Ecole Normale Supérieure de Cachan. Magistère de Mathématiques, cours d'Analyse Fonctionnelle

Transforme de Fenchel

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel normé et E' son dual.

1. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, \ -\infty\}$ une fonction.

(a) Montrer que f est semicontinue inférieurement (s.c.i.) si et seulement si l'épigraphe $\{(x, \lambda), \ f(x) \leq \lambda\}$. est fermé. Rappel : on dit que f est semicontinue inférieurement en x si $f(x) \leq \liminf f(x_n)$ pour toute suite $x_n \to x$. On notera $\mathrm{Epi}(f)$ l'épigraphe de f.

(b) Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

(c) Montrer que si f_i est une famille de fonctions convexes alors $\sup_i f_i$ est convexe et que si f_i est une famille de fonctions s.c.i. alors $\sup_i f_i$ est s.c.i..

1. (a) Supposons que f soit s.c.i. et soit (x_n, λ_n) une suite dans l'épigraphe convergeant vers (x, λ). On a $\lambda_n \geq f(x_n)$ et donc

$$f(x) \leq \liminf_n f(x_n) \leq \liminf_n \lambda_n = \lim_n \lambda.$$

Donc (x, λ) est encore dans l'épigraphe $\mathrm{Epi}(f)$ et celui-ci est donc fermé.

Réciproquement, supposons que l'épigraphe soit fermé et montrons que f est alors s.c.i.. Considérons une suite x_n et posons $\lambda = \liminf_n f(x_n)$. Remarquer que cette limite n'est pas nécessairement finie, mais existe toujours comme limite d'une suite décroissante dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $\lambda = \lim_n f(x_n)$. On veut montrer que $f(x) \leq \lambda$. Si $\lambda = +\infty$, c'est vrai. Si $-\infty < \lambda < +\infty$, on a $(x_n, \lambda_n) \to (x, \lambda)$ et comme l'épigraphe est fermé, on a $f(x) \leq \lambda$. Si $\lambda = -\infty$, on a $f(x_n) \to -\infty$ et donc pour tout k et pour n assez grand, $f(x_n) < -k$. Donc $(x_n, -k)$ est dans l'épigraphe et comme celui-ci est fermé, $(x, -k)$ est dans l'épigraphe. Donc $f(x) \leq -k$ pour tout k et on a encore $f(x) \leq \lambda$.

(b) Supposons que f soit convexe. Si (x, λ) et (y, μ) sont dans l'épigraphe, on a $f(x) \leq \lambda$ et $f(y) \leq \mu$. Soient α et β positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta = 1$. On a

$$\alpha\lambda + \beta\mu \geq \alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y).$$

Donc $(\alpha x + \beta y, \alpha\lambda + \beta\mu)$ est dans l'épigraphe. Réciproquement, supposons que l'épigraphe de f soit convexe. Alors pour tous x et y les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$

sont dedans. Donc aussi le point $(\alpha x+\beta y, \alpha f(x)+\beta f(y))$. On a donc $\alpha f(x)+\beta f(y) \geq f(\alpha x+\beta y)$, qui prouve que f est convexe.

(c) En utilisant les épigraphes, cela découle du fait qu'une intersection de convexes est convexe et qu'une intersection de fermés est fermée.

2. (a) Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que f est propre si son domaine $\{x, f(x) \neq +\infty\}$ est non vide. On appelle *Transformée de Fenchel-Legendre* de f la fonction $f : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f^\star(y) = \sup_{x \in E} < y, x > -f(x).$$

Déduire de la question précédente que $f^\star$ est convexe et s.c.i.. De même, si $f : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on considère

$$f^\star(x) = \sup_{y \in E'} < y, x > -f(y).$$

Montrer que $f^\star$ est convexe s.c.i..

(b) Donner un exemple de fonction propre f telle que $f^\star$ ne soit pas propre. Montrer que si f est convexe s.c.i. et propre, $f^\star$ l'est aussi. Indication : si f est propre ($\exists x_0,\ f(x_0) < +\infty$) séparer par un hyperplan de $E \times \mathbb{R}$ l'épigraphe et le point $(x_0, f(x_0)-1)$. En déduire que $f^\star$ est propre.

2. (a) L'épigraphe de $f^\star$ est une intersection de demi-espaces fermés. Il est donc convexe et fermé et par la question précédente (a) et (b) on déduit que $f^\star$ est convexe s.c.i..

