

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

(Ecrire $F(u+tv) \geq F(u)$, $\forall t > 0$ et $\forall v \in H_0^1(0,1)$.)
4) En déduire que u satisfait : $-u'' + u^3 = f$ p.p. $(\star\star)$ et que $u \in H^2(0,1)$.
5) Réciproquement : montrer que si $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ vérifie $(\star\star)$ alors u est solution de $(\star)$.
6) Montrer que si $f \geq 0$ p.p. alors u solution de $(\star)$ est telle que $u \geq 0$ p.p.

Chapter 12

Corrigés des exercices

12.1 Chapitres I et II

Exercice 1

a)Soient $n = \dim E$ et $e_1, ..., e_n$ une base de E. On définit pour $x = \sum_1^n x_i e_i \in E$, la norme $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$. Soit $S_1 = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$ et soit N une autre norme sur E, de $N(x) \leq (\sup_i N(e_i))\|x\|_1$ on déduit la continuité de N sur $(S_1, \| \|_1)$ compact, donc N est bornée et atteint ses bornes. Il existe α et $\beta \geq 0$ tels que $\forall x \in S_1$, $\alpha \leq N(x) \leq \beta$. Comme $\alpha = N(y)$ pour un $y \in S_1$, $y \neq 0$ et $\alpha > 0$. Enfin, $\forall x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$ donc $\alpha\|x\|_1 \leq N(x) \leq \beta\|x\|_1$.
b) Soit $x = \sum_1^n x_i e_i \in E$, on a $\|u(x)\|_F \leq (\sup_i \|u(e_i)\|_F)\|x\|_1$ donc u est continue.

Exercice 2

a) Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \quad \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, $\forall x \in E$, $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$. (1).
Et $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F complet donc converge vers un élément noté $f(x)$. la fonction f est linéaire comme limite simple de fonctions linéaires. On fixe p dans (1) et on laisse $q \to \infty$, on obtient alors $\|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$, $\forall x \in E$, d'où $f = f - f_p + f_p$ est continue et $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$., dès que $p \geq N$ donc $f_n \to f$ in $\mathcal{L}(E, F)$.
b) Par hypothèse $\overline{B_E}$ est compact donc il existe $a_1, ..., a_n \in E$ tels que $\overline{B_E} \subset \cup_1^n B(a_i, \frac{1}{2})$. Soit $V = \text{vect}\{a_1, ..., a_n\}$, montrons que $E = V$. On raisonne par l'absurde, s'il existe $x \in E$ tel que $d(x, V) = \alpha > 0$ alors $\exists y \in V$ tel que $\alpha \leq d(x, y) \leq \frac{3}{2}\alpha$.
Soit $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \overline{B_E}$ alors pour un certain i_0, $z \in B(a_{i_0}, \frac{1}{2})$ et on a

$$\|x - y - a_{i_0}\|x - y\| \| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| \leq \frac{3}{4}\alpha$$

donc il existerait un $y_0 \in V$ tel que $d(x, y_0) < \alpha$, ce qui est absurde.

Exercice 3

1) $\forall x \in E$ et $\forall y \in H$, on a $|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\|\|x - y\|$ d'où le résultat.

2) $d(x,H) \leq \|x-y\| \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|}\ \|u\|$ où $u \in E \setminus H$. Comme $f \not\equiv 0$, on peut remarquer que $\|f\| = \sup_{u\in E\setminus H} \frac{|f(u)|}{\|u\|}$.
3) a) Soit $(x^p)_p$ une suite de Cauchy dans $E = \mathcal{C}_0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q \geq N,\ \forall n \quad \|x_n^p - x_n^q\|_\infty \leq \varepsilon. \qquad (\star)$$

Donc $\forall n$, la suite $(x_n^p)_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge vers un x_n. Posons $x = (x_n)_n$, alors de $(\star)$ on déduit que $\forall n$, $\forall q \geq N$, $|x_n - x_n^q| \leq \varepsilon$ donc la suite (x^p) converge vers x en norme $\|\ \|_\infty$. Il reste à voir que $x \in E$. De l'inégalité précédente on tite $|x_n| \leq \varepsilon + |x_n^N|$ donc pour n assez grand $|x_n| \leq 2\varepsilon$, et $x \in E$.
b) On a facilement $|f(x)| \leq \|x\|_\infty$ et f linéaire donc $f \in E'$ et $\|f\| \leq 1$.
Soit $x^N \in E$ défini par $x_n^N = 1$ si $n \leq N$ et $x_n^N = 0$ sinon, alors $|f(x^N)| = 1 - \frac{1}{2^N} \leq \|f\|$ et ceci $\forall N \geq 1$ d'où $\|f\| = 1$.
S'il existe $x = (x_n)_n \in E$ avec $\|x\| = 1$ et tel que $|f(x)| = \|f\| = 1$ alors

$$1 = |f(x)| \leq \sum_1^\infty \frac{1}{2^n}|x_n| \Longrightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{2^n}(1 - |x_n|) \leq 0 \Longrightarrow |x_n| = 1,\ \forall n,$$

et $x \notin E$. Donc $\|f\|$ n'est pas atteint. Enfin $d(x,H) = |\sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n}|$.

Exercice 4 Théorèmes du point fixe

1) On vérifie facilement que si $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in E$, on a $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ et

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n(k^{p-1} + ... + k + 1)d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Comme $k < 1$, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy donc converge vers $x \in E$. De $x_{n+1} = f(x_n)$ on déduit $x = f(x)$ puisque f est continue, et x est un point fixe.
Si $d(f(a), f(b)) = d(a,b) \leq kd(a,b)$ avec $k < 1$, nécessairement $a = b$, d'où l'unicité du point fixe.
2) $\forall \lambda$, λ_0, on a

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) &= d(f_\lambda(a_\lambda), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \\ &\leq d(f_\lambda(a_\lambda), f_\lambda(a_{\lambda_0})) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})) \\ &\leq kd(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})), \end{aligned}$$

donc

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1-k} d(f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})).$$

Ce qui montre que l'application $\lambda \to a_\lambda$ est continue en λ_0.
3) Soit $\varphi(x) = d(x, f(x))$, φ est continue sur E compact donc atteint son inf : $\exists x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in E$. Si $\varphi(x_0) \neq 0$, on a $\varphi(f(x_0)) < \varphi(x_0)$ ce qui est absurde, donc $\varphi(x_0) = 0$ et x_0 est un point fixe de f. Si il y en a un autre, x_1, alors $d(f(x_0), f(x_1)) = d(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$ donc necessairement $x_0 = x_1$.
4) Soit z fixé dans C, $f_n(C) \subset C$, $\forall n$, car C est convexe et f_n est $\frac{n}{n+1}$-lipschitzienne sur C. Donc, par 1), $\exists x_n \in C$ tel que $x_n = f(x_n)$, $\forall n$. Maintenant C est compact donc il existe une sous-suite notée $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \to x \in C$, alors en passant à la limite dans

$x_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) = \frac{1}{n_k+1}z + \frac{n_k}{n_k+1}f(x_{n_k})$, on obtient $x = f(x)$ et x est un point fixe de f.

Exercice 5

a) Il est clair que N dérive d'un produit scalaire.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|f(x)| \leq |f(0)| + (\int_0^1 f'(t)^2 dt)^{\frac{1}{2}}$. En élevant au carré et en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient facilement $|f(x)|^2 \leq 2N(f)$, $\forall x \in [0,1]$.

c) On choisit $f_n(x) = x^n$. Alors $\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \to +\infty$. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6

Comme E est métrique, on va montrer que de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$ donc l'une d'entre elles contient une infinité de x_n. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ telle que $d(x_{\varphi_1(n)}, x_{\varphi_1(p)}) \leq 1$. Et on recommence ce processus, pour $\varepsilon = \frac{1}{2p}$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2p}$ donc l'une d'entre elles contient une infinité de $x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_{p-1}}(n)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_p}(n))_n$ telle que $d(x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_p}(n), x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_p}(m)) \leq \frac{1}{p}$. Soit $(x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_n}(n))_n$ la suite diagonale, elle est bien extraite de $(x_n)_n$ et vérifie

$$d(x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_n}(n), x_{\varphi_1 o \ldots o \varphi_m}(m)) \leq \frac{1}{m}, \qquad \forall m, n,\ m \leq n.$$

Cette suite est donc de Cauchy dans E complet, elle converge, d'où E est compact.

Exercice 7

Pour n fixé, $E \subset \cup_{x \in E} B(x, \frac{1}{n})$ et E est compact donc $\exists k_n$ tel que $E \subset \cup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$. Soit $D = \{x_i^n, i = 1, ..., k_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$, D est bien dénombrable, vérifions que D est dense dans E. Soient $x \in E$ et $r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{1}{N} < r$ et $\exists x_i^N$ tel que $x \in B(x_i^N, \frac{1}{N})$ alors $x_i^N \in B(x, r) \cap D$.

Exercice 8

Les ensembles $K^\star$ et $K^{\star\star}$ sont fermés comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, donc de $K \subset K^{\star\star}$ on déduit $\overline{K} \subset K^{\star\star}$. Si $\overline{K} \neq K^{\star\star}$, $\exists y_0 \in K^{\star\star} \setminus \overline{K}$ et par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \not\equiv 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$< f, x > < \alpha < < f, y_0 >, \qquad \forall x \in K.$$

Comme $0 \in K$, on a $\alpha > 0$ et $\forall x \in K$, $< \frac{f}{\alpha}, x > < 1$, donc $\frac{f}{\alpha} \in K^\star$ or $y_0 \in K^{\star\star}$ donc $< \frac{f}{\alpha}, y_0 > \leq 1$, c'est absurde. D'où $K^{\star\star} = \overline{K}$.

Exercice 9

1) On définit les deux formes linéaires continues suivantes

$$\begin{array}{rcl} f_{2n} : \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_{2n} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g_{2n} : \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_{2n} - 2^{-n} x_{2n-1}. \end{array}$$

Alors $A_0 = \cap_n f_{2n}^{-1}(\{0\})$ et $B = \cap_n g_{2n}^{-1}(\{0\})$ sont fermés comme intersection de fermés.
Soit $e^n = (\delta_{ni})_{i\geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si i =n, $\delta_{ni} = 0$ sinon, alors si $F_k = \text{vect}\{e^1, ..., e^k\}$ et si $F = \cup_k F_k$, on a $\overline{F} = \ell^1$. Donc pour montrer que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$, il suffit de montrer que $\forall k$, $F_k \subset A_0 + B$.
Soit $x \in F_k$, on définit a, b de la façon suivante,

$$\begin{cases} b_{2n} = x_{2n} & b_{2n-1} = 2^n x_{2n} \\ a_{2n-1} = x_{2n-1} - 2^n x_{2n} & a_{2n} = 0 \end{cases}$$

alors $x = a + b$ et comme $x_n = 0$ si $n > k$, $a, b \in \ell^1$ et $(a, b) \in A_0 \times B$. Donc $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.
2) Si $c = a + b$ alors nécessairement $a_{2n} = 0$, $b_{2n} = 2^{-n}$, $b_{2n-1} = 1$ et $a_{2n-1} = -1$ donc $a, b \notin \ell^1$ et $c \notin A_0 + B$. Il est clair alors que $A \cap B = \emptyset$.
Supposons qu'il existe $f \in (\ell^1)'$, $f \not\equiv 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$< f, a > \leq \alpha \leq < f, b >, \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Comme B est vectoriel, nécessairement $< f, b >= 0$, $\forall b \in B$. De même, de $< f, a_0 > \leq \alpha + f(c)$, $\forall a_0 \in A_0$, on en déduit que $< f, a_0 >= 0$, $\forall a_0 \in A_0$. Donc $f \equiv 0$ sur $A_0 + B$ dense dans ℓ^1, par continuité on en conclut que f est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut donc pas séparer A et B.

Exercice 10

1) Soit $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$ alors F_n est fermé et $F = \cup_n F_n$ car T est surjective. Par le lemme de Baire, on sait qu'il existe n_0 tel que int$(F_{n_0})\neq \emptyset$ et donc int$\left(\overline{T(B(0,1))}\right) \neq \emptyset$. Alors il existe $r > 0$ et $y_0 \in F$ tels que $B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0,1))}$. Si $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ alors $-y_0$ aussi et $B(y_0, r) = y_0 + B(0, r) \subset \overline{T(B(0,1))}$ donc $B(0, r) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} \subset 2\overline{T(B(0,1))}$ d'où $b(0, \frac{r}{2}) \subset \overline{T(B(0,1))}$ et $2C = \frac{r}{2}$ convient.
2) Soit $y \in B(0, C)$ fixé, on cherche $x \in B(0,1)$ tel que $y = Tx$. On sait que $B(0, C) \subset \frac{1}{2}B(0, 2C) \subset \overline{T(\frac{1}{2}B(0,1))}$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon$, $\|z_\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ tel que $\|y - Tz_\varepsilon\| < \varepsilon$.
On choisit $\varepsilon = \frac{C}{2}$, cela nous donne un z_1 tel que $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - Tz_1\| < \frac{C}{2}$. Alors $y - Tz_1 \in B(0, \frac{C}{2}) \subset \overline{T(\frac{1}{4}B(0,1))}$ et on recommence, pour $\varepsilon = \frac{C}{4}$, $\exists z_2$ tel que $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ et $\|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{C}{4}$, etc...
On construit ainsi une suite $(z_n)_n$ telle que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - Tz_1 - ... - Tz_n\| < \frac{C}{2^n}$, $\forall n$.
La suite $x_n = z_1 + ... + z_n$ est de Cauchy dans E donc converge vers un $x \in E$, comme T est continue, $Tx_n \to Tx$, donc $y = Tx$. Il reste à voir que $\|x\| < 1$.
Par exemple, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|z_1\| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ alors

$$\|x_n\| \leq \sum_1^n \|z_k\| \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Exercice 11 Théorème d'isomorphisme d'espaces de Banach

Par le Théorème de l'application ouverte, $\exists C > 0$ tel que $B_F(0, C) \subset T(B_E(0,1))$. Comme T est bijective, $\forall x \in E$ tel que $\|Tx\| < C$ on a $\|x\| < 1$. Donc $\|x\| \leq \frac{1}{C}\|Tx\|$ et T^{-1} est continue.

