6.1 La preuve la plus rapide de la loi forte des grands nombres

(V. S. Borkar, Probability Theory, Springer, 1995, pages 66-67).

La loi des grands nombres est justifiée par Vivek Borkar de la manière suivante : “Observez que des variables aléatoires de carré intégrable et de moyenne zéro sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ forment un espace vectoriel avec produit scalaire $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[XY]$. Mais si on ajoute des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans cet espace, c'est la même chose que d'ajouter n vecteurs orthogonaux de même longueur. Donc la moyenne arithmétique de ces vecteurs doit être d'ordre $n^{-\frac{1}{2}}$.” C'est exactement la ligne de raisonnement que suit la loi faible des grands nombres, qui suppose les variables aléatoires de variance bornée. La loi forte précise la loi faible. Sa démonstration très détaillée suivant la ligne de Kolmogorov consiste a tronquer les variables X_n pour que leurs variances soient contrôlées et que l'on puisse appliquer un argument hilbertien du même type que pour la loi faible. Ensuite, on montre que la différence entre X_n et sa troncature Y_n est asymptotiquement négligeable par le lemme de Borel-Cantelli. La preuve d'Etemadi suit toujours cette démarche, mais de manière particulièrement heureuse, en peu de lignes.

Théorème 6.1.1. *Soient X_n, $n \geq 1$, intégrables,* indépendantes deux à deux *et identiquement distribuées et $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Alors*

$$\frac{S_n}{n} \to EX_1 \ p.s..$$

Démonstration. Cette preuve est due à Etemadi. Comme X_n^+ et X_n^- vérifient les mêmes hypothèses du théorème on montre tout avec $X_i \geq 0$. Soit $Y_i := X_i \mathbb{1}_{X_i \leq i}$ et $S_n^* := \sum_{i=1}^n Y_i$, $n \geq 1$. Soient $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1$ et $k_n := [\alpha^n]$ la partie entière de α^n. Dans tout ce qui suit C désigne une constante positive variant d'étape en étape. Soit $\mu := \mathbb{P}_{X_i}$ la loi de X_i. On note $\sigma^2(X)$ la variance de X. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{k_n}^* - \mathbb{E}[S_{k_n}^*]}{k_n}\right|\right) &\leq C \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma^2(S_{k_n}^*)}{k_n^2} \\
&= C \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2(Y_i) \\
&\leq C \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[Y_i^2]}{i^2} \\
&= C \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \int_0^i x^2 \mu(dx) \\
&= C \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \int_k^{k+1} x^2 \mu(dx) \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} x^2 \mu(dx) \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} x \mu(dx) = C\mathbb{E}X_1 < \infty.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\mathbb{E}X_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}S_{k_n}^*}{k_n}.$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\frac{S_{k_n}^*}{k_n} \to EX_i \text{ p.s.}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \mu(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \int_i^{i+1} \mu(dx) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \int_i^{i+1} \mu(dx) \\
&\leq EX_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(X_n \neq Y_n \text{ i.o.}) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = \mathbb{E}X_1 \text{ p.s.}$$

Pour $n \geq 1$ soit $m(n) \geq 0$ tel que $k_{m(n)} \leq n \leq k_{m(n)+1}$. Comme $n \to S_n$ est croissante,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_{k_m(n)}}{k_m(n)} \frac{k_m(n)}{k_{m(n)}+1} \\
&\geq \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_m(n)}}{k_{m(n)}} = \frac{1}{\alpha} EX_1 < \infty.
\end{aligned}$$

De même,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \alpha \mathbb{E}X_1 \text{ p.s..}$$

Comme $\alpha > 1$ est arbitraire on conclut en faisant $\alpha \to 1$. $\square$