(b) On peut prendre $f(x) = \sqrt{|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $f^\star(y) \equiv +\infty$. Si f est convexe et propre, il existe au moins un point $(x_0, f(x_0))$ dans l'épigraphe et donc (par exemple) le point $(x_0, f(x_0)-1)$ n'est pas dans l'épigraphe. On peut donc appliquer le théorème de Hahn-Banach (version fermé-compact) à ce point et à l'épigraphe, considérés comme des parties de $E \times \mathbb{R}$. Il existe donc $(y, \lambda) \in (E \times \mathbb{R})' = E' \times \mathbb{R}$ et une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (x, \mu) \in \mathrm{Epi}(f), < y, x > +\lambda\mu \leq \alpha$ et $< y, x_0 > +\lambda(f(x_0)-1) > \alpha$. A cause de la deuxième relation, on ne peut pas avoir $\lambda = 0$. En faisant $\mu \to +\infty$, on voit que nécessairement $\lambda < 0$. On déduit donc que

$$\forall (x, \mu) \in \mathrm{Epi}(f), \ \ \mu \geq \frac{\alpha}{\lambda} - < \frac{y}{\lambda}, x > .$$

En particulier,

$$\forall x \in E, \ \ f(x) \geq \frac{\alpha}{\lambda} - < \frac{y}{\lambda}, x > .$$

Alors

$$f^\star(-\frac{y}{\lambda}) = \sup_x < -\frac{y}{\lambda}, x > -f(x) \leq -\frac{\alpha}{\lambda} < +\infty.$$

3. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que C un cône "pointu", si c'est un cône tel qu'il existe $y \in E'$ vérifiant $< y, x > \leq 0$ pour tout $x \in C$. De méme, C' est appelé un cône pointu de E' s'il existe $x \in E$ tel que $< y, x > \leq 0$ pour tout $y \in C'$. On pose si $C \subset E$

$$C^\star = \{y \in E', \ \ \forall x \in C, \ \ < y, x > \leq 0\}$$

et de même, si $C' \subset E'$,

$$C'^\star = \{x \in E, \ \ \forall y \in C', \ \ < y, x > \leq 0\}.$$

Remarquer que si C est non vide, alors $C^\star$ est un cône convexe fermé pointu. Montrer en utilisant un théorème de séparation de Hahn-Banach que $C \subset E$ est un cône convexe fermé pointu si et seulement si $C^{\star\star} = C$.

3. $C^\star$ est l'intersection des demi-espaces fermés $H_{\alpha,x} = \{y, \ < y, x > \leq 0\}$ qui sont des cônes convexes fermés et c'est encore un cône convexe fermé, pointu de surcrot.

On a évidemment $C \subset C^{\star\star}$. Supposons qu'il existe $x_0 \in C^{\star\star}$ tel que $x_0 \notin C$. Alors on peut trouver, par le théorème de séparation de Hahn-Banach (version fermé-compact), $y \in E'$ et une constante λ tels que $< y, x_0 > \ \ > \lambda > \ \ < y, x >$ pour tout $x \in C$. Comme C contient 0, on a $\lambda > 0$. Comme C est un cône, on peut remplacer y par αy et faire $\alpha \to +\infty$. En divisant par α il vient alors dans l'inégalité de droite $0 \geq \ < y, x >$, qui prouve que $y \in C^\star$. Mais par définition de $C^{\star\star}$, on doit alors avoir $< y, x_0 > \leq 0$, ce qui donne une contradiction.

4. (a) On associe à chaque fonction propre $f : E \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ le cône pointu de $E \times I\!\!R^2$,

$$C(f) = I\!\!R^+\{(x, \lambda, -1), \ \ \lambda \geq f(x)\}$$

et à $g : E' \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ le cône pointu de $E' \times I\!\!R^2$,

$$C'(g) = I\!\!R^+\{(y, -1, \mu), \ \ \mu \geq g(x)\}.$$

Remarquer que $(E \times I\!R^2)'$ est identifiable à $E' \times I\!R^2$. On notera

$$< (y, \alpha, \beta), (x, \lambda, \mu) >=< y, x > +\alpha\lambda + \beta\mu$$

le crochet de mise en dualité de ces espaces. Vérifier que

$$C'(f^\star) = C(f)^\star \text{ et } C(g^\star) = C'(g)^\star.$$

(b) Remarquer que $C(f)$ est un cône convexe pointu non vide si et seulement si f est convexe s.c.i. et propre.

4. (a) Vérifions par exemple la première de ces relations. On a

$$(y, -1, \mu) \in C'(f^\star) \Leftrightarrow$$

$$f^\star(y) \leq \mu \Leftrightarrow \sup_x < y, x > -f(x) - \mu \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall x, \text{ tel que } f(x) \leq \lambda, \; < y, x > -\lambda - \mu \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall x, \text{ tel que } f(x) \leq \lambda, \; < (y, -1, \mu), (x, \lambda, -1) >\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(y, -1, \mu) \in C(f)^\star.$$

Donc

$$C'(f^\star) = C(f)^\star.$$

(b) Il est clair que $C(f)$ est non vide, convexe et fermé si et seulement si Epi(f) est non vide, convexe, et fermé. Par la question 1, cela équivaut à dire que f est convexe, propre et s.c.i..