Exercice 12

On applique le résultat précédent à $id : E, \|x\|_2 \to E, \|x\|_1$.

Exercice 13 Théorème du graphe fermé

Sur E, on considère $\|x\|_1 = \|x\|_E$ et $\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$. Si $(E, \|x\|_2)$ est complet, comme $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, $\forall x \in E$, en appliquant l'exercice ci-dessus, on obtient l'équivalence des normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ et donc T est continue.
Vérifions que $(E, \|x\|_2)$ est complet. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy pour $\|x\|_2$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|x\|_1$ donc elle converge vers un $x \in E$ au sens de la norme $\|x\|_1$. La suite $(Tx_n)_n$ est aussi de Cauchy dans F complet donc converge vers un certain $y \in F$. Or $(x_n, Tx_n)_n \in G(T)$ fermé, donc $y = Tx$ et $(E, \|x\|_2)$ est complet.

Exercice 14

Montrons que le graphe de T, $G(T)$, est fermé. Soit $(x_n, Tx_n)_n \in G(T)$ telle que $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$, a-t'on $y = Tx$?
Soit $f \in F'$, comme $foT \in E'$, on a d'une part $f(Tx_n) \to f(Tx)$ et $f(Tx_n) \to f(y)$ donc $f(Tx) = f(y)$ et ceci $\forall f \in F'$, nécessairement $Tx = y$ sinon par Hahn-Banach, on pourrait séparer strictement Tx et y par un hyperplan fermé, c'est à dire il existerait $f \in F'$, $f \not\equiv 0$, telle que $f(Tx) \neq f(y)$.

Exercice 15

1) Pour $y \neq x_0$, $\Lambda_y \in E'$ et $\|\Lambda_y\| \leq \frac{2}{|y-x_0|}\|f\|_\infty$. Soit $f \in F$ alors $|\Lambda_y(f)| < \infty$, $\forall y \neq x_0$ car $y \mapsto \Lambda_y(f)$ est continue sur $[0,1]$. Comme F est un Banach, on peut appliquer Banach-Steinhaus et $\exists M > 0$ tel que $\forall f \in F$, $\forall y \neq x_0$, $|\Lambda_y(f)| \leq M\|f\|$.
2) En particulier si $f \in B_F$, $|\Lambda_y(f)| \leq M$, $\forall y \neq x_0$. Donc $|f(y) - f(x_0)| \leq M|y - x_0|$, $\forall y$ et $\forall f \in B_F$. Ce qui montre que B_F est équicontinue.
Soit $B_F(x) = \{f(x), f \in B_F\}$. Pour pouvoir appliquer Ascoli, il reste à vérifier que $\forall x \in [0,1]$, $\overline{B_F(x)}$ est compact dans $\mathbb{R}$, ce qui est immédiat puisque $B_F(x) \subset [-1,1]$. D'où B_F est compact et par suite F est de dimension finie.

12.2 Chapitre III

Exercice 1

1) Montrons d'abord que si $\forall x \neq 0$, $\exists p$ semi-norme telle que $p(x) \neq 0$ alors $(E, \mathcal{P})$ est séparé. Soit donc $x \neq 0$, et p telle que $p(x) \neq 0$ alors si $r = \frac{1}{2}p(x)$ on a $B(x,r) \cap B(0,r) = \emptyset$ et on sépare 0 et x. Si $x \neq y$, on peut écrire $y = x + z$ avec $z \neq 0$ et on a $B(x,r) \cap B(x+z,r) = \emptyset$. (la réciproque est vraie).
Utilisons ce critère, soit donc $x \neq 0$, par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \not\equiv 0$ telle que $f(x) > 0 = f(0)$ donc $p_f(x) \neq 0$ et la topologie faible est séparée.

2) Soit U un ouvert faible non vide, pour montrer qu'il est un ouvert fort, il faut montrer que $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. Soit donc $x_0 \in U$ par hypothèse, $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists J \in P.F.I.$ tels que $V(x_0, J, \varepsilon) \subset U$. Cherchons r tel que $B(x_0, r) \subset V(x_0, J, \varepsilon)$. On a

$$| < f_i, x - x_0 > | < \|f_i\| \, \|x - x_0\| \leq (\sup_J \|f_i\|) \|x - x_0\|.$$

Cela suggère de choisir $r < \frac{\varepsilon}{\sup_J \|f_i\|}$, ce qui donne le résultat. (si $\forall i$, $f_i \equiv 0$, alors $E = V(x_0, J, \varepsilon)$ est bien un ouvert fort.)
3) Si $f \in (E_w)'$ alors $\forall U$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert faible et la question précèdente montre que $f \in E'$.
Si $f \in E'$, soit $x_0 \in E$, montrons que f est continue faiblement en x_0, c'est à dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que $x \in V \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Il est clair que $V = V(x_0, f, \varepsilon)$ convient.
4) On suppose $\dim E < \infty$. D'après la question 2), il reste à montrer que U ouvert fort est un ouvert faible. Soit $x_0 \in U$ supposé non vide, alors $\exists r > 0$ telque $B(x_0, r) \subset U$. On va montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists J \in P.F.I.$ tels que $V(x_0, J, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $\forall i$ $\|e_i\| = 1$. Tout x de E s'écrit $x = \sum_1^n x_i e_i$, soit $f_i : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_i$ alors $f_i \in E'$ et on a

$$\|x - x_0\| \leq \sum_1^n |x_i - x_{0i}| = \sum_1^n | < f_i, x - x_0 > |.$$

D'où si $x \in V = V(x_0, \{1, ..., n\}, \varepsilon)$ alors $\|x - x_0\| < n\varepsilon$, on choisit donc $\varepsilon \leq \frac{r}{n}$ et on a bien $V \subset B(x_0, r)$.

Exercice 2

On suppose que $\dim E = +\infty$ et que les applications

$$\begin{array}{rcl} id : \ (E, \sigma(E, E')) & \to & (E, d), \\ id : \quad (E, d) & \to & (E, \sigma(E, E')) \end{array}$$

sont continues.
1) $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $B_d(0, \frac{1}{k})$ est un voisinage de 0 pour d, donc $\exists V(0, I_k, \varepsilon_k) \subset B_d(0, \frac{1}{k})$ où $\varepsilon_k > 0$ et I_k est un ensemble fini d'indices. L'ensemble $\{f_j, j \in I_k, k \in \mathbb{N}^\star\}$ est dénombrable et constitue la suite cherchée.
2) L'ensemble $V = V(0, g, 1)$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible, par hypothèse $\exists k_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $B_d(0, \frac{1}{k_0}) \subset V$. Alors d'après 1),

$$\bigcap_{i \in I_{k_0}} \{x \in E : | < f_i, x > | < \varepsilon_{k_0}\} \subset V.$$

On pose $I = I_{k_0}$ alors $\bigcap_{i \in I} \ker f_i \subset V$. Et $| < g, x > | < 1$ sur un espace vectoriel, donc nécessairement $g(x) = 0$, $\forall x \in \bigcap_{i \in I} \ker f_i$, par suite $\bigcap_{i \in I} \ker f_i \subset \ker g$.
3) Pour simplifier les notations, on notera $I = \{1, 2, ..., k\}$, et soit

$$\begin{array}{rcl} F : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k+1} \\ x & \longmapsto & (g(x), f_1(x), ..., f_k(x)). \end{array}$$

ImF est convexe fermé (car vectoriel de dimension finie) et $e_1 = (1, 0...0) \notin$ImF car $\bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset \ker g$. D'après le Théorème d'Hahn-Banach, $\exists h \in (\mathbb{R}^{k+1})'$, $h \not\equiv 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $h(F(x)) < \alpha < h(e_1)$, $\forall x \in E$. Comme ImF est vectoriel, on en déduit que $h(F(x)) = 0$, $\forall x \in E$ et comme $h \in (\mathbb{R}^{k+1})'$, $h \not\equiv 0$, $\exists(\mu_0, ..., \mu_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $h(x) = \sum_0^k \mu_i x_i$ si $x = (x_0, ..., x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$. D'où on obtient

$$\mu_0 g(x) + \sum_1^k \mu_i f_i(x) = 0 < \alpha < \mu_0, \quad \forall x \in E.$$

Donc $\mu_0 \neq 0$ et $g(x) = \sum(-\frac{\mu_i}{\mu_0})f_i(x)$ pour tout x. (On peut démontrer ce résultat par une preuve purement algébrique, par exemple un raisonnement par recurrence sur k.)
4) Soit $F_n = \text{vect}\{f_1, ..., f_n\}$, d'après 2) et 3), $\forall g \in E'$, $\exists N$ tel que $g \in F_N$ donc $E' = \bigcup F_n$. Comme E' est complet, F_n fermé (car dim$F_n < \infty$), on peut appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$ tel que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Si $f \in \text{int}F_{n_0}$ alors $\exists r > 0$ tel que $B(f, r) \subset F_{n_0}$ par suite $E' = F_{n_0}$ car F_{n_0} est vectoriel et donc dim$E' \leq n_0$.
5) On en conclut que dim$E < \infty$, en effet soit

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & E && \to \mathbb{R}^{n_0} \\ & x && \mapsto (f_1(x), ..., f_{n_0}(x)). \end{aligned}$$

Φ est linéaire et injective (car $\Phi(x) = 0 \Longrightarrow \forall f \in E'$, $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ par Hahn-Banach) donc dim$E \leq n_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exercice 3

1) On montre que (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). Pour simplifier les notations on montrera que T est continue en 0, le lecteur se convaincra que la continuité de T en 0 implique la continuité de T partout.
(1) $\Longrightarrow$ (2) :
$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $\omega \in \mathcal{V}_w(0)$ tel que $x \in \omega \Longrightarrow Tx \in \Omega$? On peut toujours choisir $\Omega = \{y \in F : | < f_i, y > | < \varepsilon, \forall i = 1, ..., n\}$ où $f_i \in F'$ et $\varepsilon > 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned} Tx \in \Omega \quad & \Longleftrightarrow \quad | < f_i, Tx > | < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., n, \\ & \Longleftrightarrow \quad | < f_i oT, x > | < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Si $\omega = \{x \in E : | < f_i oT, x > | < \varepsilon, \forall i = 1, ..., n\}$ où $f_i oT \in E'$, alors ω est bien un voisinage faible de 0 donc (2).
(2) $\Longrightarrow$ (3) :
$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $r > 0$ tel que $x \in B(x, r) \Longrightarrow Tx \in \Omega$?
On sait par hypothèse qu'il existe un voisinage faible de 0, ω, tel que $x \in \omega \Longrightarrow Tx \in \Omega$ et on a vu dans l'exercice 1 ci-dessus, qu'un ouvert faible est un ouvert fort donc (3).
(3) $\Longrightarrow$ (1) :
On utilise le Théorème du graphe fermé (voir l'exercice 13 chap.II), soit $(x_n, y_n)_n \in G(T) = \{(x, y) \in E \times F, y = Tx\}$ telle que $x_n \to x$ et $y_n \to y$, a-t'on $y = Tx$?
Comme T est continue de E fort dans F faible, $Tx_n \rightharpoonup Tx$ et d'autre part la convergence forte impliquant la convergence faible $Tx_n \rightharpoonup y$, donc nécessairement $y = Tx$. D'où le graphe de T est fermé et T est continue (pour les topologies fortes).
2) Soit $T : E_w \longrightarrow F$ linéaire continue. La continuité en 0 implique que $\exists \varepsilon > 0$, $\exists f_1, .., f_n \in E'$ tels que

$$| < f_i, x > | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, ..., n \Longrightarrow \|Tx\|_F < 1.$$

Alors $\bigcap_i \ker f_i \subset \ker T$. On va montrer que dim(ImT)$\leq n$. Soit $y_1 = Tx_1, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1} \in$ ImT, existe-t'il $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ non tous nuls tels que $\sum_1^{n+1} \lambda_k T x_k = 0$?
Ou encore tels que $T(\sum_1^{n+1} \lambda_k x_k) = 0$? On remarque que si il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ non tous nuls tels que $\sum_1^{n+1} \lambda_k x_k \in \bigcap_i \ker f_i$, c'est fini. Donc on veut

$$\sum_1^{n+1} \lambda_k < f_i, x_k >= 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

C'est un système linéaire de n équations à $n+1$ inconnues dont on sait qu'il existe des solutions non triviales, d'où le résultat.

