Examen d'analyse fonctionnelle, E.N.S. Cachan, 2008-2009

Les exercices sont largement indépendants. Lisez-les tous avant de commencer et choisissez l'ordre qui vous convient le mieux. On recommande très vivement la précision, mais aussi la briéveté dans la rédaction. Ne redémontrez pas des faits contenus dans le polycopié. Contentez-vous de citer précisément en donnant des références explicites pour les résultats utilisés dans les démonstrations. Si une réponse à une question est négative, donner un contrexemple. Si elle est positive, le prouver.

Exercice 1 Critère de convergence faible
Soit H un espace de Hilbert. Montrer que $x_n \to x$ si et seulement si $x_n \rightharpoonup x$ et $||x_n|| \to ||x||$.

Exercice 2 Montrer que $l^\infty(I\!N)$ n'est pas séparable.

Exercice 3 Hilberts, topologies faibles

1) Soit H un espace de Hilbert muni de sa norme $||x||_H$ et $(e_n)_{n\in I\!N}$ une base hilbertienne de H. H est-il séparable?

2) Montrer que si une suite x_k est une suite bornée telle que $(x_k, e_n) \to (x, e_n)$ pour tout n, alors $x_k \rightharpoonup x$ dans H.

3) On appelle $\mathcal{T}$ la topologie la moins fine rendant les applications coordonnées $x \in H \to (x, e_n)$ continues. Cette topologie est-elle la même que la topologie faible sur H? Sur la boule unité de H?

4) On pose $||x||^2_{(H)} = \sum_{n\in I\!N} \frac{1}{2^n}|(x, e_n)|^2$. Montrer que $||x||_{(H)}$ est une norme sur H.

5) Les normes $||x||_{(H)}$ et $||x||_H$ sont elles équivalentes?

6) H muni de $||x||_{(H)}$ est-il complet?

7) H muni de $||x||_{(H)}$ est-il un espace préhilbertien?

8) On pose $H = l^2(I\!N)$. Pouvez-vous décrire le complété de H pour la norme $||x||_{(H)}$.

Exercice 4 Critères de convergence L^1.
Soit f_n une suite de fonctions sommables sur un ensemble mesurable borné B de $I\!R^N$ telles que $f_n \to f$ en probabilité et f_n a un chapeau intégrable, $|f_n| \le g \in \mathrm{L}^1(I\!R)$.

1) A-t-on $||f_n - f||_{L^1} \to 0$?

2) Si oui, l'hypothèse que B est borné est elle nécessaire?

Exercice 5 Convolution et régularisation.
On pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}}$; c'est le noyau de Gauss.

1) Calculer $\int_{I\!R} g_h(x)dx$.

2) Montrer que $g_h * g_k = g_{h+k}$.

3) Montrer que si $f \in C_b(I\!R)$ (fonctions continues bornées), alors $f * g_h(x) \to f(x)$ en tout point x.

4) La convergence précédente est-elle uniforme?

5) La convergence précédente est-elle uniforme si f est dans $C_0(I\!R)$, espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini?

6) Si $f \in L^p(I\!R)$, $1 \le p < \infty$, a-t-on $f * g_h \to f$ dans L^p?

7) Même question avec $p = +\infty$.

8) On suppose que $f \in L^\infty(I\!R)$. Montrer que $f * g_1$ est continue.

9) On suppose que $f \in L^\infty(I\!R)$. $f * g_1$ est-elle uniformément continue?

10) On suppose que $f \in L^\infty(I\!R)$. Démontrer que $f * g_1$ est C^∞.

11) On suppose que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Calculer $\frac{\partial}{\partial h}((f * g_h)(x))$ et calculer $\frac{\partial}{\partial x^2}((f * g_h)(x))$. En déduire que $f(h,x) := (f * g_h)(x)$ est solution d'une équation de la chaleur avec condition initiale $f(0,x) = f_0(x)$, que l'on explicitera.

Exercice 6 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\int_x^y f(t)dt = 0$ pour tout $x < y$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 7 Le théorème fondamental du traitement du signal en discret
Soit $H = l^2(\mathcal{Z})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathcal{Z}}$ indexées par les entiers relatifs. On définit l'opérateur de *shift* S par $(Su)_n := u_{n-1}$.

1) Montrer que S est continu de l^p dans l^p.

2) Donner les valeurs de p pour lesquelles $S^k u \rightharpoonup 0$ dans l^p, quand $k \to \pm\infty$.

3) On dit qu'un opérateur linéaire T sur $L^2(\mathcal{Z})$ est stationnaire s'il commute avec le shift, à savoir $TSu = STu$ pour tout $u \in l^2(\mathcal{Z})$. Montrer que si $T : l^2(\mathcal{Z}) \to l^\infty(\mathcal{Z})$ est continu et stationnaire, alors il existe une suite $v \in l^2(\mathcal{Z})$ telle que $(Tu)_n = \sum_{k\in\mathcal{Z}} v_k u_{n-k}$.

4) Montrer la réciproque.

Exercice 8 Calcul de limites faibles dans L^2
Calculer si elles existent les limites faibles des suites suivantes dans L^2.

1) Dans $L^2(0,\pi)$: $u_n(x) = \frac{\sin^2 n^2 x}{x^{\frac{1}{4}}}$.

2) Dans $L^2(\mathbb{R})$: $u_n(x) = \frac{x^2+2n^2+2}{((x+n)^2+1)((x-n)^2+1)}$. (Commencer par vérifier que ces fonctions sont bien dans $L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 9 Distributions
Parmi les applications $u : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui suivent, déterminer celles qui sont des distributions sur $\mathbb{R}$. Expliquer.

(a) $< u, \varphi >= \int \varphi^2(t)dt$;

(b) $< u, \varphi >= \int_0^1 \varphi^{(k)}(t)dt$, $k \in \mathbb{N}$;

(c) $< u, \varphi >= \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t)$;

(d) $< u, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\frac{1}{j}) - n\varphi(0) - \varphi'(0)\log n\right)$;

(e) $< u, \varphi >= \sum_{j=0}^\infty \varphi^{(j)}(0)$

(f) $< u, \varphi >= \sum_{j=0}^\infty \varphi^{(j)}(j)$.

Exercice 10 Espaces de Sobolev
Montrer que la formule classique d'intégrations par parties est vraie pour deux fonctions quelconques u, v de $W^{1,p}(I)$, $1 \le p \le \infty$.

Exercice 11 Fourier et distributions
Démontrer l'égalité $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi nx} = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2n+1}$.

Exercice 12 Fourier discret, discrétisation de l'intégrale
On appelle une fonction de la forme $u(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}e^{\frac{2i\pi nx}{a}}$ un "polynôme trigonométrique de degré n".

1) Vérifier que u est a-périodique. Interpréter les coefficients $\tilde{u}_n$.

2) Montrer que si u sont deux polynômes trigonométriques de degré n, alors on a la formule suivante, que l'on interprétera: $\int_{[0,a]} u(x)\overline{v}(x)dx = a\sum_n \tilde{u}_n\tilde{v}_n$.

3) Montrer sous les mêmes hypothèses que $\int_{[0,a]} u(x)\overline{v}(x)dx = \frac{a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u(\frac{ka}{N})\overline{v}(\frac{ka}{N})$.

4) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\int_{[0,a]} u(x)\overline{v}(x)dx = \frac{ka}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u(\frac{ka}{N}+b)\overline{v}(\frac{ka}{N}+b)$.