Examen d'analyse fonctionnelle, E.N.S. Cachan magistère, 2010[1]

On recommande très vivement la précision dans la rédaction. En particulier, donner systématiquement des références explicites du polycopié pour TOUS les théorèmes, propositions, définitions utilisés dans les démonstrations.

Exercice 1 Topologie Soit E un espace muni de deux topologies $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$. On suppose qu'il y a une base de voisinages $\mathcal{U}$ pour $\mathcal{O}$ et une base de voisinages $\mathcal{U}'$ pour $\mathcal{O}'$ telles que tout élément de $\mathcal{U}'$ contient un élément de $\mathcal{U}$ et vice-versa. Montrer que $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Exercice 2 Topologie
Soit X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \to Y$ une bijection continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 3 Topologie

1) Vérifier que $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ est une distance sur $X =]0, +\infty[$.

2) Vérifier que la topologie donnée par cette distance est la même que la topologie induite sur X par la topologie habituelle sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $]0, 1]$ est une partie complète de X.

4) Expliquer le dicton: "la complétude n'est pas une notion topologique."

Exercice 4 Espaces de Hilbert Montrer que $C^0([0,1])$ muni du produit scalaire $f.g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5 Séries de Fourier et convergences

1) Développer en série de Fourier en cosinus la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$.

2) En quel(s) sens la série converge-t-elle vers f? (Examiner toutes les convergences de suites de fonctions que vous connaissez)

Exercice 6 Calcul de limites faibles

1) La suite $u_n(x) = \cos nx$ converge-t-elle faiblement dans $L^2([0, 2\pi])$ et si oui, quelle est sa limite faible? Cette suite converge-t-elle fortement?

2) Mêmes questions pour $u_n(x) = \cos^2(nx)$.

3) Mêmes questions pour $u_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]} \cos nx$.

4) Mêmes questions pour $u_n(x) = \cos^2(nx)\mathbb{1}_{[0,1]}$.

Exercice 7 Espaces de Sobolev On va montrer que toute fonction de H^1_{per} vérifie le théorème fondamental de l'analyse:

$$u(y) - u(x) = \int_{[x,y]} u'(t)dt. \tag{1}$$

1) Considérons $u_n := \sum_{|k| \leq n} c_k(u)e^{ikt}$, la série de Fourier tronquée de u. Montrer en relisant la preuve de la proposition 7.4 que u_n converge uniformément vers u et que u_n' tend dans L^2_{loc} vers u'.

2) Remarquer que u_n vérifie bien (1) et en déduire que u vérifie encore (1).

On se propose maintenant de montrer que de toute suite bornée dans $H^1_{per}([0, 2\pi])$ on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur $[0, 2\pi]$. Pour cela on suivra l'une des deux démarches suivantes:

3) *Première méthode:* Déduire de (1) qu'il existe une constante C dépendant de u telle que $|u(x)|^2 \leq C \int_{[0,2\pi]} (|u'(t)|^2 + |u(t)|^2)dt$. Expliciter C.

4) Déduire également l'existence d'une constante telle que pour $x, y \in [0, 2\pi]$, $u(x) - u(y) \leq C|x-y|^{\frac{1}{2}}$.

5) Conclure en utilisant le résultat des deux questions précédentes et le théorème d'Ascoli-Arzela appliqué à une suite bornée dans H^1_{per}.

6) *Seconde méthode:* montrer que si u_n est une suite bornée dans H^1_{per} alors une sous-suite encore notée u_n converge faiblement dans $L^2([0, 2\pi])$ vers une fonction $u \in L^2([0, 2\pi])$ et u'_n converge faiblement dans $L^2([0, 2\pi])$ vers une fonction $v \in L^2([0, 2\pi])$.

7) Montrer en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions que $v = u'$.

8) Déduire que u_n tend uniformément vers u.

Exercice 8 Parmi les applications $u : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui suivent, déterminer celles qui sont des distributions sur $\mathbb{R}$. Expliquer.