Exercice 4

On note $\ell^1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty\}$ que l 'on munit de $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, et $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup_n |x_n| < \infty\}$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.
On admettra que ℓ^1 et ℓ^∞ sont des espaces de Banach.
Enfin on note $e^n = (\delta_{ni})_{i\geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si i =n, $\delta_{ni} = 0$ sinon.
1) $\|x^N - x\|_1$ = reste d'une série convergente.
2) f est linéaire et $|f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$ donc $f \in (\ell^1)'$.
a) On a montré que $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_\infty$. On a $\Lambda_y(e^N) = y_N$ donc $\|\Lambda\| \geq \|y\|_\infty$, d'où Λ est une isométrie.
b) Λ est injective car isométrique. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (\ell^1)'$ alors par linéarité et continuité de ℓ, on a $< \ell, x >= \sum_1^\infty x_n y_n$ si $x = (x_n)_n \in \ell^1$ et $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \ell^1$, $| < \ell, x > | \leq M\|x\|_1$. En particulier pour $x = e^n$, on obtient $| < \ell, e^n > | = |y_n| \leq M$ et $y \in \ell^\infty$. Donc $\ell = \Lambda_y$ et Λ est bijective. Par l'exercice 11 chap.II, on conclut que Λ est un isomorphisme d'espaces de Banach.
3) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 faible $\iff \forall y \in \ell^\infty < y, x^n >\to< y, 0 >= 0 \iff \sum_1^\infty x_i^n y_i \to 0, \forall y = (y_i)_i \in \ell^\infty$.
4) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 faible.

a) On montre facilement que d est une distance sur K.

b) On veut montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists y^1, ..., y^n \in \ell^1$ tels que

$$V = \{g \in K : | < g - f, y^i > | < \varepsilon, \forall i = 1, ..., n\} \subset \Omega.$$

On a

$$d(f, g) = \sum_1^n \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| + \sum_{i\geq n+1} \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| \text{ et } \sum_{i\geq n+1} \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| \leq 2 \sum_{i\geq n+1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

pour $f, g \in K$. Soient donc ε et n tels que $\varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r$ et $y^i = e^i$ pour $1 \leq i \leq n$, alors

$$\sum_1^n \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| = \sum_1^n \frac{1}{2^i}| < f - g, e^i > | \leq \varepsilon \sum_1^n \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon,$$

si $g \in V$. D'où $d(f, g) \leq \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r$, $\forall g \in V$ donc $V \subset \Omega$.

c) La question précèdente montre que l'application $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \to (K, d)$ est continue. Or K est compacte faible $\star$, donc(K, d) est compact.

d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $A_n = \{f \in \ell^\infty : | < f, x^n > | \leq \varepsilon\}$ alors A_n est fermé faible $\star$, et $F_k = K \cap \bigcap_{n \geq k} A_n$ est aussi fermé faible $\star$ dans K compact donc F_k est compact faible $\star$. Son image par $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \to (K, d)$ (qui est continue) est compacte donc fermée dans (K, d). $K = \bigcup_k F_k$ car $< f, x^n > \to 0$, $\forall f \in \ell^\infty$. Enfin, (K, d) métrique compact est complet, on peut donc appliquer le lemme de Baire : il existe k_0 tel que $\mathrm{Int} F_{k_0} \neq \emptyset$. Donc il existe $f_0 \in K$, $\exists \rho > 0$ tels que $K \cap B_d(f_0, \rho) \subset F_{k_0}$.

e) En choisissant f comme dans l'énoncé, on a,

$$d(f, f^0) \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}} < \rho.$$

Donc $f \in F_{k_0}$ et

$$| < f, x^n > | = |\sum_1^N f_0^i x_i^n + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\pm x_i^n)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq k_0.$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |f_0^i x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |x_i^n|,$$

car $f^0 \in K$, d'où

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + 2 \sum_1^N |x_i^n|, \quad \forall n \geq k_0.$$

f) i étant fixé, $x_i^n \to 0$ car $x_i^n =< e^i, x^n >$, donc $\exists I$ tel que $\forall n \geq I$, $|x_i^n| \leq \frac{\varepsilon}{2N}$. Dès que $n \geq \max(k_0, I)$, on a $\|x^n\|_1 \leq 2\varepsilon$ d'où $x^n \to 0$ dans ℓ^1.
5) Comme ℓ^1 n'est pas de dimension finie, les topologies faibles et fortes ne sont pas équivalentes et cette application ne peut donc pas être continue.

12.3 Chapitre IV

Exercice 1

$E \subset (E'_{w\star})'$:
Soit $x \in E$ alors $V = \{f \in E' : | < f, x > | < \varepsilon\}$ est un voisinage faible-$\star$ de 0 dans E'. Donc $f \mapsto < f, x >$ est continue sur $E'_{w\star}$, d'où $x \cong J(x) \in (E'_{w\star})'$.
$(E'_{w\star})' \subset E$:
Soit $\varphi \in (E'_{w\star})'$ et soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists \Omega$ voisinage faible-$\star$ de 0 dans E' tel que

$$f \in \Omega \Longrightarrow | < \varphi, f > | < \varepsilon.$$

On peut toujours choisir $\Omega = \{g \in E' : |< g, x_i >| < \beta, \, i = 1, ..., n\}$ où $\beta > 0$ et pour $i = 1, ..., n$, $x_i \in E$. Mais $J(x_i) \in E''$ et

$$|< J(x_i), g >| < \beta, \, \forall i = 1, ..., n \Longrightarrow |< \varphi, g >| < \varepsilon.$$

Donc $g \in \bigcap_i \ker J(x_i) \Longrightarrow |< \varphi, g >| < \varepsilon$, d'où $\bigcap_i \ker J(x_i) \subset \ker \varphi$. D'après l'exercice 2, question 3), $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_1^n \lambda_i J(x_i) = J(\sum_1^n \lambda_i x_i)$. Soit $x = \sum_1^n \lambda_i x_i \in E$ alors $\varphi = J(x)$, d'où le résultat.

Exercice 2

Soit $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x_n$ si $x = (x_n)_n$. Alors $f_n \in E'$ et $\|f_n\| = 1$. Si il existe une sous-suite $(f_{nk})_{nk}$ qui converge vers un f dans $E'_{w\star}$ alors $\forall x \in E$, $< f_{nk}, x >= x_{nk} \longrightarrow < f, x >$ quand k tend vers $+\infty$. Donc en fait il s'agit de trouver une suite de réels qui ne converge pas...c'est facile. Par exemple, soit $x = (x_n)_n$ tel que $x_{nk} = (-1)^k$ et $x_n = 0$ ailleurs, alors $x \in \ell^\infty$ et $< f_{nk}, x >= (-1)^k$ ne converge pas. Donc il n'existe pas de sous-suites faiblement-$\star$ convergente bien que $(f_n)_n$ soit dans un compact faible-$\star$. Mais ce compact n'est pas métrisable, on peut en conclure par exemple que ℓ^∞ n'est pas séparable ni réflexif.

Exercice 3

1) $K \subset \bigcup_{n>0} B(0, n)$ et K compact $\Longrightarrow \exists N$ tel que $K \subset B(0, N)$.
2) $\forall x \in B_E$, Tx est dans un compact donc $\exists N$ tel que $Tx \in B(0, N) \Longrightarrow \|Tx\| \leq N$.
3) Soit $(x_n)_n \in E$ telle que x_n converge faiblement vers $x \in E$, alors $\|x_n\|$ est bornée donc $\exists R > 0$ tel que $\forall n$, $x_n \in \overline{B}(0, R)$. Comme T est compacte, $(Tx_n)_n$ est dans un compact fort et il existe une sous-suite $(Tx_{nk})_k$ qui converge fortement vers $y \in F$. D'autre part T est linéaire continue donc continue de E faible dans F faible et $Tx_{nk} \rightharpoonup Tx$ d'où $y = Tx$. Tx est la seule valeur d'adhérence de la suite $(Tx_n)_n$ donc toute la suite converge vers Tx d'où $(\star)$.
4) Montrons que $T(B_E)$ est fermé. Soit $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, on suppose que $Tx_n \longrightarrow y$, a-t'on $y = Tx$ où $x \in B_E$?
E réflexif et $\|x_n\| \leq 1$, $\forall n \Longrightarrow$ il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ telle que $x_{nk} \rightharpoonup x$. Alors $(\star) \Longrightarrow$ $Tx_{nk} \longrightarrow Tx$ donc $y = Tx$ et $\|x\| \leq \liminf \|x_{nk}\| \leq 1$ et $T(B_E)$ est fermé.
Soit encore $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, alors E réflexif $\Longrightarrow x_{nk} \rightharpoonup x$ et $Tx_{nk} \longrightarrow Tx$ donc Tx est valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ et $T(B_E)$ est compact.
5) Soit $B = \{x \in \ker(Id - T) : \|x\| \leq 1\}$. Soit $(x_n)_n \in B$ alors de $\|x_n\| \leq 1$ et T compact, on déduit qu'il existe une sous-suite $x_{nk} = Tx_{nk}$ qui converge vers y. Il est clair que $y \in B$ donc B est compact et $\dim\ker(Id - T) < \infty$.

Exercice 4

On définit $J : E \longrightarrow E''$ par

$$< Jx, f >_{E'',E'} = < f, x >_{E',E} \quad \forall x \in E, \, \forall f \in E'.$$

On a $\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |< f, x >| = \|x\|$ par Hahn-Banach, donc J est linéaire isométrique.
Ici, E est réflexif donc J est surjective i.e. $J(E) = E''$.
Si $f \in E'$ alors $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |< f, x >| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |< \xi, f >|$ car J est isométrique et surjective.

Par Hahn-Banach, $\sup_{\|\xi\|\leq 1} | < \xi, f > | = \max_{\|\xi\|\leq 1} | < \xi, f > |$ et donc $\exists x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq 1$ et $\|f\| = | < f, x_0 > |$.

Exercice 5

On peut vérifier facilement que si φ_n converge faiblement vers φ alors elle converge simplement sur $[0,1]$ vers φ et donc nécessairement $\varphi(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$, donc φ n'est pas continue, ce qui est impossible. On peut en conclure que E n'est pas réflexif.

12.4 Chapitres V et VI

Exercice 1

1) On a $\chi_n(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$, $\chi_n \longrightarrow 0$ p.p. et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n^2 = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$. Donc $\chi_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\chi_n \not\longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
2) L'ensemble $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ par exemple. Soit $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0\}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $g_n = f - (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \in E$ et $f - g_n = (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc E est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\Omega)$ avec $|f| \leq M$ p.p. alors $\int_A |f|dx \leq M|A|$ donc pour $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ et $|A| \leq \delta \Longrightarrow \int_A |f|dx \leq \varepsilon$.
En utilisant le fait que les fonctions continues et bornées sont denses dans L^1, on en déduit le cas général.

Exercice 3 (J.M.Bony, Ecole Polytechnique)

1) Soit $F(x,y) = f(x - y^n)g(y)$ alors $\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = \|f\|_{L^1}|g(y)|$ et

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx)dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

donc par le Théorème de Fubini-Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De plus, p.p. x, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,y)dy$ est définie et est dans $L^1(\mathbb{R})$. Enfin, $\|T_n(f)\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.
2) On a

$$\begin{array}{rcll} \forall x, & y & \mapsto & f(x - y^n)g(y) \in L^1(\mathbb{R}), \\ \text{p.p.} y, & x & \mapsto & f(x - y^n)g(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \end{array}$$

et $\forall x$, $|f(x - y^n)g(y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, donc par le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $T_n(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x$, $|T_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1}$ donc $T_n(f)$ est bornée.
3) On écrit $T_n(f)(x) = A_n + B_n$ où $A_n = \int_{|y|<1} f(x - y^n)g(y)dy$ et $B_n = \int_{|y|>1} f(x - y^n)g(y)dy$.
Etude de A_n :

Quand $n \to \infty$, $f(x - y^n)g(y) \longrightarrow f(x)g(y)$ p.p. et $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$. Par le Théorème de convergence dominée, $A_n \longrightarrow f(x)\int_{|y|<1} g(y)dy$.
Etude de B_n :

Quand $n \to \infty$, $x - y^n \longrightarrow \pm\infty$ et par hypothèse $f(x - y^n) \longrightarrow 0$ donc $f(x - y^n)g(y) \longrightarrow 0$ p.p. Enfin, $|f(x - y^n)g(y)| \leq M|g(y)| \in L^1$, donc le Théorème de convergence dominée montre que $B_n \longrightarrow 0$.

D'où $T_n(f)(x) \longrightarrow C\ f(x)$ avec $C = \int_{|y|<1} g(y)dy$.

Exercice 4

Par le Théorème de Fubini, $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.
$(f, g) \mapsto (f \star g)$ est bilinéaire donc $\star$ est distributive par rapport à l'addition. Enfin, il est évident que $\star$ est commutative, donc il reste à voir que $\star$ est associative. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, en appliquant le Théorème de Fubini et en effectuant un changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
(f \star g) \star h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \star g(x - y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x - y - u)g(u)h(y)dydu, \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(y)g(v - y)f(x - v)dvdy, \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x - v)g \star h(v)dv = f \star (g \star h)(x).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un élément neutre δ pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f_n \geq 0$, de support $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et telle que $f_n(0) = \|f_n\|_\infty = 1$. Alors $\delta \star f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta \star f_n(x) = f_n \star \delta(x) = f_n(x)$, donc en particulier

$$f_n \star \delta(0) = f_n(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(-y)\delta(y)dy.$$

Soit $g_n(y) = f_n(-y)\delta(y)$ alors $g_n(y) \longrightarrow 0$ p.p. et $|g_n(y)| \leq |\delta(y)| \in L^1(\mathbb{R})$. Le Théorème de convergence dominée montre que $\int_{\mathbb{R}} g_n \longrightarrow 0$, d'où contradiction.

Exercice 5

Comme la suite f_n est de Cauchy, on peut reprendre la démonstration du Théorème 6.3 chap. VI, et extraire une sous-suite f_{n_k} qui converge p.p. vers une limite notée h_0 (on ne sait pas a priori que $f = h_0$ p.p.). En reprenant les mêmes notations que dans la démonstration du Théorème 6.3, on a de plus, p.p. x, $\forall k$, $|f_{n_k}(x) - h_0(x)| \leq g(x)$ qui est chapeau intégrable. Par le Théorème de convergence dominée, il en résulte que $h_0 \in L^1$ et $f_{n_k} \longrightarrow h_0$ dans L^1. Par conséquent $f = h_0$ p.p. La sous-suite est clairement dominée par $h = |h_0| + g$.

