Partiel d'analyse, magistère de Mathématiques, ENS Cachan, Novembre 2000

Le polycopié et les notes sont autorisés. Ne pas redémontrer ce qui est prouvé dans le polycopié ou dans un exercice corrigé. Se contenter de citer précisément les passages du polycopié utilisés.

Exercice 1 Généralisation de Hölder.

Soit $u : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, une bijection strictement croissante.

(a) Montrer qu'il existe une suite u_n de fonctions du même type que u, mais C^∞, qui convergent uniformément vers u sur tout compact.

Conseil : étendre u par imparité en posant $u(-x) = -u(-x)$ pour $x \neq 0$.

(b) Montrer que $xu(x) = \int_0^x u(t)dt + \int_0^{u(x)} u^{-1}(t)dt$. On recommande de dessiner le graphe de u et de hachurer les aires correspondant aux trois termes.

(c) On pose $U(x) = \int_0^x u(t)dt$ et $V(y) = \int_0^y u^{-1}(t)dt$. Déduire que $xy \leq U(x)+V(y)$. Que donne cette formule si $u(s) = s^\alpha$, $0 < s < +\infty$?

Conclure que si $U(f) \in L^1$ et $V(g) \in L^1$, alors $fg \in L^1$.

Exercice 2 La fonction $p \to ||f||_p^p$.

Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles. On considère $h :]0, +\infty[\to I\!R^+$ définie par $h(p) = ||f||_{L^p}^p$. On note $E = \{p,\ h(p) < +\infty.\}$. On suppose que $f \neq 0$ (p.p.).

(a) Montrer que E est un intervalle.

(b) Montrer que Log h est convexe dans l'intérieur de E et que h est continue sur E.

(c) E est-il nécessairement ouvert ? fermé ? Peut-il être réduit à un point ? Peut-il être n'importe quel intervalle de $[0, +\infty[$?

Exercice 3 Application du théorème de Banach-Steinhaus à l'étude de séries.

(a) Soient c_0 l'ensemble des suites de complexes $(\xi_n)_n$ convergeant vers 0, muni de la norme $||\xi||_\infty = \sup_n |\xi_n|$ et soit l^1 l'ensemble des suites α_n telles que $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$. Montrer que ce sont des espaces de Banach et que $c_0' = l^1$.

(b) Montrer que si $\sum_n \alpha_n \xi_n$ converge pour toute suite ξ_n telle que $\xi_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$.

Exercice 4 Application du théorème de Banach-Steinhaus à l'étude des séries de Fourier.

Dans un espace topologique, on appelle G_δ toute intersection dénombrable d'ouverts. On appelle de même F_σ toute union dénombrable de fermés (Notations dues à Hausdorff ; en allemand Gebiet = ouvert, Summe = somme et Durchschnitt = intersection.) Les G_δ denses sont intuitivement des ensembles "gros". On va en particulier donner une condition simple pour qu'ils ne soient pas dénombrables :

(a) Montrer que dans un espace métrique complet E sans point isolé, aucun ensemble dense et dénombrable ne peut être un G_δ.

(b) Formulation précisée du théorème de Banach-Steinhaus : En reprenant la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus, montrer que si E et F sont deux espaces de Banach et T_i une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F, on a l'alternative suivante :
-ou bien $\sup_{i\in I} ||T_i|| < +\infty$
-ou bien $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| = +\infty$ pour x dans un G_δ dense de E.

(c) On note $C(T)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbf{C}$ continues et 2π-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme et $L^1(T) = L^1(0, 2\pi)$. Pour $f \in C(T)$, on considère pour $n \in \mathbb{N}$ les sommes partielles de la série de Fourier de f,

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt,$$

où

$$D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{ikt}.$$

Connaissez-vous des conditions suffisantes sur f pour que $s_n f(x)$ tende vers $f(x)$?

(d) On va montrer qu'il n'est pas vrai que $s_n f(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $f \in C(T)$ et pour tout x. On pose

$$s^\star f(x) = \sup_n |s_n f(x)|, \quad \text{et } S_n f = s_n f(0).$$

Montrer que la forme linéaire sur $C(T)$, $f \to S_n f$, vérifie

(1) $$||S_n|| \leq \frac{1}{2\pi} ||D_n||_{L^1}.$$

Montrer que cette inégalité est la meilleure possible, c'est--dire qu'il existe pour tout n une suite de fonctions $f_k \in C(T)$ telles que $||S_n f_k|| \to \frac{1}{2\pi} ||D_n||_{L^1}$.

(e) Montrer que

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Dessiner $D_n(t)$ pour $n = 4$.

(f) Démontrer que $||D_n||_{L^1} \to \infty$ quand $n \to \infty$.

(g) Déduire que $||S_n|| \to \infty$ quand $n \to \infty$, puis que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $s^\star f(x) = \infty$ pour tout f dans un G_δ dense de $C(T)$, noté E_x.

(h) Montrer que les fonctions $x \to s_n f(x)$ sont continues. Montrer que $s^\star f(x)$ est une fonction semicontinue inférieurement et en déduire que $A_f = \{x,\ s^\star f(x) = \infty\}$ est un G_δ.

(i) Soit x_k une suite dense de $\mathbb{R}$ et $E = \bigcap E_{x_i}$, où les E_{x_i} sont définis à la question (g). Montrer que E est un G_δ dense de $C(T)$.

(j) Conclure qu'il existe un G_δ dense de $C(T)$ tel que pour tout $f \in E$, la série de Fourier diverge sur un G_δ dense, et donc non dénombrable, de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Techniques d'espaces de Banach appliquées à l'étude des séries de Fourier (II).
Si $f \in L^1(0, 2\pi)$, on considère ses coefficients de Fourier, pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

On appelle $c(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier, indexée par $\mathbf{Z}$. On note $C_0(\mathbf{Z})$ l'ensemble des suites c indexées par $\mathbf{Z}$ telles que $c_n \to 0$ quand $n \to \pm\infty$, muni de la norme $||c||_\infty = \sup_n |c_n|$.

(a) Montrer que si $f \in L^1(0, 2\pi)$ vérifie $\int f(x)p(x) = 0$ pour tout polynôme trigonométrique, alors $f(x) = 0$ p.p..

(b) Montrer que l'application $f \to c(f)$ est une application linéaire continue de $L^1(0, 2\pi)$ dans $C(\mathbf{Z})$.

(c) Montrer que l'application $f \to c(f)$ est injective.

(d) En utilisant les propriétés des fonctions $D_n(t)$ de l'exercice précédent, notamment le résultat de la question (e), montrer que l'application $f \to c(f)$ ne peut pas être surjective de $L^1(T)$ dans $C_0(\mathbf{Z})$.

Exercice 6 Et pour quelques points de plus...
Démontrer le théorème d'Egoroff.