Ecole Normale Supérieure de Cachan. Magistère de Mathématiques, cours d'Analyse Fonctionnelle

Transforme de Fenchel

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel normé et E' son dual.

1. Soit $f : I\!\!R^N \to I\!\!R \cup \{+\infty,\ -\infty\}$ une fonction.

(a) Montrer que f est semicontinue inférieurement (s.c.i.) si et seulement si l'épigraphe $\{(x, \lambda),\ f(x) \leq \lambda\}$. est fermé. Rappel : on dit que f est semicontinue inférieurement en x si $f(x) \leq \liminf f(x_n)$ pour toute suite $x_n \to x$. On notera $\text{Epi}(f)$ l'épigraphe de f.

(b) Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

(c) Montrer que si f_i est une famille de fonctions convexes alors $\sup_i f_i$ est convexe et que si f_i est une famille de fonctions s.c.i. alors $\sup_i f_i$ est s.c.i..

2. (a) Soit $f : E \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$. On dira que f est propre si son domaine $\{x, f(x) \neq +\infty\}$ est non vide. On appelle *Transformée de Fenchel-Legendre* de f la fonction $f : E' \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f^\star(y) = \sup_{x \in E} < y, x > -f(x).$$

Déduire de la question précédente que $f^\star$ est convexe et s.c.i.. De même, si $f : E' \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$, on considère

$$f^\star(x) = \sup_{y \in E'} < y, x > -f(y).$$

Montrer que $f^\star$ est convexe s.c.i..

(b) Donner un exemple de fonction propre f telle que $f^\star$ ne soit pas propre. Montrer que si f est convexe s.c.i. et propre, $f^\star$ l'est aussi. Indication : si f est propre $(\exists x_0,\ f(x_0) < +\infty)$ séparer par un hyperplan de $E \times I\!\!R$ l'épigraphe et le point $(x_0, f(x_0) - 1)$. En déduire que $f^\star$ est propre.

3. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que C un cône "pointu", si c'est un cône tel qu'il existe $y \in E'$ vérifiant $< y, x > \leq 0$ pour tout $x \in C$. De méme, C' est appelé un cône pointu de E' s'il existe $x \in E$ tel que $< y, x > \leq 0$ pour tout $y \in C'$. On pose si $C \subset E$

$$C^\star = \{y \in E',\ \ \forall x \in C,\ \ < y, x > \leq 0\}$$

et de même, si $C' \subset E'$,

$$C'^{\star} = \{x \in E, \ \ \forall y \in C', \ \ < y, x > \leq 0\}.$$

Remarquer que si C est non vide, alors $C^{\star}$ est un cône convexe fermé pointu. Montrer en utilisant un théorème de séparation de Hahn-Banach que $C \subset E$ est un cône convexe fermé pointu si et seulement si $C^{\star\star} = C$.

4. (a) On associe à chaque fonction propre $f : E \to I\!R \cup \{+\infty\}$ le cône pointu de $E \times I\!R^2$,

$$C(f) = I\!R^{+}\{(x, \lambda, -1), \ \ \lambda \geq f(x)\}$$

et à $g : E' \to I\!R \cup \{+\infty\}$ le cône pointu de $E' \times I\!R^2$,

$$C'(g) = I\!R^{+}\{(y, -1, \mu), \ \ \mu \geq g(x)\}.$$

Remarquer que $(E \times I\!R^2)'$ est identifiable à $E' \times I\!R^2$. On notera

$$< (y, \alpha, \beta), (x, \lambda, \mu) >=< y, x > +\alpha\lambda + \beta\mu$$

le crochet de mise en dualité de ces espaces. Vérifier que

$$C'(f^{\star}) = C(f)^{\star} \text{ et } C(g^{\star}) = C'(g)^{\star}.$$

(b) Remarquer que $C(f)$ est un cône convexe pointu non vide si et seulement si f est convexe s.c.i. et propre.

5. En déduire en utilisant le 3) qu'une fonction est convexe s.c.i. si et seulement si $f^{\star\star} = f$.

6. Exemple 1. Soit C un convexe de E. On considère sa fonction caractéristique, $1\!\!1_C(x) = 0$ si $x \in C$, $1\!\!1_C(x) = +\infty$ sinon.

(a) Calculer $1\!\!1^{\star}(y)$.

(b) On pose $|y|_C = 1\!\!1^{\star}(y)$. Montrer que c'est une semi-norme sur E' si et seulement si C est symétrique par rapport 0. (Remarque utile : $f(-x)^{\star} = f^{\star}(-x)$.)

7. Exemple 2.

(a) Soit $E = I\!R$. On pose pour $1 < p < +\infty$, $f(x) = |x|^p$. Calculer $f^{\star}(y)$. (On posera $p' = \frac{p-1}{p}$.) Vérifier par le calcul que l'on a bien $f^{\star\star} = f$.

(b) On prend $E = I\!R^N$ muni de la norme euclidienne et on identifie E' et E. On pose pour $1 < p < +\infty$, $g(x) = ||x||^p$. Calculer $g^\star(y)$.

8 Montrer que si f est une fonction quelconque $E \to I\!R \cup \{+\infty\}$ minorée par une forme affine : $f(x) \geq < y_0, x > +\alpha$, alors $f^\star$ est propre. (Raisonner comme au 2). Montrer que l'épigraphe de $f^{\star\star}$ est l'enveloppe convexe fermée de l'épigraphe de f : Interpréter aussi $f^{\star\star}$ comme la plus grande fonction convexe g s.c.i. telle que $g \leq f$ et utiliser que $f \geq g \Rightarrow f^\star \leq g^\star$.