Exercice 6

$\forall t > 0$, $x \mapsto e^{-t}\,t^{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto e^{-t}\,t^{x-1} \in L^1(]0, +\infty[)$. Enfin, $\forall [a, b] \subset]0, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a,

$$|e^{-t}\,t^{x-1}| \leq \mathbb{I}_{(0,1)}e^{-t}\,t^{a-1} + \mathbb{I}_{(1,+\infty)}e^{-t}\,t^{b-1} \in L^1(0, +\infty).$$

Par le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on conclut que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall k$, $\frac{\partial}{\partial x^k}(e^{-t}\,t^{x-1}) = e^{-t}(\log t)^k t^{x-1}$ et

$$|\frac{\partial}{\partial x^k}(e^{-t}\,t^{x-1})| \leq \mathbb{I}_{(0,1)}e^{-t}|\log t|^k t^{a-1} + \mathbb{I}_{(1,+\infty)}e^{-t}|\log t|^k t^{b-1} \in L^1(0,+\infty),$$

$\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$. Donc le Théorème de dérivation sous le signe somme montre que Γ est $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$, $\forall k$, donc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 7

1) On suppose $\theta \in]0,1[$. On peut toujours écrire

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta}|f|^{(1-\theta)r}.$$

Posons $g = |f|^{r\theta}$ et $h = |f|^{(1-\theta)r}$ alors $g \in L^{\frac{p}{r\theta}}$ et $h \in L^{\frac{q}{(1-\theta)r}}$ où $\frac{r\theta}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = 1$. Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int gh \leq \|g\|_{\frac{p}{r\theta}}\,\|h\|_{\frac{q}{(1-\theta)r}},$$

c'est à dire

$$\int |f|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\theta}{p}} + (\int |f|^q)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}.$$

2) Si $E = \bigcup_n E_n$ et E_n fermé dans $(E, \|\,\|_1)$ alors $(E, \|\,\|_1)$ étant complet, on peut appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$ tel que $\mathrm{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$. Donc $\exists f \in E$ et $\exists r > 0$ tels que $B(f,r) \subset E_{n_0}$. Si $g \in E$, $g \neq 0$ alors $f + \frac{r}{2}\frac{g}{\|g\|_1} \in B(f,r) \subset E_{n_0}$ donc $g \in L^{1+\frac{1}{n_0}}$ et $|\frac{r}{2}\frac{1}{\|g\|_1}\|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} - \|f\|_{1+\frac{1}{n_0}}| \leq n_0$ $\Longrightarrow \|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} \leq \frac{4n_0}{r}\|g\|_1$.
D'où $id : E, \|\,\|_1 \longrightarrow L^{1+\frac{1}{n_0}}$ est continue.
Montrons que $E = \bigcup_n E_n$. Si $f \in E$ alors $\exists q > 1$ tel que $f \in L^1 \cap L^q$. Donc $\exists N_0$ tel que à la fois $\|f\|_1 \leq N_0$ et $\forall n \geq N_0$, $1 + \frac{1}{n} < q$. Soit $r_n = 1 + \frac{1}{n}$ alors par 1),

$$\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1^{\theta_n}\|f\|_q^{(1-\theta_n)}, \text{ où } \frac{1}{r_n} = \frac{n}{n+1} = \theta_n + \frac{1-\theta_n}{q}.$$

Or $\theta_n(1-\frac{1}{q}) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{q}$ où $q > 1$ donc $\theta_n \longrightarrow 1$ et $\|f\|_1^{\theta_n}\|f\|_q^{(1-\theta_n)} \longrightarrow \|f\|_1$. Donc $\exists N \geq N_0 + 1$ tel que $\forall n \geq N$ $\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1 + 1 \leq N_0 + 1 \leq N$ et $f \in E_N$ par exemple. D'où $E = \bigcup_n E_n$.
Montrons que $\forall n$, E_n est fermé dans $(E, \|\,\|_1)$. Soit $(f_p)_p \subset E_n$ telle que $f_p \longrightarrow f$ dans $(E, \|\,\|_1)$. A-t'on $f \in E_n$?
$\|f_p - f\|_1 \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ il existe une sous-suite $(f_{p_k})_k$ telle que $f_{p_k} \longrightarrow f$ p.p. (voir l'exercice 5 chap.VI), donc

$$\begin{cases} |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow |f|^{1+\frac{1}{n}} \text{ p.p.,} \\ |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1,\ |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \geq 0 \text{ p.p.,} \\ \forall k,\ \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Le lemme de Fatou montre que $|f|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1$, soit $f \in L^{1+\frac{1}{n}}$, et

$$\int |f|^{1+\frac{1}{n}} \leq \liminf \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}.$$

Donc $f \in E_n$, et E_n est fermé.

Exercice 8

1) On a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}$ donc $\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
Soient $0 < k < \|f\|_\infty$ et $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$, alors $|A| \neq 0$ et $\|f\|_p \geq k\,|A|^{\frac{1}{p}}$. Donc $\liminf \|f\|_p \geq k$ et ceci $\forall k < \|f\|_\infty$. D'où $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$ et $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
2) Soit $k > C$ et soit $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}$ alors

$$k^p |A| \leq \|f\|_p^p \leq C^p \implies |A| \leq \left(\frac{C}{k}\right)^p, \ \ \forall p.$$

Quand $p \to \infty$, on obtient $|A| = 0$, donc p.p. x $|f(x)| \leq k$ et $f \in \ell^\infty$.
3) Soit $f(x) = \log x$, alors $f \notin \ell^\infty(0,1)$. Soit $1 \leq p < +\infty$ comme $\sqrt{x}|\log x|^p \longrightarrow 0$ quand $x \to 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|x| \leq \varepsilon \Longrightarrow |\log x|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$|f(x)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{(0,\varepsilon)} + |\log x|^p \mathbb{I}_{(\varepsilon,1)} \in L^1(0,1),$$

donc $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

12.5 Chapitre VII

Exercice 1

1) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^1 et L^2. Donc $\exists f \in L^1$, $\exists g \in L^2$ telles que $f_n \longrightarrow f$ dans L^1 et $f_n \longrightarrow g$ dans L^2. En utilisant la "réciproque" du Théorème de convergence dominée, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \longrightarrow f$ p.p. et $f_{n_k} \longrightarrow g$ dans L^2, donc il existe une sous-suite $(f_{n_{k_l}})_l$ telle que $f_{n_{k_l}} \longrightarrow g$ p.p. D'où $f = g$ p.p. et $f_n \longrightarrow f$ dans E, donc E est un espace de Banach.
En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx| \leq \|f_1\|_\infty \|u\|_1 + \|f_2\|_2 \, \|u\|_2 \leq (\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_2) \, \|u\|.$$

Donc $u \mapsto \int fudx \in E'$.
2) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on peut toujours écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx = \int_{[|x|>M]} \frac{1}{|x|^\alpha} udx + \int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha} udx.$$

Soient $f_1(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \mathbb{I}_{[|x|>M]}$ et $f_2(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \mathbb{I}_{[|x|\leq M]}$, alors $\alpha > 0 \Longrightarrow f_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $2\alpha < 1 \Longrightarrow f_2 \in L^2(\mathbb{R})$. La question 1) permet alors de conclure.
3) K est évidemment convexe, montrons qu'il est fermé. Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E, alors $u_n \longrightarrow u$ dans L^1 donc $\int u_n \longrightarrow \int u$ et on en déduit que $\int u \leq 1$. La convergence dans L^1 implique aussi qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \longrightarrow u$ p.p. donc $u \geq 0$ p.p. et on en conclut que $u \in K$. Donc K est fermé.

4) Posons $K_0 = \{u \in L^2 : u \geq 0\,\text{p.p.}\}$ alors K_0 est un convexe fermé fort de L^2 donc fermé faible de L^2, donc $u \in K_0$. Il reste à montrer que $u \in L^1$ et $\int u \leq 1$.
Soit A un ensemble mesurable de mesure finie (notation $|A| < \infty$), alors $\mathbb{I}_A \in L^2$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2 faible $\Longrightarrow \int \mathbb{I}_A u_n \longrightarrow \int \mathbb{I}_A u$. Or $\int \mathbb{I}_A u_n \leq \int u \leq 1$ donc $\forall A$ tel que $|A| < \infty$, $\int_A u \leq 1$.
Pour passer à $\mathbb{R}$ tout entier, on utilise le lemme de Fatou.
Soit $v_n = \mathbb{I}_{(-n,n)} u$ alors $v_n \in L^1$, $v_n \geq 0$ p.p., $v_n \longrightarrow u$ p.p. et $\sup_n \int v_n \leq 1$, donc par le lemme de Fatou, on en déduit que $u \in L^1$ et $\int u \leq \liminf \int v_n \leq 1$. Donc $u \in K$.
5) Soit $M > 0$, alors

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| &\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + |\int_{[|x|>M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)|, \\ &\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + \frac{1}{M^\alpha}(\|u_n\|_1 + \|u\|_1), \\ &\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + \frac{2}{M^\alpha}, \end{aligned}$$

puisque $u_n, u \in K$.
Comme u_n converge faiblement vers u dans L^2,

$$\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u) \longrightarrow 0.$$

Donc en prenant la lim sup sur n, on obtient

$$\limsup |\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| \leq \frac{2}{M^\alpha},$$

et ceci $\forall M > 0$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on a $\limsup |\int \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| = 0$ d'où

$$\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_n \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u.$$

6) On peut écrire, par exemple, pour $u \in K$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} u = \int_{[|x|\leq 1]} \frac{1}{|x|^\alpha} u + \int_{[|x|>1]} \frac{1}{|x|^\alpha} u \leq \mathcal{C}_0 \|u\|_2 + \|u\|_1 \leq C \|u\|_1 + 1,$$

où $\mathcal{C}_0 = \|\mathbb{I}_{[|x|\leq 1]} \frac{1}{|x|^\alpha}\|_2$. Alors pour $u \in K$, on a

$$J(u) \geq \|u\|_2^2 - \mathcal{C}_0 \|u\|_2 - 1 \geq C,$$

où C est une constante indépendante de $u \in K$. (Par exemple $C = -(1 + \frac{\mathcal{C}_0^2}{4})$ convient.)
7) Soit $(u_n)_n \subset K$, une suite minimisante, par exemple telle que $m \leq J(u_n) \leq m + \frac{1}{n}$. D'après la question 6), on a

$$\|u_n\|_2^2 - \mathcal{C}_0 \|u_n\|_2 - 1 \leq J(u_n) \leq m + 1, \quad \forall n,$$

donc nécessairement $\|u_n\|_2$ reste bornée, donc $\exists M_0$ tel que $\forall n$, $\|u_n\|_2 \leq M_0$ alors $\|u_n\| \leq M_0 + 1$.
8) La suite $(u_n)_n$ est bornée dans L^2 réflexif, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans L^2 faible et $u_{n_k} \in K$. Alors la question 4) montre que $u \in K$ et la question 5) montre que

$\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k} \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$.
D'autre part,

$$J(u_{n_k}) \leq m + \frac{1}{n_k} \text{ donc } \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \frac{1}{n_k} + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k}.$$

On prend les lim inf dans cette inégalité, on obtient $\liminf \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$. Comme $\|\ \|_2^2$ est s.c.i. faible, on a $\|u\|_2^2 \leq \liminf \|u_{n_k}\|_2^2$, donc finalement $\|u\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$, soit $J(u) \leq m$. D'où $J(u) = m$.
9) La réponse est non. En effet supposons E réflexif. Soit $f_n = \mathbb{I}_{(n,n+1)}$ alors $\|f_n\|_1 = \|f_n\|_2 = 1$ donc $\|f_n\| = 2$. Si E est réflexif alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans E faible.
Soit $g \equiv 1$ alors $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u \mapsto \int gu \in E'$ donc $1 = \int f_{n_k} \longrightarrow \int f$, d'où $\int f = 1$.
Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ alors $u \mapsto \int gu \in E'$ et $\int g f_{n_k} \longrightarrow \int gf$. Or, $\exists N$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset \overline{B}(0, N)$ et si $k \geq k_0$, $n_k > N$, donc $f_{n_k} \equiv 0$ sur $\mathrm{supp}(g)$ et $\int g f_{n_k} = 0$, ceci pour tout $k \geq k_0$. On en déduit que $\int fg = 0$, $\forall g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ donc $f = 0$ p.p. or $\int f = 1$, c'est absurde.

Exercice 2

On pose $K = \{u \in L^p(\Omega);\ u \geq f\ p.p.\}$.
1) K est convexe fermé fort donc fermé faible.
2) a) Posons $K_\varphi = \{u \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\varphi \geq \int_\Omega f\varphi\}$ où $\varphi \in L^1$, $\varphi \geq 0$ p.p. et est telle que $f\varphi \in L^1$.
Soit $K_0 = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ où l'intersection est prise sur l'ensemble $\Phi = \{\varphi \in L^1,\ \varphi \geq 0,\ f\varphi \in L^1\}$.
Montrons que $K = K_0$. Il est clair que $K \subset K_0$. Soit donc $u \in K_0$, alors $\forall \varphi \in L^1$ telles que $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$, on a $\int u\varphi \geq \int f\varphi$.
Soit $\Omega_n = \{x : |f(x)| < n\}$ et soit $E = \{x : u(x) < f(x)\}$, on va montrer que $|E| = 0$.
Supposons d'abord $|\Omega| < \infty$.
On a $\Omega = \bigcup_n \uparrow \Omega_n$. Soit $\varphi = \mathbb{I}_{E \cap \Omega_n}$, alors $\varphi \in L^1(\Omega)$ car $|\Omega| < \infty$, $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$ car $|f| < n$. Alors

$$\int_{E \cap \Omega_n} (u - f)\varphi = \int_\Omega (u - f)\varphi \geq 0.$$

Or $u - f < 0$ sur $E \cap \Omega_n$ donc nécessairement $|E \cap \Omega_n| = 0$ et ceci $\forall n$, donc $E = \cup_n (E \cap \Omega_n)$ est négligeable.
Si $|\Omega| = +\infty$, alors $\Omega = \cup_k \uparrow \omega_k$ où $\omega_k = \Omega \cap B(0, k)$. On se restreint donc à ω_k, $|\omega_k| < \infty$ et $E = \bigcup_{n,k} E_{n,k}$ où $E_{n,k} = E \cap \Omega_n \cap \omega_k$.
Soit $\varphi = \mathbb{I}_{E_{n,k}}$ alors comme tout à l'heure, $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ p.p., $f\varphi \in L^1$ et on montre de la même façon que ci-dessus que $E_{n,k}$ est négligeable. Donc E est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. On en conclut que $u \in K$ d'où $K = K_0$.
b) Si $\varphi \in L^1$, $u \mapsto \int u\varphi$ est continue sur ℓ^∞ pour la topologie faible $\star$ donc K_φ est fermé faible $\star$ et $K = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ est fermé faible $\star$.
c) Les boules fermées sont compactes faible $\star$ et $K \subset \overline{B}(0, \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty)$ donc K est compact faible $\star$.