5. En déduire en utilisant le 3) qu'une fonction est convexe s.c.i. si et seulement si $f^{\star\star} = f$.

5. Par le 3), $C(f)$ est un cône convexe fermé pointu si et seulement si $C(f) = C(f)^{\star\star}$. Mais par la question précédente, $C(f)^{\star\star} = (C'(f^\star))^\star = C(f^{\star\star})$. Donc $C(f)$ est un cône convexe fermé pointu si et seulement si $C(f) = C(f^{\star\star})$, qui est équivalent à $f = f^{\star\star}$.

6. Exemple 1. Soit C un convexe de E. On considère sa fonction caractéristique, $1\!\!1_C(x) = 0$ si $x \in C$, $1\!\!1_C(x) = +\infty$ sinon.

(a) Calculer $1\!\!1^\star(y)$.

(b) On pose $|y|_C = 1\!\!1^\star(y)$. Montrer que c'est une semi-norme sur E' si et seulement si C est symétrique par rapport 0. (Remarque utile : $f(-x)^\star = f^\star(-x)$.)

6 (a) On a $1\!\!1_C^\star(y) = \sup_{x\in C} < y, x >= |y|_C$.

(b) L'inégalité triangulaire est immédiate. Si C est symétrique par rapport à 0, il contient 0 et on a bien $|y|_C \geq 0$. On vérifie aisément $|\lambda y|_C = \lambda |y|_C$ si $\lambda > 0$. Si C est symétrique par rapport à 0, $|y|_C = |-y|_C$ et on a donc bien une semi-norme. Réciproquement, si $|y|_C$ est une semi-norme, on a $|y|_C = |-y|_C$ pour tout y. Donc $1\!\!1^\star(-y) = 1\!\!1^\star(y)$ et donc $1\!\!1^{\star\star}(-y) = 1\!\!1^{\star\star}(y)$ par la remarque utile, ce qui donne $C = -C$.

7. Exemple 2.

(a) Soit $E = I\!\!R$. On pose pour $1 < p < +\infty$, $f(x) = |x|^p$. Calculer $f^\star(y)$. (On posera $p' = \frac{p-1}{p}$.) Vérifier par le calcul que l'on a bien $f^{\star\star} = f$.

(b) On prend $E = I\!\!R^N$ muni de la norme euclidienne et on identifie E' et E. On pose pour $1 < p < +\infty$, $g(x) = ||x||^p$. Calculer $g^\star(y)$.

7 (a) On obtient dans le cas de $E = I\!\!R$:

$$f^\star(y) = \sup_x yx - |x|^p = ((\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}} - (\frac{1}{p})^{\frac{p}{p-1}})|y|^{\frac{p}{p-1}}.$$

(b) On calcule $\sup_{x\in I\!\!R}(x, y) - ||x||^p$, où (x, y) dénote le produit scalaire dans $I\!\!R^N$. Si x réalise le maximum, il vérifie par différentiation $y = ||x||^{p-2}x$, et on déduit par substitution que la valeur du maximum est $f^\star(y) = ((\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}} - (\frac{1}{p})^{\frac{p}{p-1}})||y||^{\frac{p}{p-1}}$.

8 Montrer que si f est une fonction quelconque $E \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ minorée par une forme affine : $f(x) \geq < y_0, x > +\alpha$, alors $f^\star$ est propre. (Raisonner comme au 2). Montrer que l'épigraphe de $f^{\star\star}$ est l'enveloppe convexe fermée de l'épigraphe de f : Interpréter aussi $f^{\star\star}$ comme la plus grande fonction convexe g s.c.i. telle que $g \leq f$ et utiliser que $f \geq g \Rightarrow f^\star \leq g^\star$.

8 Pour montrer que $f^\star$ est propre, on raisonne comme au 2) et on obtient $f^\star(y_0) < +\infty$. Appelons g la plus grande fonction convexe s.c.i. telle que $g \leq f$. Il est immédiat que son épigraphe est le plus petit convexe fermé contenant Epi(f). On sait déja que Epi($f^{\star\star}$) contient Epi(f) (questions 3, 4). Donc $f^{\star\star} \leq f$ par la définition de g, on a $f \geq g \geq f^{\star\star}$. Mais $f \geq g \Rightarrow f^{\star\star} \geq g^{\star\star} = g$. Donc $g = f^{\star\star}$.