Mathématiques
ENS de Cachan

Analyse
S.Fabre 2009-2010

TD2 Topologie

Bibliographie recommandée : poly analyse, J.Dixmier "topologie générale", G.Choquet "cours de topologie".

Exercice 1
Soit E un espace topologique "grossier" i.e. les ouverts de E sont $\{\emptyset, E\}$. Montrer que si E contient plus d'un élément, il n'est pas séparé.

Exercice 2 Soit E un espace métrique, montrer que
1) l'espace E est séparé,
2) si A est une partie de E et si $x \in E$ alors $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to x$.

Exercice 3 Continuité séquentielle
Soient E et F deux espaces topologiques séparés. Soit $f : E \to F$ une application séquentiellement continue (c'est-à-dire si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$).
On suppose que E est métrisable et on souhaite montrer que f est continue.
1) Ecrire la continuité des deux applications "identité".
2) En supposant que f n'est pas continue en un certain $x_0 \in E$, construire une suite qui donnera une contradiction. Préciser à quel moment, la continuité des deux applications "identité" est utilisée.

Exercice 4 Valeur d'adhérence dans un espace métrique
Soient E un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de points de E et $x \in E$. Montrer que si x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers x.

Exercice 5
1) Soient E un espace topologique compact et F un espace topologique séparé. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(E)$ est compact.
2) Soient E un espace métrique compact et F un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 6 Métrique compact $\Rightarrow$ complet
Soit E un espace métrique compact, montrer que E est complet.

Exercice 7
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. on suppose que E est de dimension finie.
a) Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
b) Soit $u : E \to F$ linéaire, montrer que u est continue.

Exercice 8
Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$. On définit sur E, $N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_1(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|)$.

a) Vérifier que N_0 et N_1 sont des normes sur E.
Soit $x = \sqrt{2} - 1$, montrer que $\forall n \geq 1$, $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$. En déduire que $(\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.

b) Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes sur E. (E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, commenter.)

Exercice 9
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.
a) Vérifier que N est une norme sur E.
b) Montrer que pour toute f dans E, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$.
c) Montrer que $\| \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 10
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.
Montrer que si F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet (donc E' est toujours complet).

Exercice 11 Théorème à connaitre
Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) L'espace E est compact.
(ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
(iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.
(Indication pour $(iii) \Rightarrow (i)$: Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E,
1) montrer que $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in E$, $\exists i \in I$, tel que $B(x,r) \subset O_i$.
2) montrer que E est recouvert par un nombre fini de O_i.)

Corrigé des exercices

Exercice 1
Soient $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Soient $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$. Par définition des voisinages, il existe U ouvert tel que $x \in U \subset V$. Alors $U = E$ donc $V = E$. De même, $W = E$. On ne peut donc pas séparer x et y.

Exercice 2
1) Si $x \neq y$, $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ avec $r = \dfrac{d(x,y)}{4}$.
2) $d(x,A) = \inf\limits_{y \in A} d(x,y)$.

$$\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists y_\varepsilon \in A \text{ tel que } d(x,y_\varepsilon) \leq \varepsilon, \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \\ &\iff x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Si $d(x,A) = 0$ alors pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in A$ tel que $d(x,x_n) \leq \frac{1}{n}$ donc il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow x$.
Si il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow x$ alors $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$ donc $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ et $x \in \overline{A}$.

Exercice 3
Remarque : On a toujours continuité $\Rightarrow$ continuité séquentielle.
1) E est métrisable si et seulement si il existe une distance d sur E telle que les deux applications "identité" suivantes

$$\begin{aligned} i_1 :&\quad (E,d) \to E, \\ i_2 :&\quad E \to (E,d), \end{aligned}$$

sont continues. Ce qui s'écrit pour i_1 :

$$\forall x, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists r > 0, \text{ tel que } d(x,y) < r \Rightarrow f(y) \in V.$$

Et pour i_2 :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x), \text{ tel que } y \in V \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

2) On suppose que f n'est pas continue en $x_0 \in E$, alors $\exists W \in \mathcal{V}(f(x_0))$ tel que $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $f(V) \not\subset W$. Comme i_2 est continue, en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in I\!N^\star$, on voit qu'il existe $V_n \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $y \in V_n \Rightarrow d(x_0,y) < \frac{1}{n}$. On peut donc construire une suite $(y_n)_n$ telle que $d(x_0,y_n) < \frac{1}{n}$ et $f(y_n) \notin W$ pour tout n.
Alors la suite $(y_n)_n$ converge vers x_0 dans (E,d). Comme i_1 est (séquentiellement) continue, $y_n \to x_0$ dans E. Or la suite $(f(y_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$, puisque $f(y_n) \notin W$ pour tout n. C'est absurde.