Exercice 3

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ et $\mathrm{supp}(g) \subset K$ compact fixe. On peut

écrire
$$\|\tau_{y_1}f - \tau_{y_2}f\|_1 \leq \|\tau_{y_1}f - \tau_{y_1}g\|_1 + \|\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g\|_1 + \|\tau_{y_2}g - \tau_{y_2}f\|_1.$$
L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entrainne que $\|\tau_y f - \tau_y g\|_1 = \|f - g\|_1$, $\forall y$, donc on obtient
$$\|\tau_{y_1}f - \tau_{y_2}f\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g\|_1.$$
La fonction g étant uniformément continue, $\exists\delta > 0$ (on peut supposer $\delta \leq 1$), tel que $\forall x$, $\forall |y_1 - y_2| \leq \delta$, $|g(x - y_1) - g(x - y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ où $C = |K + \overline{B}(0,1)|$. Alors
$$\int_{\mathbb{R}} |\tau_{y_1}g - \tau_{y_2}g| dx = \int_{K+\overline{B}(0,\delta)} |g(x + y_2 - y_1) - g(x)| dx \leq \varepsilon.$$
(Si $x \notin K + \overline{B}(0,1)$, alors $x \notin K$ et $\forall |y_1 - y_2| \leq \delta$, $x + y_2 - y_1 \notin K + \overline{B}(0,\delta)$ donc l'intégrale ci-dessus est nulle.)

Exercice 4

1) Par la propriété d'absolue continuité, on sait que si $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $\forall A$ mesurable $\subset \Omega$ avec $|A| \leq \delta$, on ait $\int_A |f|^p \leq \varepsilon$.
Pour ce δ, on applique le Théorème d'Egoroff, comme $f_n \longrightarrow f$ p.p., $\exists A$ mesurable $\subset \Omega$ tel que $|A| \leq \delta$ et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Donc,
$$\int_{\Omega\setminus A} |f_n - f|^p \leq |\Omega \setminus A| \|f_n - f\|_{\ell^\infty(\Omega\setminus A)} \longrightarrow 0,$$
puisque $|\Omega \setminus A| < \infty$.
$$\int_A |f_n - f|^p \leq 2^p \int_A |f_n|^p + 2^p \int_A |f|^p \leq 2^p \int_A |f_n|^p + 2^p\varepsilon.$$
Mais,
$$\int_A |f_n|^p = \int_\Omega |f_n|^p - \int_{\Omega\setminus A} |f_n|^p,$$
avec $\int_\Omega |f_n|^p \longrightarrow \int_\Omega |f|^p$ par hypothèse et $\int_{\Omega\setminus A} |f_n|^p \longrightarrow \int_{\Omega\setminus A} |f|^p$ car il y a convergence uniforme sur $\Omega\setminus A$. Donc $\int_A |f_n|^p \longrightarrow \int_A |f|^p \leq \varepsilon$. D'où pour n assez grand $\int_A |f_n|^p \leq 2\varepsilon$ et $\int_{\Omega\setminus A} |f_n - f|^p \leq \varepsilon$, on en déduit que $\int_\Omega |f_n - f|^p \leq 2^p(2\varepsilon) + 2^p\varepsilon + \varepsilon$.
Remarque :
Sans supposer Ω borné, on peut démontrer ce résultat de la façon suivante :
Soit $g_n = \alpha_p(|f|^p + |f_n|^p) - |f - f_n|^p$ où $\alpha_p = 2^{p-1}$, on lui applique le lemme de Fatou et on obtient $\limsup \|f - f_n\|_p^p \leq 0$ d'où la convergence dans L^p.
2) Soit $\varphi \in L^{p'}$, on veut montrer que $\int_\Omega (f_n - f)\varphi \longrightarrow 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $\forall A$ mesurable $\subset \Omega$ avec $|A| \leq \delta$, on ait $\|\varphi\|_{L^{p'}(A)} \leq \varepsilon$ et par le Théorème d'Egoroff, $\exists A$ mesurable $\subset \Omega$ tel que $|A| \leq \delta$ et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Alors
$$\int_{\Omega\setminus A} |f_n - f||\varphi| \leq \|f_n - f\|_{\ell^\infty(\Omega\setminus A)} \|\varphi\|_{p'} |\Omega \setminus A|^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$
si n est assez grand. D'autre part,
$$\int_A |f_n - f||\varphi| \leq \|f_n - f\|_p \,\varepsilon \leq (C + \|f\|_p)\varepsilon.$$

Donc pour n assez grand, $|\int_\Omega (f_n - f)\varphi| \leq \varepsilon + (C + \|f\|_p)\varepsilon$ donc $f_n \rightharpoonup f$ dans L^p faible.
3) Soit $f_n = n\mathbb{I}_{(0,\frac{1}{n})}$ alors $f_n \longrightarrow 0$ p.p. et $\|f_n\|_1 = 1$. Si f_n converge faiblement vers 0 alors $\forall \varphi \in \ell^\infty$, $\int_0^1 f_n\varphi \longrightarrow 0$, or pour $\varphi \equiv 1$, on a $\int f_n\varphi = 1$, c'est absurde.

Exercice 5

Première partie :
1) Comme Ω est borné, on peut recouvrir Ω par un nombre fini de boules de mesure $< \delta$ où δ correspond à $\varepsilon = 1$ par exemple.
2) On suppose que que $(f_n)_n$ est équi-intégrable. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donné par l'équi-intégrabilité, on a

$$\text{mes}[|f_n| > k] \leq \frac{1}{k}\int_\Omega |f_n| \leq \frac{1}{k}\sup_n \|f_n\|_1 \leq \frac{C}{k},$$

par 1). Et $\exists k_0$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\frac{C}{k} < \delta$ alors $\forall n$,

$$\int_{[|f_n|>k]} |f_n| < \varepsilon, \ \ \forall k \geq k_0.$$

D'où le résultat.
On suppose maintenant que

$$\lim_{k\to+\infty} (\sup_{n\geq 1} \int_{[|f_n|>k]} |f_n| dx) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, alors

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| &= \int_{E\cap[|f_n|>k]} |f_n| + \int_{E\cap[|f_n|\leq k]} |f_n|, \\ &\leq \int_{[|f_n|>k]} |f_n| + k|E|. \end{aligned}$$

On fixe $k = k_0$ tel que $\forall n \geq 1$, $\int_{[|f_n|>k_0]} |f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{2k_0}$ alors $|E| < \delta \Longrightarrow \int_E |f_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$.
3) Soit $\varepsilon > 0$ donné, l'ensemble $\{f_n, n \geq 1\}$ étant relativement compacte dans $L^1(\Omega)$, est inclus dans une union finie de boules de centre g_i et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc si $f_n \in B(g_i, \frac{\varepsilon}{2})$ alors

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| &\leq \|f_n - g_i\|_1 + \int_E |g_i|, \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_E |g_i|. \end{aligned}$$

Or l'ensemble fini des g_i est équi-intégrable (il suffit d'appliquer la propriété d'absolue continuité à $g = \sum |g_i|$) donc $\exists \delta > 0$ tel que $\forall |E| < \delta$,

$$\int_E |f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_E |g_i| < \varepsilon.$$

Deuxième partie :
1) X est fermé car si $\mathbb{I}_{A_n} \to f$ dans L^1 alors pour une sous-suite, $\mathbb{I}_{A_{n_k}} \to f$ p.p. Maintenant si $A = \{x : f(x) = 1\}$ alors $f = \mathbb{I}_A$ donc $f \in X$.

Les applications $\mathbb{I}_A \mapsto \int_A f_k dx$ sont continues sur X donc X_n est fermé. Enfin $\forall A \subset \Omega$ mesurable, $\lim_n \int_A f_n = 0 \Longrightarrow X = \cup_n X_n$. On peut donc appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$, $\exists R > 0$, $\exists \mathbb{I}_{A_0} \in X_{n_0}$ tels que si $\mathbb{I}_A \in X$ et $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_{A_0}\|_{L^1} < R$ alors $\forall k \geq n_0$, $|\int_A f_k| \leq \varepsilon$.
Soit donc E mesurable, $E \subset \Omega$ avec $|E| < R$, posons $E_k = E \cap [f_k \geq 0]$ alors $A = A_0 \cup E_k$ vérifie $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_{A_0}\|_{L^1} < R$ donc

$$|\int_{A_0 \cup E_k} f_k| \leq \varepsilon.$$

De même, si $A = A_0 \setminus E_k$ alors $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_{A_0}\|_{L^1} < R$ et

$$|\int_{A_0 \setminus E_k} f_k| \leq \varepsilon.$$

Or $\int_{E_k} f_k = \int_{A_0 \cup E_k} f_k + \int_{A_0 \setminus E_k} f_k$ donc

$$|\int_E f_k^+| = |\int_{E_k} f_k| \leq 2\varepsilon.$$

On montre de la même façon, en considèrant $E_K = E \cap [f_k \leq 0]$, que

$$|\int_E f_k^-| \leq 2\varepsilon.$$

D'où, $\forall k \geq n_0$, $\int_E |f_k| \leq 4\varepsilon$. En utilisant de nouveau le fait que $\{f_1, ..., f_{n_0}\}$ est équi-intégrable, on conclut.
2) La suite $(f_n - f)_n$ vérifie les hypothèses de la question précèdente, elle est donc équi-intégrable. Comme $\int_E |f_n| \leq \int_E |f_n - f| + \int_E |f|$, on conclut en utilisant la propriété d'absolue continuité appliquée à $|f|$.
3) D'après ci-dessus, $(f_n - f)_n$ est équi-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $\delta > 0$ donné par l'équi-intégrabilité. D'après le Théorème d'Egoroff, $\exists A \subset \Omega$ tel que $|A| < \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_n - f| &= \int_A |f_n - f| + \int_{\Omega \setminus A} |f_n - f|, \\ &\leq \varepsilon + |\Omega \setminus A| \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega \setminus A)}, \end{aligned}$$

et pour n assez grand le deuxième terme est plus petit que ε.

12.6 Chapitre VIII

Exercice 1

1) On note $\mathbb{P}_2$ =vect$\{1, x, x^2\}$, c'est un espace vectoriel de dimension finie donc fermé. Par le Théorème de projection dans $L^2(-1,1)$, $\exists! P \in \mathbb{P}_2$ tel que $d(x^3, \mathbb{P}_2) = \|x^3 - P\|$ et $(x^3 - P, v) = 0$, $\forall v \in \mathbb{P}_2$ où $(,)$ dénote le produit scalaire usuel dans L^2. En choisissant successivement $v = 1, x, x^2$, on determine explicitement P et on trouve $P(x) = \frac{3}{5}x$ d'où $\|x^3 - P\|^2 =$

$\int_{-1}^{1}|x^3-\frac{3}{5}x|^2dx=\frac{8}{175}$.
Si $g\in\mathbb{P}_2^{\perp}$ alors

$$\begin{aligned}(x^3,g) &= (x^3-q,g), \quad \forall q\in\mathbb{P}_2,\\ &\leq d(x^3,\mathbb{P}_2)\|g\|,\end{aligned}$$

donc finalement si $g\in\mathbb{P}_2^{\perp}$ et $\|g\|=1$ alors $(x^3,g)\leq\|x^3-P\|$ où $P(x)=\frac{3}{5}x$. Soit $g_0=\frac{x^3-P}{\|x^3-P\|}$ alors $g_0\in\mathbb{P}_2^{\perp}$, $\|g_0\|=1$ et $(x^3,g_0)=(x^3-P,g_0)=\|x^3-P\|=\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$ donc

$$\max\{\int_{-1}^{1}x^3g(x)dx\;:\;g\in\mathbb{P}_2^{\perp},\|g\|=1\}=(x^3,g_0)=d(x^3,\mathbb{P}_2).$$

2) Si $x_0\in M$ où M est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $d(x_0,M)=\|x_0-P_Mx_0\|$ où P_Mx_0 est la projection orthogonale de x_0 sur M et $(x_0-P_Mx_0,v)=0$, $\forall v\in M$. Si $y\in M^{\perp}$, $\|y\|=1$ alors $(x_0,y)=(x_0-P_Mx_0,y)\leq\|x_0-P_Mx_0\|$ donc

$$\max\{(x_0,y):y\in M^{\perp},\|y\|=1\}\leq\|x_0-P_Mx_0\|=\min\{\|x_0-x\|,x\in M\},$$

et

$$(x_0-P_Mx_0,\frac{x_0-P_Mx_0}{\|x_0-P_Mx_0\|})=(x_0,\frac{x_0-P_Mx_0}{\|x_0-P_Mx_0\|})=\|x_0-P_Mx_0\|.$$

Donc le max est atteint en $y=\frac{x_0-P_Mx_0}{\|x_0-P_Mx_0\|}$ et sa valeur est égale à $d(x_0,M)$ d'où

$$\max\{(x_0,y):y\in M^{\perp},\|y\|=1\}=\min\{\|x_0-x\|,x\in M\}.$$

Exercice 2

1) $(S,\|\,\|_1)$ est un Banach et on veut montrer que $i\,:\,(S,\|\,\|_1)\longrightarrow L^{\infty}$ est continue, pour cela on utilise le Théorème du graphe fermé. Soit $f_n\longrightarrow f$ dans $(S,\|\,\|_1)$ et $f_n\longrightarrow g$ dans ℓ^{∞}, a-t'on $f=g$ p.p. ? oui, car il existe une sous-suite de f_n qui converge p.p. vers f.
D'autre part, on a $\|f\|_1\leq\|f\|_2$ donc S est fermé dans L^2 et $\|f\|_{\infty}\leq M\|f\|_2$.
2)On vient de voir que $(S,\|\,\|_2)$ est un espace de Hilbert. On considère la fonction $f_c(x)=\sum_1^n c_i\Phi_i(x)$ où $c=(c_i)_i\in B=\overline{B}(0,1)$ alors $f_c\in S$ et $\|f_c\|_2^2=\sum_i|c_i|^2\leq 1$, $\forall c\in B$. Donc $\forall c\in B$, $\|f_c\|_{\infty}\leq M$. Soit D une partie dénombrable et dense dans B. Comme D est dénombrable, $\exists\Omega'\subset\Omega$ tel que $\mu(\Omega')=1$ et tel que $\forall x\in\Omega'$, $\forall c\in D$, $|f_c(x)|\leq M$.
Pour x fixé dans Ω', $c\mapsto f_c(x)$ est continue sur B, et par densité de D dans B, on a $|f_c(x)|\leq M$, $\forall c\in B$ et $\forall x\in\Omega'$. En choisissant convenablement c, on peut facilement montrer que $\sup_{c\in B}|f_c(x)|=(\sum_1^n|\Phi_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc

$$\forall x\in\Omega',\quad\sum_1^n|\Phi_i(x)|^2\leq M^2.$$

On intègre cette inégalité et on obtient $n\leq M^2$. Donc nécessairement $\dim S<\infty$.