1) $< u, \varphi >= |\varphi(0)|$;

2) $< u, \varphi >= \int_0^1 e^t \varphi^{(k)}(t) dt$, $k \in \mathbb{N}$;

3) $< u, \varphi >= \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t)$;

4) $< u, \varphi >= \sum_{j=0}^\infty \varphi^{(j)}(0)$

5) $< u, \varphi >= \sum_{j=0}^\infty \varphi^{(j)}(j)$.

Exercice 9 Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution sur $\mathbb{R}$, on définit sa translatée de $h \in \mathbb{R}$ par

$$< \tau_h u, \varphi >=< u, \tau_{-h} \varphi >,$$

où on note $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x-h)$.

1) Vérifier que $\tau_h u$ est une distribution.

2) Vérifier la compatibilité des deux définitions, à savoir que si $u \in L^1_{loc}$ et $\tilde{u}$ la distribution qui lui est associée canoniquement, $\tau_h \tilde{u} = \tau_h u$ au sens des distributions.

3) Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{\tau_{-h} u - u}{h} \to u'$$

au sens des distributions.

4) Donner une formule de discrétisation du même type pour approcher u''.

Exercice 10 Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente, c'est-à-dire vérifiant pour au moins une valeur de $M \in \mathbb{N}$ une inégalité du type

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ |c_k| \leq C(1 + |k|)^M.$$

Montrer que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik.x} \tag{2}$$

converge au sens des distributions. Indication: utiliser directement la définition de la convergence au sens des distributions.

2) Montrer que la somme de cette série définit une distribution 2π-périodique, c'est-à-dire telle que $\tau_{2\pi} u = u$. Indication: montrer cette relation pour la série tronquée et argumenter que l'on peut passer à la limite.

Exercice 11 On pose $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et on note $k.x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ leur produit scalaire. On rappelle que les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ik.x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et qu'on a donc pour toute fonction $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$,

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(u) e^{ik.x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} u(x) e^{-ik.x} dx, \tag{3}$$

la convergence de la série se vérifiant au sens de $L^2([0,2\pi]^2)$.

1) On considère la fonction définie sur $[0,2\pi]^2$ par

$$u(x_1,x_2) = \sum_{k_1,k_2 \in I\!N^*} \frac{1}{k_1^2+k_2^2} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2}.$$

Montrer que cette série converge (en un sens que l'on précisera) et que $u \in L^2([0,2\pi]^2)$.

2) Montrer que $\sum_{k_1,k_2 \in I\!N} \frac{1}{k_1^2+k_2^2} = +\infty$. (On pourra comparer cette série double à une intégrale double).

3) Montrer que les séries $\sum_{k_1,k_2 \in \mathcal{Z}} \frac{k_1}{k_1^2+k_2^2} e^{ik_1x_1+k_2x_2}$ et $\sum_{k_1,k_2 \in \mathcal{Z}} \frac{k_2}{k_1^2+k_2^2} e^{ik_1x_1+ik_2x_2}$ ne convergent pas dans L^2_{loc}.

4) Calculer les dérivées partielles premières de u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

5) Montrer que $u \notin H^1_{loc}(I\!R^2)$.

6) Montrer que $\sum_{k \in \mathcal{Z}^2} e^{ik.x} = (2\pi)^2 \sum_{l \in \mathcal{Z}^2} \delta_l$. Indication : considérer les sommes finies $\sum_{|k_1|\leq N,\ |k_2|\leq N} e^{ik.x}$ et utiliser le résultat en dimension 1.

7) Montrer que u est solution, au sens des distributions, de $-\Delta u = C \sum_{m,n \in \mathcal{Z}} \delta_{m,n}$, C constante à préciser. En déduire que l'équation $-\Delta u = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(]-\pi,\pi[^2)$ a une solution $u \in L^2_{loc}(]-\pi,\pi[^2)$ qui n'est pas dans H^1.