Exercice 4
Si x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ alors $\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists i \geq n$ tel que $d(x,x_i) \leq \varepsilon$. En choisissant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{k}$, on construit une suite $(n_k)_k$ strictement croissante telle que $d(x,x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$. La suite $(x_{n_k})_k$ tend alors vers x.

Exercice 5
1) On veut montrer que $f(E)$ est compact.
D'abord $f(E)$ est séparé car F l'est. Supposons maintenant que $f(E) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de F. Comme f est continue, $f^{-1}(U_i)$ est ouvert dans E et $E \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. Puisque E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : $\exists J$ fini$\subset I$ tel que $E \subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$. Alors $f(E) \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. D'où $f(E)$ est compact. (Rappel $f(f^{-1}(A)) \subset A$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$.)
2) Comme f est continue, $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \alpha_x > 0$ tel que $d(x,y) < \alpha_x \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors $E \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{\alpha_x}{2})$ et E est compact.
Donc $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{\alpha_{x_i}}{2})$. On pose $\delta = \frac{1}{4}\min(\alpha_{x_1}, ..., \alpha_{x_N}) > 0$.
Si y et z sont tels que $d(y,z) < \delta$, $\exists i \le N$, tel que $y \in B(x_i, \frac{\alpha_{x_i}}{2})$ et $d(z, x_i) < \delta + \frac{\alpha_{x_i}}{2} < \alpha_{x_i}$. Donc $\exists i \le N$ tel que $y, z \in B(x_i, \alpha_{x_i})$. Alors

$$d(f(y), f(z)) \le d(f(y), f(x_i)) + d(f(x_i), f(z)) < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue.

Exercice 6
Soit $(x_n)_n \subset E$ une suite de Cauchy. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n, m \ge N$, $d(x_n, x_m) \le \varepsilon$. Comme E est compact, il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ qui converge vers x dans E. On fixe $n \ge N$. Pour $n_k \ge N$, on a bien sûr $d(x_{nk}, x_n) \le \varepsilon$. Quand $k \to \infty$, $x_{nk} \to x$ et $d(x_{nk}, x_n) \to d(x, x_n)$. Donc en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $d(x, x_n) \le \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $n \ge N$. E est bien complet.

Exercice 7
a)Soient $n = \dim E$ et $e_1, ..., e_n$ une base de E. On définit pour $x = \displaystyle\sum_1^n x_i e_i \in E$, la norme $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_1^n |x_i|$. Soit $S_1 = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$ et soit N une autre norme sur E, de $N(x) \le (\sup_i N(e_i))\|x\|_1$ on déduit la continuité de N sur $(S_1, \| \, \|_1)$ compact, donc N est bornée et atteint ses bornes. Il existe α et $\beta \ge 0$ tels que $\forall x \in S_1$, $\alpha \le N(x) \le \beta$. Comme $\alpha = N(y)$ pour un $y \in S_1$, $y \ne 0$ et $\alpha > 0$. Enfin, $\forall x \ne 0$, $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$ donc $\alpha\|x\|_1 \le N(x) \le \beta\|x\|_1$.
b) Soit $x = \displaystyle\sum_1^n x_i e_i \in E$, on a $\|u(x)\|_F \le (\sup_i \|u(e_i)\|_F)\|x\|_1$ donc u est continue.