Exercice 3 Base de Haar

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Le support de H_k^l est $I_k^l = [\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. Donc si $l = l'$ et $k \neq k'$, les supports de H_k^l et $H_{k'}^{l'}$ sont disjoints donc $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Si $l \neq l'$, par exemple $l > l'$ alors $H_{k'}^{l'}$ est constante sur les intervalles dyadiques de longueur $2^{-l'-1}$ donc est constante sur le support de H_k^l. Comme H_k^l est de moyenne nulle, on en déduit que $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Enfin $\|H_k^l\|_{L^2}^2 = 2^l \int_{I_k^l} 1dx = 1$. Donc $(H_k^l)_{l,k}$ forme un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
2) Il y a

$$\begin{array}{rcr}
1 & \text{fonction constante par morceaux sur les intervalles de longueur} & \dfrac{1}{2}, \\
1+2 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{1}{4}, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & .., \\
1+2+\dots+2^{j-1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{1}{2^j}.
\end{array}$$

Donc card(S_j)= $2^j - 1$. Or W_j est un espace de codimension 1 dans un espace de dimension 2^j, l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j}, donc le système S_j forme une base de W_j.
3) Les fonctions indicatrices des intervalles dyadiques sont denses dans $L^2(0,1)$ donc $\{1, H_k^l, l \geq 0, k = 0, ..., 2^l - 1\}$ forme une base orthogonale de $L^2(0,1)$. Si on enlève la fonction égale à 1, les H_k^l forment une base orthogonale de $\{f \in L^2(0,1)$, f à moyenne nulle $\}$, et par symétrie par rapport à 0 et dilatations, les H_k^l, $l \geq -j$, $k = -2^l, ..., 2^l - 1$ forment une base orthogonale des fonctions de $L^2(-2^l, 2^l)$ d'intégrale nulle sur $[-2^j, 0]$ et $[0, 2^j]$.
3) Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme les fonctions à supports compacts sont denses dans L^2, on peut supposer que f est à support compact. On découpe f en $f = \mathbb{I}_{(0,+\infty)} f + \mathbb{I}_{(-\infty,0)} f$. Soit $g = \mathbb{I}_{(0,+\infty)} f$ alors g est à support compact dans $\mathbb{R}^+$, soit $[0, A]$ son support alors $A \leq 2^j$ pour un j. On connait une base de $L^2(0, 2^j)$ en ajoutant aux H_k^l la fonction $e_1 = 2^{-\frac{j}{2}} \mathbb{I}_{(0,2^j)}$ donc $g = (g, e_1)e_1 + \sum_{i \geq 2} (g, e_i) e_i$ où les e_i pour $i \geq 2$ sont les H_k^l. Alors $\|g - \sum_{i \geq 2} (g, e_i) e_i\|_2 = |(g, e_1)|$. Montrons que pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir j tel que $|(g, e_1)| \leq \varepsilon$. On a

$$|(g, e_1)| = |\int_0^A 2^{-\frac{j}{2}} g(x) dx| \leq 2^{-\frac{j}{2}} \|g\|_2 \sqrt{A},$$

et on veut rendre ce terme plus petit que ε, il est clair que c'est vrai pour j assez grand. On raisonne de la même façon pour le terme $\mathbb{I}_{(-\infty,0)} f$, donc on approxime arbitrairement bien toute fonction à support compact et par densité toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1) Pour montrer que $(x, 2y) = 2(x, y)$, on applique l'identité du parallélogramme avec $a = x + y$ et $b = y$.
2) On forme (1) $-$ (2) $+$ (3).
3) Il est facile de voir que $(nx, y) = n(x, y)$ si $n \in \mathbb{Z}$. Si $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$, alors $p(x, y) = (px, y) = (\frac{pq}{q} x, y) = pq(\frac{1}{q} x, y)$ donc $(\frac{1}{q} x, y) = \frac{1}{q}(x, y)$ et on en déduit que $(\frac{p}{q} x, y) = \frac{p}{q}(x, y)$. Enfin, par définition de $(,)$, l'application $\lambda \mapsto (\lambda x, y)$ est continue donc on conclut aisément.

12.7 Chapitre IX

Exercice 1

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|s_j - s| \leq \varepsilon$ et

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s = \frac{1}{n+1}\sum_0^n (s_j - s).$$

Donc pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s| &\leq \frac{1}{n+1}(\sum_0^N |s_j - s| + \sum_{N+1}^n |s_j - s|), \\ &\leq \frac{1}{n+1}(\sum_0^N |s_j - s| + (n-N)\varepsilon). \end{aligned}$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \geq N$ tel que $\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon$, donc si $n \geq N_1$, on a $\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon$ et d'autre part $(n-N)\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon$ d'où

$$|\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s| \leq 2\varepsilon.$$

Exercice 2

Soit $s_n = (-1)^n$ alors $(s_n)_n$ ne converge pas et $|\sum_0^n s_j| \leq 1$ donc

$$|\frac{1}{n+1}\sum_0^n (-1)^j| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Exercice 3

1) On a directement $D_N(0) = 2N+1$ et $K_N(0) = N+1$.
D'autre part, $e^{i\frac{t}{2}}D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{i(k+\frac{1}{2})t}$ et $e^{-i\frac{t}{2}}D_N(t) = \sum_{-N}^N e^{i(k-\frac{1}{2})t}$ donc $2i\text{sin}(\frac{t}{2})D_N(t) = \sum_{-N}^N (e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{i(k-\frac{1}{2})t}) = e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}$.
D'où $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ si $t \neq 0$.
On multiplie maintenant $K_N(t)$ par $\frac{2\sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}$ alors

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)}\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}(2\text{sin}(\frac{t}{2})\text{sin}(\frac{t}{2}) + 2\text{sin}(\frac{t}{2})\text{sin}(\frac{3t}{2}) + ... + 2\text{sin}(\frac{t}{2})\text{sin}((N+\frac{1}{2})t)).$$

On utilise ensuite l'égalité $2\text{sin}a\text{sin}b = \cos(a-b)\cos(a+b)$ pour obtenir

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)}\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}(1 - \cos(N+1)t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})},$$

pour $t \neq 0$.
2) Il est clair que $K_N(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et que K_N est 2π-périodique. De $\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 2\pi\delta_{k,0}$ on déduit que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D_j(t)dt = 1$ et $\|K_N\|_1 = 1$. Enfin si $\delta \leq |t| \leq \pi$ où $\delta > 0$, on a

$$K_N(t) \leq \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\right)^2 \longrightarrow 0,$$

quand $N \to \infty$.
3) On a

$$\begin{aligned} S_n(f,t) &= \sum_{-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}, \\ &= \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ik(t-x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t-x)dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t-x)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)K_n(x)dx, \end{aligned}$$

car f et K_n sont 2π-périodiques. Comme $\|K_N\|_1 = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f,t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t))K_n(x)dx\right|, \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|x|\leq\delta} |f(t-x) - f(t)|K_n(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} 2\|f\|_\infty K_n(x)dx. \right. \end{aligned}$$

La fonction f étant uniformément continue, pour $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x-y| \leq \delta$. Pour ce δ, d'après 2), $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ $|K_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$, $\forall x$ tel que $\delta \leq |x| \leq \pi$, d'où

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|K_N\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} dx \leq \varepsilon,$$

et ceci $\forall t$, donc $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ uniformément sur $[-\pi,\pi]$.
4) $\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t-x)dx$ est un polynome trigonométrique, donc 3) montre que les polynomes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$.
Si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $0 = \sigma_n(f,t) - \sigma_n(g,t) \longrightarrow f(t) - g(t)$, $\forall t$, donc $f(t) = g(t)$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$.
5) a) $\Lambda_n(f) = S_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(-t)dt$, pour $n \geq 0$ donc Λ_n est linéaire et $|\Lambda_n(f)| \leq \|D_n\|_1\|f\|_\infty$. Donc $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$ et $\|\Lambda_n\| \leq \|D_n\|_1$.
b) Soit $g_n(t) = \mathrm{sign}(D_n(-t))$ alors il existe une suite $(f_j)_j$ dans $\mathcal{C}(\Pi)$ telle que $-1 \leq f_j \leq 1$, $\forall j$ et $f_j(t) \longrightarrow g_n(t)$ p.p. quand $j \to \infty$. Le Théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)D_n(-t)dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(-t)|dt = \|D_n\|_1.$$

De $|\Lambda_n(f_j)| \leq \|\Lambda_n\|$, on déduit $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.
c) Comme $|\sin\frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}$, pour $0 \leq t \leq \pi$,

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |D_n(t)|dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(n+\frac{1}{2})t|\,\frac{dt}{t}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\|D_n\|_1 &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin x|\frac{dx}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\frac{dx}{x},\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2}\log(n+1),\end{aligned}$$

D'où $\|D_n\|_1 \longrightarrow +\infty$ quand $n \to \infty$.
d) Si $\forall f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\exists C_f$ tel que $\forall n$, $|S_n(f,0)| \leq C_f$ alors par le Théorème de Banach-Steinhaus $\exists M$ tel que $\forall n$, $\|\Lambda_n\| \leq M$ or c'est impossible d'après la question précédente. Donc $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f,0)| = +\infty$.
Remarque : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\Pi) : \sup_n |S_n(f,0)| = +\infty\}$. On peut montrer que E est dense dans $\mathcal{C}(\Pi)$ voir $[Ru1]$ par exemple.

Exercice 5

Supposons que $f \in \mathcal{C}_c^1(]-\pi,\pi[)$ alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(ax)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{1}{a}\cos(ax)dx$, donc $|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(ax)dx| \leq \frac{1}{|a|}\|f'\|_\infty 2\pi \longrightarrow 0$ quand $|a| \to +\infty$.
Si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $\exists g \in \mathcal{C}_c^1(]-\pi,\pi[)$ telle que $\|f-g\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Alors

$$|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(ax)dx| \leq \|f-g\|_{L^1} + |\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(ax)dx|,$$

d'où $\lim \int_{-\pi}^{\pi} f\sin(ax)dx = 0$ quand $|a| \longrightarrow +\infty$.

12.8 Chapitre X

Exercice 1

1) Les deux applications proposées sont bien linéaires par rapport à φ.
On pose $< T,\varphi >= \sum_{n\geq 0}\varphi^{(n)}(n)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}$ alors $|K \cap \mathbb{N}| < \infty$ et $\exists N_K$ tel que $K \cap \mathbb{N} \subset \overline{B}(0,N_K)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est à support dans K, alors $| < T,\varphi > | \leq \sum_0^{N_K}\|\varphi^{(n)}\|_\infty$ donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Soit $< T,\varphi >= \sum_{n\geq 0}\varphi^{(n)}(0)$. Il existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[-1,1]$. Soit alors $\varphi(x) = e^x\theta(x)$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\forall n$, $\varphi^{(n)}(0) = 1$ donc $T \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2) Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K alors $| < T_f,\varphi > | \leq \|f\|_{L^1(K)}\|\varphi\|_\infty$ donc $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $< \delta_0,\varphi >= \varphi(0) = \int f\varphi$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par un même raisonnement qu'à l'exercice 4 du chap.VI, on montre que c'est impossible.

Exercice 2

Comme les semi-normes p_j, pour $j \geq 0$, forment une suite croissante, on a bien défini une topologie.
1) Il est clair que $d(f,g) = d(g,f)$ et que $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$.

Soit $\Phi(x) = \inf(1, x)$ pour $x \geq 0$. On peut vérifier facilement que Φ est croissante et que $\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ donc d est bien une distance sur E. Pour montrer que les topologies sont équivalentes, il suffit de montrer que

a) $\forall n$, $\forall r > 0$, $\forall x \in E$, $\exists r_0 > 0$ tel que $B_d(x, r_0) \subset B_n(x, r)$,

b) $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $\exists N$, $\exists r_0 > 0$ tel que $B_N(x, r_0) \subset B_d(x, r)$,

où on a noté $B_d(x, r)$ la boule de centre x et rayon r pour la distance d et $B_n(x, r)$ celle associée à la semi-norme p_n.
Soit donc n, r, x donnés alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $2^n \varepsilon < \inf(1, r)$ et
$d(x, y) < \varepsilon \Longrightarrow \forall k$, $\frac{1}{2^k}\Phi(p_k(x-y)) < \varepsilon$ donc $p_n(x-y) < 2^n\varepsilon < r$ par choix de ε. D'où $B_d(x, \varepsilon) \subset B_n(x, r)$.
Soit x, r donnés et soit N tel que $\sum_{n \geq N+1} \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$.
Si $p_N(x-y) < r_0 < 1 \Longrightarrow \forall n \leq N$, $p_n(x-y) < r_0$ et

$$\sum_0^N \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(x-y)) \leq r_0 \sum_0^N \frac{1}{2^n} \leq 2r_0.$$

On choisit $r_0 < 1$ tel que $2r_0 < \frac{r}{2}$ alors $y \in B_N(x, r_0) \Longrightarrow d(x, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2}$, $(\Phi(x) \leq 1, \forall x \geq 0)$ donc $B_N(x, r_0) \subset B_d(x, r)$.
Donc les topologies sont équivalentes.
2) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, d) alors $\lim_{n,m \to +\infty} p_j(f_n - f_m) = 0$ pour chaque $j \geq 0$, et donc $\sup_K |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)| \longrightarrow 0$ pour chaque j. La suite $(f_n^{(j)})_n$ est donc de Cauchy pour la convergence uniforme et elle tend donc uniformément vers une limite f_j qui est continue et à support dans K. On utilise maintenant le Théorème classique assurant que si f_n converge uniformément vers u et si les dérivées f_n' sont continues et converge uniformément vers v alors u est $\mathcal{C}^1$ et $u' = v$. En appliquant ce résultat par récurrence aux dérivées successives de u, on obtient que $f_n^{(j)}$ converge uniformément vers $u^{(j)}$, $\forall j$ et donc que $p_j(f_n - u) \longrightarrow 0$, $\forall j$. On en déduit facilement que (E, d) est complet.
Pour tout n, T_n est continue sur $(E, (p_j)_j)$ donc sur (E, d) donc F_k est fermé dans (E, d) comme intersection d'images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$. Comme $(< T_n, \varphi >)_n$ converge $\forall \varphi$, $E = \cup_k F_k$, par le Lemme de Baire, on en déduit que $\exists k_0$, $\exists \varphi$ et $\exists r_0 > 0$ tels que $B_d(\varphi, r_0) \subset F_{k_0}$.
D'après 1), $\exists N \geq 0$, $\exists r > 0$ tels que $B_N(\varphi, r) \subset F_{k_0}$. Alors $B_N(0, \frac{r}{2}) \subset F_{k_0}$, en effet, si $\psi \in B_N(0, \frac{r}{2})$ alors $\psi = \frac{1}{2}(-\varphi + (\varphi + 2\psi))$ or $-\varphi \in F_{k_0}$ et $\varphi + 2\psi \in F_{k_0}$, par convexité de F_{k_0}, on a $\psi \in F_{k_0}$.
Donc on a montré que $\forall \varphi \in E$ telle que $p_N(\varphi) < \frac{r}{2}$, on a $| < T_n, \varphi > | \leq k_0$, $\forall n$. Par homogénéite, on en conclut que $\forall n$, $| < T_n, \varphi > | \leq \frac{2k_0}{r} p_N(\varphi)$, $\forall \varphi \in E$.
Maintenant on fait tendre n vers l'infini, on en déduit que $| < T, \varphi > | \leq \frac{2k_0}{r} p_N(\varphi)$. Finalement, on a montré que $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$, $\exists C_K = \frac{2k_0}{r}$, $\exists N(K)$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, $| < T, \varphi > | \leq C_K\, p_N(\varphi)$ ce qui est exactement la continuité de T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

a) Si $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\int_I \varphi = \lambda \int_I \theta_0 + \int_I \psi'$ donc nécessairement $\lambda = \int_I \varphi$. Avec ce choix de λ, trouvons ψ.
$\exists a, b$ tels que $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\theta_0) \subset [a, b] \subset I$ (I connexe). Soit $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) - (\int_I \varphi)\theta_0(t))dt$ alors $\psi' = \varphi - (\int_I \varphi)\theta_0$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Vérifions que ψ est à support compact. Si $x \in]-\infty, a[\cap I$

alors $\forall t \in [a,x]$ $\varphi(t) = \theta_0(t) = 0$ et $\psi(x) = 0$. Si $x \in]b, \infty[\cap I$ alors $\psi(x) = 0$ donc $\text{supp}(\psi) \subset [a,b]$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$. (On peut remarquer que le couple (λ, ψ) est unique.)
b) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = 0$, on veut montrer que $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $< T, \varphi >= C \int_I \varphi$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\exists \psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi = (\int_I \varphi)\theta_0 + \psi'$ et $< T, \varphi >= (\int_I \varphi) < T, \theta_0 > + < T, \psi' >$. Or par hypothèse $< T, \psi' >=< T', \psi >= 0$ donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $< T, \varphi >=< T, \theta_0 > \int_I \varphi$ donc $C =< T, \theta_0 >$ convient.
c) Par hypothèse $T' = v \in \mathcal{C}^\infty(I)$, c'est à dire $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $< T', \varphi >= \int_I v\varphi$. La fonction v admet une primitive au sens usuel V et $v = V'$ alors $(T - V)' = 0$ donc $T - V = c$ constante par b) et $T = V + c \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 4

Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $a_j \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant $\psi(0) = \psi'(0) = ... = \psi^{k-2}(0) = 0$ et $\psi^{k-1}(0) = \frac{1}{a_k}$ alors $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
1) $Y\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculons les dérivées au sens des distributions de E et montrons par récurrence que

$$E^{(p)} = Y_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta_0' + ... + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

On calcule d'abord E',

$$\begin{aligned} < E', \varphi > &= - < E, \varphi' >= - \int_0^\infty \psi\varphi', \\ &= \int_0^\infty \psi'\varphi + \psi(0)\varphi(0), \\ &= < T_{Y\psi'}, \varphi > + < \psi(o)\delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Donc le propriété est vraie pour $p = 1$, on la suppose vraie jusqu'au rang p et démontrons la pour $p + 1$. On a

$$\begin{aligned} < E^{(p+1)}, \varphi > &= - < E^{(p)}, \varphi' >= - \int_0^\infty \psi^{(p)}\varphi' - < \psi^{(p-1)}(0)\delta_0, \varphi' > - ... - < \psi(0)\delta_0^{(p-1)}, \varphi' >, \\ &= \int_0^\infty \psi^{(p+1)}\varphi + < \psi^{(p)}(0)\delta_0, \varphi > + < \psi^{(p-1)}(0)\delta_0' + ... + \psi(0)\delta_0^{(p)}, \varphi > . \end{aligned}$$

D'où le résultat.
Ici $E^{(j)} = T_{Y\psi^{(j)}}$, $\forall j \leq k - 1$ car $\psi^{(p)}(0) = 0$, $\forall p \leq k - 2$, et

$$E^{(k)} = T_{Y\psi^{(k)}} + \psi^{(k-1)}(0)\delta_0 = T_{Y\psi^{(k)}} + \frac{1}{a_k}\delta_0.$$

Donc $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)} + a_k E^{(k)} = \delta_0$ par hypothèse sur ψ.
2) On cherche ψ telle que

$$(\star) \quad \begin{cases} \psi'' + \psi' + \psi = 0 \\ \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

Les solutions générales du système ($\star$) sont données par

$$\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}(ae^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + be^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Ici les données initiales impliquent que $a = -b = \frac{1}{i\sqrt{3}}$, donc $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et $E = T_{Y\psi}$ convient.

12.9 Chapitre XI

Exercice 1

1) En vertu du Théorème 11.1 et de la Proposition 11.1 du ch.11, si $u \in H^1(0,1)$ alors $u \in \mathcal{C}[0,1]$ et $\forall x, y \in [0,1]$, $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$.
Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \|u'\|_2 |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq |u(y)| + \|u'\|_2.$$

On intègre cette inégalité par rapport à y et on applique encore Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_0^1 |u(y)|dy + \|u'\|_2 \\ &\leq \|u\|_2 + \|u'\|_2 \\ &\leq 2\|u\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_{H^1}$ et l'injection $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue.
De $|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_2|x-y|^{\frac{1}{2}}$, on déduit que la boule unité fermée B_{H^1} de $H^1(0,1)$ est équicontinue. Enfin, $B_x = \{u(x),\, u \in B_{H^1}\} \subset [-2,2]$ donc $\overline{B_x}$ est compact. Par le Théorème d'Ascoli, on en conclut que B_{H^1} est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}[0,1]$, d'où l'injection $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est compacte.
L'intêret majeur de ce résultat est que l'on pourra transformer toute suite faiblement convergente de $H^1(0,1)$ en une suite fortement convergente de $\mathcal{C}[0,1]$. (Voir l'exercice 3, chap. IV)
2) Soient $u, v \in H_0^1(0,1)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors par le Théorème 11.2, il existe $u_n, v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ tels que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ pour la norme H^1. Comme u_n, v_n sont régulières et nulles au bord, on a evidemment $\int_0^1 u_n' v_n + \int_0^1 u_n v_n' = 0$ et $\int_0^1 u_n' f + \int_0^1 u_n f' = 0$. Le produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 fg dx$ étant continu sur $(L^2)^2$, il n'y a aucuns problèmes pour passer à la limite dans ces égalités et on obtient donc

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' = 0, \\ &(2) \qquad \int_0^1 u'f + \int_0^1 uf' = 0, \end{aligned}$$

et ceci $\forall u, v \in H_0^1(0,1)$.
Si $u \in H^1(0,1)$, on note $p_u(x) = xu(1) + (1-x)u(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors $u - p_u \in H_0^1(0,1)$. En appliquant la formule d'intégration par parties (2) à $u - p_u$ et p_u, on obtient

$$\int_0^1 u'f + \int_0^1 uf' = \int_0^1 p_u' f + \int_0^1 p_u f' = u(1)f(1) - u(0)f(0).$$

Maintenant si $u, v \in H^1(0,1)$, alors de $\int_0^1 (u-p_u)'(v-p_v) + \int_0^1 (u-p_u)(v-p_v)' = 0$, on déduit que $\int_0^1 (u-p_u)'v + \int_0^1 (u-p_u)v' = 0$ (car $\int_0^1 (u-p_u)'p_v + \int_0^1 (u-p_u)p_v' = 0$). Donc, en développant,

$$\int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' = \int_0^1 p_u'v + \int_0^1 p_u v' = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

Exercice 2

1) Soit $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$, alors a est bilinéaire symétrique et $|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|u\|_2\|u\|_2 \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$ donc a est continue sur $H^1(0,1) \times H^1(0,1)$. Montrons que a est coercive, c'est à dire, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in H^1(0,1)$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$.
On raisonne par l'absurde, sinon, $\forall n$, $\exists u_n \in H^1(0,1)$ tel que $a(u_n, u_n) < \frac{1}{n}\|u_n\|_{H^1}^2$. On peut toujours supposer que $\|u_n\|_{H^1} = 1$, comme $H^1(0,1)$ est réflexif, il existe une sous-suite encore notée u_n telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(0,1)$ faible. L'injection $H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ étant compacte (voir l'exercice précèdent), $u_n \to u$ pour $\|.\|_\infty$ et en particulier $u_n \to u$ dans L^1 et L^2. D'autre part, $\|u_n'\|_2 < \frac{1}{n} \Longrightarrow u_n' \to 0$ dans L^2, donc finalement u_n est de Cauchy dans $H^1(0,1)$ donc converge et $\exists v \in H^1(0,1)$ tel que $u_n \to v$ dans $H^1(0,1)$. Alors, $\|v\|_{H^1} = 1$ et $v' = 0$ p.p. donc d'après l'exercice 3, v est constante. Enfin, de $\left(\int_0^1 u_n\right)^2 < \frac{1}{n}$ et $u_n \to v$ dans L^1, on déduit que $\int_0^1 v = 0$ donc nécessairement $v = 0$ or $\|v\|_{H^1} = 1$, c'est absurde.
D'après le Théorème de Lax-Milgram (Th.8.5,ch.8), il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv$, $\forall v \in H^1(0,1)$.
2) Comme $\mathcal{D}(]0,1[) \subset H^1(0,1)$, si $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $a(u,\varphi) = \int_0^1 f\varphi = < f, \varphi >$ en terme de distributions. Et,

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= \int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 \left(\int_0^1 u\right)\varphi, \\ &= < u', \varphi' > + < \int_0^1 u, \varphi >, \\ &= - < u'', \varphi > + < \int_0^1 u, \varphi > . \end{aligned}$$

D'où $< -u'' + \int_0^1 u - f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, donc $-u'' + \int_0^1 u = f$ au sens des distributions, mais $f \in L^2(0,1)$ et $\int_0^1 u \in L^2(0,1)$ montre que $u \in H^2(0,1)$ et vérifie

$$(\star) \qquad -u'' + \int_0^1 u = f \quad \text{p.p.}$$

Pour trouver les conditions aux limites, on multiplie $(\star)$ par $v \in H^1(0,1)$ et on intègre sur $(0,1)$ alors $-\int_0^1 u''v + \left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 v\right) = \int_0^1 fv$. Comme $u \in H^2$ et $v \in H^1$, l'exercice précèdent nous permet de faire une intégration par parties et on obtient $a(u,v) - \int_0^1 fv = [u'v]_0^1$.
Or u est solution de la formulation variationnelle (i.e. $a(u,v) = \int_0^1 fv$, $\forall v \in H^1(0,1)$), donc $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$ et ceci $\forall v \in H^1(0,1)$. Donc nécessairement $u'(1) = u'(0) = 0$.
D'où u est solution du problème suivant, $u \in H^2(0,1)$ et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -u'' + \int_0^1 u &=& f \quad \text{p.p.} \\ u'(1) = u'(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

Et réciproquement.

Exercice 3

Soit $V = \{u \in H^1(0,1) \, : \, u(\frac{1}{2}) = 0\}$.
1) Comme $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue, $u \mapsto u\left(\frac{1}{2}\right)$ est continue sur $H^1(0,1)$ et V est fermé dans $H^1(0,1)$.
$\|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur V et si pour un $v \in V$, $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors, d'après l'exercice 3, v est constante sur $(0,1)$ et de $v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on en déduit que $v = 0$. Donc, on a bien à faire à une norme sur V. On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$.
A-t'on $\exists C > 0$ tel que $\|v'\|_{L^2} \geq C\,\|v\|_{H^1}$ sur V ?
Sinon, $\forall n$, $\exists u_n \in V$ avec $\|u_n\|_{H^1} = 1$ tel que $\|u_n'\|_{L^2} < \frac{1}{n} \to 0$. Alors comme dans l'exercice précèdent, on en déduit qu'il existe une sous-suite u_{n_k} de Cauchy dans $H^1(0,1)$ donc convergente vers un $v \in H^1(0,1)$. De $u'_{n_k} \to 0$ dans L^2, on tire $v' = 0$ p.p. et donc v est constante sur $(0,1)$. Mais $u_{n_k} \to v$ dans $H^1(0,1) \Longrightarrow 0 = u_{n_k}\left(\frac{1}{2}\right) \to v\left(\frac{1}{2}\right)$ par continuité de l'injection $H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$. Donc $v = 0$ or $\|v\|_{H^1} = 1$, c'est absurde, ces deux normes sont donc équivalentes sur V.
2) Soit $a(u,v) = \int_0^1 u'v'$, alors a est une forme bilinéaire symétrique continue sur V et $v \mapsto v(0)$ est continue sur V puisque $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue sur $H^1(0,1)$. Du Théorème de Lax-Milgram (Th.8.5,ch.8), on déduit qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = v(0)$, $\forall v \in V$.
3) $\mathcal{D}(]0,1[) \not\subset V$ donc on ne peut pas exactement raisonner comme dans l'exercice précèdent, mais on peut remarquer que $\mathcal{D}(]0,\frac{1}{2}[) \cup \mathcal{D}(]\frac{1}{2},1[) \subset V$ (en prolongeant ces fonctions par 0 à $]0,1[$ tout entier).
Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\frac{1}{2}[)$ alors $a(u,\varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} u'\varphi' = \varphi(0) = 0$, c'est à dire $< u', \varphi' >= 0 = -< u'', \varphi >$ et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,\frac{1}{2}[)$, donc $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]0,\frac{1}{2}[)$ et donc dans $L^2(0,\frac{1}{2})$.
On obtient par un même raisonnement, $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]\frac{1}{2},1[)$ et donc dans $L^2(\frac{1}{2},1)$. Donc finalement $u \in H^2(0,\frac{1}{2}) \cap H^2(\frac{1}{2},1)$. On peut alors faire des intégrations par parties sur les deux sous-intervalles $(0,\frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2},1)$. Si $v \in V$ alors