Exercice 8
a) Il est clair que N_0 et N_1 sont des normes sur E (elles le sont sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
On raisonne par récurrence, pour $n = 1$, on a $a_1 = -1$ et $b_1 = 1$ donc $a_1 b_1 < 0$. On suppose que $x^n \in E$ et $a_n b_n < 0$ alors $x^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$ où $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ et $b_{n+1} = a_n - b_n$ donc $a_{n+1}b_{n+1} = b_n(a_n - b_n) - (a_n - b_n)^2 < 0$.
Enfin si $(\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$ alors $(\sqrt{2}+1)^{n+1} = (2|b_n| + |a_n|) + \sqrt{2}(|a_n| + |b_n|)$. Or $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ et $a_n b_n < 0$ montre que $|a_{n+1}| = 2|b_n| + |a_n|$. De même pour b_{n+1}, $|b_{n+1}| = |a_n| + |b_n|$, donc $\forall n \ge 1$, $(\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.
b) D'une part, $N_0(x^n) = |\sqrt{2} - 1|^n \to 0$. D'autre part, par exemple :

$$N_1(x^n)(1+\sqrt{2}) = N_1((\sqrt{2}+1)^n)(1+\sqrt{2}) \ge (\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2} \to +\infty,$$

donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9
a) Il est clair que N dérive d'un produit scalaire.
b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|f(x)| \leq |f(0)| + (\int_0^1 f'(t)^2 dt)^{\frac{1}{2}}$. En élevant au carré et en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient facilement $|f(x)|^2 \leq 2N(f)^2$, $\forall x \in [0,1]$.
c) On choisit $f_n(x) = x^n$. Alors $\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \to +\infty$. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 10
Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E,F)$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \quad \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, $\forall x \in E$, $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$. (1).
Et $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F complet donc converge vers un élément noté $f(x)$. la fonction f est linéaire comme limite simple de fonctions linéaires. On fixe p dans (1) et on laisse $q \to \infty$, on obtient alors $\|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$, $\forall x \in E$, d'où $f = f - f_p + f_p$ est continue et $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$, dès que $p \geq N$ donc $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 11
On montre $(i) \Rightarrow (ii)$ (qui est toujours vrai) :
On pose $A_n = \{x_k, k \geq n\}$ où $(x_n)_n \subset E$. Alors $F_n = \overline{A_n}$ est fermé et $F_{n+1} \subset F_n$. Il faut montrer que $\cap_n F_n \neq \emptyset$. Si $\cap_n F_n = \emptyset$ alors E compact est la réunion des ouverts $E \setminus F_n$ donc il existe I partie finie de $I\!N$ telle que $E = \cup_{i \in I}(E \setminus F_i)$ alors $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$, c'est absurde car la suite $(F_n)_n$ est décroissante.
On sait donc déjà que $(i) \Rightarrow (ii)$ et que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Il reste à montrer $(iii) \Rightarrow (i)$.
Démontrons le point 1) par l'absurde, si pour tout $r > 0$, il existe x_r tel que, pour tout i, $B(x_r, r) \not\subset O_i$, en choisissant $r = \frac{1}{n}$, on construit une suite $(x_n)_n$ telle que $\forall i$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$. Par hypothèse, il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ convergeant vers un x dans E. D'autre part, il existe i tel que $x \in O_i$ ouvert donc pour un certain N, $B(x, \frac{1}{N}) \subset O_i$. Enfin, $\exists n \geq 2N$ tel que $x_n \in B(x, \frac{1}{2N})$. Alors

$$B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \frac{1}{2N}) \subset B(x, \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}) \subset O_i,$$

ce qui est absurde.
Démontrons le point 2).
Soit $y_1 \in E$, $\exists i_1$ tel que $B(y_1, r) \subset O_{i_1}$. Si $E = O_{i_1}$, c'est fini.
Sinon, $\exists y_2 \in E \setminus O_{i_1}$ et $\exists i_2$ tels que $B(y_2, r) \subset O_{i_2}$. Si $E = O_{i_1} \cup O_{i_2}$, c'est fini, sinon $\exists y_3 \in E \setminus (O_{i_1} \cup O_{i_2})$ etc... Si le processus s'arrête, E est compact. Sinon, il existe une suite $(y_n)_n$ dans E telle que $y_n \notin O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_{n-1}}$ et donc $y_n \notin B(y_1, r) \cup ... \cup B(y_{n-1}, r)$ pour tout n. Par hypothèse, une sous-suite converge or $d(y_n, y_m) \geq r > 0$ dés que $n > m$, c'est absurde.