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& -\int_0^{\frac{1}{2}} u''v \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} u'v' - [u'v]_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} u'v' + u'(0)v(0), \\ 0 &=& -\int_{\frac{1}{2}}^1 u''v \;=\; \int_{\frac{1}{2}}^1 u'v' - [u'v]_{\frac{1}{2}}^1 \;=\; \int_{\frac{1}{2}}^1 u'v' - u'(1)v(1). \end{array}$$

On ajoute ces deux égalités, alors $a(u,v) + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = 0 \Longrightarrow (1 + u'(0))\,v(0) = u'(1)v(1)$, $\forall v \in V$. Donc nécessairement $u'(0) = -1$ et $u'(1) = 0$. Donc on a résolu

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'' &=& 0 \text{ sur } (0,\frac{1}{2}) \\ u\left(\frac{1}{2}\right) &=& 0 \\ u'(0) &=& -1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'' &=& 0 \text{ sur } (\frac{1}{2},1) \\ u\left(\frac{1}{2}\right) &=& 0 \\ u'(1) &=& 0 \end{array}\right.$$

de solutions respectives :

$$\begin{array}{rcl} u(x) &=& -x + \dfrac{1}{2} \quad \text{sur } [0,\dfrac{1}{2}] \\ u(x) &=& 0 \quad \text{sur } [\dfrac{1}{2},1] \end{array}$$

On voit tout de suite que $u \notin H^2(0,1)$ (sinon elle serait $\mathcal{C}^1$).
Au sens des distributions, il est clair que $u' = -\mathbb{I}_{(0,\frac{1}{2})} \in L^2(0,1)$ et que $u'' = \delta_{\frac{1}{2}} \notin L^2(0,1)$.

Exercice 4

$v \to \|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur $H^1(0,+\infty)$. Si $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors $v' = 0$ p.p. et donc v est une constante. Or la seule constante de $L^2(0,+\infty)$ est la constante nulle donc c'est bien une norme sur $H^1(0,+\infty)$. On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$.
Soit $u_n(x) = n - x$ si $x \leq n$ et $u_n(x) = 0$ sinon. Alors $u_n \in H^1(0,+\infty)$, $\|u_n'\|^2_{L^2} = n$ et $\|u_n\|^2_{L^2} = \frac{n^3}{3}$ donc les deux normes ne peuvent pas être équivalentes sur $H^1(0,+\infty)$.

Exercice 5

1) Par le Théorème des accroissements finis, il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in H^1(I)$, $|f(u)| \leq |f(0)| + C\,|u| \in L^2(I)$ donc $f(u) \in L^2(I)$.
2) Soit $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$.

a) De la même façon, on a : $|f(u_n) - f(u)| \leq C\,|u_n - u|$ donc $u_n \to u$ dans $L^2(I) \Longrightarrow f(u_n) \to f(u)$ dans $L^2(I)$.

b) On a $|\alpha_n| \leq C\,|u_n' - u'|$ donc $u_n' \to u'$ dans $L^2(I) \Longrightarrow \alpha_n \to 0$ dans $L^2(I)$. Comme $u_n \to u$ dans $L^2(I)$, il existe une sous-suite u_{n_k} telle que $u_{n_k} \to u$ p.p. Par continuité de f', $f'(u_n) \to f'(u)$ p.p. D'où finalement,

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{n_k} \to 0 \quad \text{p.p.} \\ |\beta_{n_k}| \leq 2\|f'\|_\infty |u'| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta_{n_k} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(I),$$

par le Théorème de convergence dominée.

c)Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, alors

$$(\star) \qquad \int_I f(u_n)\varphi' = -\int_I f'(u_n)u_n'\varphi,$$

puisque toutes les fonctions considérées sont assez régulières. Comme $f(u_n) \to f(u)$ dans $L^2(I)$, $\int_I f(u_n)\varphi' \longrightarrow \int_I f(u)\varphi'$.
D'autre part, $f'(u_n)u_n' - f'(u)u' = \alpha_n + \beta_n$ donc

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_n \to 0 \text{ dans } L^2(I) & \Longrightarrow & \int_I \alpha_n\varphi \longrightarrow 0 \\ \beta_{n_k} \to 0 \text{ dans } L^2(I) & \Longrightarrow & \int_I \beta_{n_k}\varphi \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_I (\alpha_{n_k} + \beta_{n_k})\varphi \longrightarrow 0.$$

D'où en passant à la limite dans $(\star)$, pour une sous-suite, on obtient :

$$\int_I f(u)\varphi' = -\int_I f'(u)u'\varphi,$$

et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Or $f'(u)u' \in L^2(I)$ car $f' \in L^\infty(I)$ et $u' \in L^2(I)$, donc $f(u) \in H^1(I)$ et $(f(u))' = f'(u)u'$.
3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé, $f_\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$ par valeurs positives, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. De plus, si $t > 0$, $f_\varepsilon'(t) = \frac{t}{\sqrt{(t^2+\varepsilon^2)}} \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Enfin, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_\varepsilon'(t)| \leq 1$

donc $f_\varepsilon \in E$ et $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t$, $|f_\varepsilon(t)| \leq |t|$.
Quand $\varepsilon \to 0$, $f_\varepsilon(t) \to 0$ si $t \leq 0$ et $f_\varepsilon(t) \to t$ si $t \geq 0$ donc $f_\varepsilon(t) \to t^+$. D'où

$$\left.\begin{array}{l} f_\varepsilon(u) \to u^+ \text{ p.p.} \\ |f_\varepsilon(u)| \leq |u| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_\varepsilon(u) \longrightarrow u^+ \text{ dans } L^2(I),$$

par le Théorème de convergence dominée.
4) D'après 2), $f_\varepsilon(u) \in H^1(I)$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' = -\int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi$. On sait que $f_\varepsilon(u) \to u^+$ dans $L^2(I)$ donc $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' \longrightarrow \int_I u^+\varphi'$. D'autre part,

$$\left.\begin{array}{rcll} f'_\varepsilon(t) & = & \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & t > 0 \\ & = & 0, & t \leq 0 \end{array}\right\} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right\} = \mathbb{I}_{[t>0]},$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} f'_\varepsilon(u) \to \mathbb{I}_{[u>0]} \text{ p.p.} \\ |f'_\varepsilon(u)u'| \leq |u'| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'_\varepsilon(u)u' \longrightarrow \mathbb{I}_{[u>0]}u' \text{ dans } L^2(I),$$

par le Théorème de convergence dominée. D'où

$$\int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi \longrightarrow \int_I \mathbb{I}_{[u>0]}u'\varphi.$$

A la limite, on obtient : $\int u^+\varphi = -\int \mathbb{I}_{[u>0]}u'\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, donc $u^+ \in H^1(I)$ et $(u^+)' = \mathbb{I}_{[u>0]}u'$.
5) On a $u^- = (-u)^+$ donc $u^- \in H^1(I)$, $(u^-)' = -\mathbb{I}_{[u<0]}u'$ et $|u| = u^+ + u^- \in H^1(I)$.
(La démonstration est la même en dim> 1, en remplaçant u' par $\frac{\partial}{\partial x_i}u$.)

Exercice 6

Soit N une norme dérivant d'un produit scalaire, alors N^2 est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée seconde est une forme bilinéaire symétrique définie positive (c'est à une constante positive près le produit scalaire) donc N^2 est strictement convexe.
Une norme est convexe et non strictement convexe car $N(tu) = tN(u)$ si $t > 0$.

Exercice 7

On note $H^1_0(0,1) = \{u \in H^1(0,1) \,:\, u(0) = u(1) = 0\}$.
1) Si $u \in H^1_0(0,1)$ alors on peut écrire $u(x) = \int_0^x u'(t)dt$ (voir le Théorème 11.1, ch.11). En appliquant Cauchy-Schwarz, on en déduit que $|u(x)| \leq \sqrt{x}\|u'\|_2$. On élève cette dernière inégalité au carré et on intègre, on obtient alors $\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2$, d'où $\|u'\|_2^2 \leq \|u\|^2_{H^1} \leq \frac{3}{2}\|u'\|_2^2$. On en conclut que $(H^1_0(0,1), \|u'\|_2)$ est un espace de Hilbert.
2) Si $v \in H^1(0,1)$ alors $v \in L^2 \cap L^\infty$ car $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$. Donc $v \in L^q$, $\forall q \geq 2$ et $F(v)$ a bien un sens. Comme $|\int_0^1 fv| \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2$ si $v \in H^1_0(0,1)$, il existe $C > 0$ tel que $F(v) \geq \frac{1}{2}\|v'\|_2^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2 \geq C$, $\forall v \in H^1_0(0,1)$. De plus $F(v) \longrightarrow +\infty$ quand $\|v'\|_2 \to \infty$.
D'autre part, comme $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$ avec injection continue, il existe $M > 0$ tel que $\forall v \in H^1(0,1)$, $\|v\|_4 \leq M\|v\|_{H^1}$, ce qui montre que F est continue sur $H^1_0(0,1)$. Enfin F est convexe ($\|v\|_4^4$= composée de $x \mapsto x^4$, croissante et convexe sur $\mathbb{R}^+$ et d'une norme est convexe). Donc F est s.c.i. faible et le Théorème sur l'inf des fonctions s.c.i. (Corollaire 4.5, ch.4) montre qu'il existe $u \in H^1_0(0,1)$ tel que $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in H^1_0(0,1)$. L'unicité provient du

fait que F est strictement convexe car le terme $\|v'\|_2^2$ l'est d'après l'exercice précédent.
3) Soient $t > 0$ et $v \in H_0^1(0,1)$ alors $F(u+tv) - F(u) \geq 0$ donc

$$\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv + t\,\mathcal{O}(1) \geq 0.$$

Quand $t \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv \geq 0,$$

et en changeant v en $-v$,

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv = 0,$$

pour tout $v \in H_0^1(0,1)$.
4) En particulier, comme $\mathcal{D}(]0,1[) \subset H_0^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u^3\varphi = \int_0^1 f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

On utilise maintenant le fait que u', u^3, f sont dans L^1_{loc} et définissent des distributions pour écrire que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u'\varphi' &= < u', \varphi' > = - < u'', \varphi >, \\
\int_0^1 u^3\varphi &= < u^3, \varphi >, \\
\int_0^1 f\varphi &= < f, \varphi >,
\end{aligned}$$

et donc $< -u'' + u^3 - f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. D'où $-u'' + u^3 = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. Comme f et u^3 sont dans $L^2(I)$, on en déduit que $u'' \in L^2(I)$ donc légalité a lieu p.p et $u \in H^2(0,1)$.
5) Comme F est convexe, on a : $\forall t \in]0,1]$, $F(u+t(v-u)) \leq F(u) + t[F(v) - F(u)]$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$.
Donc

$$\frac{F(u+t(v-u))-F(u)}{t} \leq F(v) - F(u), \quad \forall t > 0.$$

On a vu en 3) que

$$\frac{F(u+t(v-u))-F(u)}{t} = \int_0^1 u'(v-u)' + \int_0^1 u^3(v-u) - \int_0^1 f(v-u) + t\,\mathcal{O}(1).$$

Comme $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ et $v \in H_0^1(0,1)$, on a $\int_0^1 u'(v-u)' = -\int_0^1 u''(v-u)$ donc

$$\frac{F(u+t(v-u))-F(u)}{t} = \int_0^1 (\underbrace{-u'' + u^3 - f}_{=0})(v-u) + t\mathcal{O}(1), \quad \forall t > 0.$$

En particulier, $F(v) - F(u) \geq t\mathcal{O}(1)$ et quand $t \to 0$, on obtient $F(v) \geq F(u)$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$. Donc u est solution de $(\star)$.
6) On suppose que $f \geq 0$ p.p. Si u est solution de $(\star)$ alors on a vu que $\forall v \in H_0^1(0,1)$, $\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv$. On choisit $v = u^- = -\inf(0,u)$ alors $v \in H_0^1(0,1)$ (voir l'exercice 5), $v \geq 0$ et on obtient $-\int_0^1 (u^-)'^2 - \int_0^1 (u^-)^4 = \int_0^1 fu^- \geq 0$. On en déduit par exemple que $\int_0^1 (u^-)^4 \leq 0$ et donc que $u^- = 0$ p.p. D'où $u \geq 0$ p.p.

Chapter 13

Notations

E_ω = l'espace E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$.

$E_{\omega\star}$ = l'espace E muni de la topologie faible $\star$ $\sigma(E', E)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ = l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$(E_\omega)'$ = l'espace des applications linéaires continues de E muni de la toplogie faible à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$(E_{\omega\star})'$ = l'espace des applications linéaires continues de E muni de la toplogie faible $\star$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$< f, x >= f(x)$ est le crochet de dualité E', E.

$\mathrm{int}(A)$ = intérieur de A.

$|A|$ = la mesure de A si A est un ensemble.

$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\}$.

$\mathrm{vect}\{a_1, ..., a_n\}$ est l'espace vectoriel engendré par $a_1, ..., a_n$, on pourrait l'écrire $\mathbb{R}a_1 + ... + \mathbb{R}a_n$.

$\mathcal{V}(x)$ = l'ensemble des voisinages de x pour la topologie considérée.

$\mathcal{V}_\omega(x)$ = l'ensemble des voisinages de x pour la topologie faible.

$\rightharpoonup$ signifie convergence pour la topologie faible, c'est en général précisé dans le texte.

P.F.I = l'ensemble des parties finies de I.

$\mathbb{I}_A$ = la fonction indicatrice de l'ensemble A.

$\|.\|_p$ = la norme usuelle des espaces L^p ou bien ℓ^p.

$\mathcal{C}(\Omega)$ = l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues sur Ω.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$ = l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ = l'ensemble des distributions sur Ω.

Chapter 14

Index