Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD 2

Exercice 1 Comparaison L^1 et L^2
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
1) Il existe $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $f \notin L^2(\mathbf{R})$.
2) Il existe $f \in L^2(\mathbf{R})$ telle que $f \notin L^1(\mathbf{R})$.
3) Il existe $f \in L^1(0,1)$ telle que $f \notin L^2(0,1)$.
4) Il existe $f \in L^2(0,1)$ telle que $f \notin L^1(0,1)$.

Exercice 2
Donner des exemples de suites de fonctions $f_n \in L^1(0,1)$ telles que
• il y ait inégalité stricte dans le lemme de Fatou.
• f_n ne tend pas vers 0 dans L^1 et $f_n(x)$ tend vers 0 presque partout.
• $f_n \to 0$ dans L^1 et $f_n(x)$ ne tend pas presque partout vers 0. (On pourra construire une suite de fonctions "bosses roulantes" dont la largeur tend vers zéro, mais qui balaye constamment l'intervalle $[0,1]$.)

Exercice 3 *Convergence L^1 quand il y a "conservation de la masse" (Lemme de Scheffé)*
Montrer que si une suite de fonctions $(w_n)_n \in L^1$ vérifie $w_n \geq 0$, $w_n(x) \to w(x)$ presque partout, $w \in L^1$ et $\int w_n \to \int w$, alors $w_n \to w$ dans L^1. (Indication : écrire $\int w - w_n = \int (w-w_n)^+ - \int (w-w_n)^-$ et $\int |w - w_n| = \int (w-w_n)^+ + \int (w-w_n)^-$ et appliquer le théorème de Lebesgue.)

Exercice 4
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n$, où $\Gamma_n = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Exercice 5
On considère sur $[0,1] \times [1,+\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue, $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Montrer que

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x,y)dydx = \int_0^1 x^{-1}(e^{-x} - e^{-2x})dx > 0$$

et

$$\int_1^\infty \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_1^\infty y^{-1}(e^{-2y} - e^{-y})dy < 0.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

Exercice 6
Si $f \in L^1(\mathbf{R})$, montrer que $\tilde{f}(x) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \in L^1([0,1])$ et que $\int_{[0,1]} \tilde{f}(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx$.

Exercice 7

Calculer la dérivée à droite en zéro de la fonction

$$t \to \int_0^1 (f(x) + t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \varphi(t),$$

où f vérifie $0 \leq f \leq 1$. Indication : pour évaluer la limite du rapport $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$, penser à utiliser le théorème de Lebesgue.

Corrigé

Exercice 2

• Prendre par exemple $f_n(x) = 1$ si $n \leq x \leq n+1$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
• On pose $f_n(x) = n$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Alors $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout $x \in]0,1]$. Par contre, $\int f_n = 1$ et donc f_n ne tend pas vers 0 dans L^1.
• On considère la suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par
$f_1 = 1$ sur [0,1]
$f_2 = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs
$f_3 = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, 0 ailleurs
$f_4 = 1$ sur $[0, \frac{1}{4}]$, 0 ailleurs
$f_5 = 1$ sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs
$f_6 = 1$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, 0 ailleurs...
La formule générale est :
Si $2^{k-1} \leq n < 2^k$, alors $f_n = 1$ sur $[\frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{n+1-2^{k-1}}{2^{k-1}}] = [\frac{n}{2^{k-1}} - 1, \frac{n+1}{2^{k-1}} - 1]$.
Cette suite de fonctions est une "bosse roulante" dont la largeur tend vers zéro, mais qui balaye constamment l'intervalle $[0,1]$. Elle est positive et son intégrale tend vers zéro. Donc $f_n \to 0$ dans L^1. Par contre, $f_n(x)$ ne tend jamais vers 0. En effet, si x est un point de [0,1], on peut poser par division euclidienne $x = \frac{N}{2^{k-1}} + r$, avec $N < 2^{k-1}$ et $r < \frac{1}{2^{k-1}}$. Posons $n = N + 2^{k-1}$, ce qui permet d'écrire x sous la forme $x = \frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}} + r$. On voit que $f_n(x) = 1$, alors que $f_{n+2}(x) = 0$ par exemple. Donc $f_n(x)$ ne converge nulle part !

Exercice 3
Comme $w_n \geq 0$, on a $0 \leq (w - w_n)^+ \leq w \in L^1$ et donc par le théorème de Lebesgue $\int (w-w_n)^+ \to 0$. On déduit de la relation $\int (w-w_n)^+ - \int (w-w_n)^- = \int w - w_n \to 0$ que $\int (w-w_n)^-$ tend aussi vers zéro et finalement que la somme des deux mêmes intégrales $\int |w - w_n| = \int (w-w_n)^+ + \int (w-w_n)^-$ tend vers zéro.

Exercice 4
Notons $\mathbf{I}_{[0,n]}$ la fonction caractéristique de $[0,n]$, qui vaut 1 si $x \in [0,n]$ et 0 ailleurs. Alors
$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \mathbf{I}_{[0,n]}(x) dx.$$
On calcule la limite ponctuelle de l'intégrand :
Comme $(1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \log(1-\frac{x}{n})} \to e^{-x}$ quand $n \to +\infty$, on voit que l'intégrand tend vers $e^{-\frac{x}{2}}$.
Reste à trouver un chapeau intégrable. On sait que $1 + x \leq e^x$, on en déduit que $(1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \mathbf{I}_{[0,n]}(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout $x \geq 0$. On conclut par le théorème de Lebesgue que $\Gamma_n \to \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2$.

Exercice 5
La fonction f n'est pas sommable sinon l'ordre d'intégration serait indifférent.

Exercice 6
Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int_0^1 \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)| = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 |f(x+n)|dx = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} |f(x)|dx = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|dx.$$

La série $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)|$ converge donc pour presque tout x et il en de même pour la série $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$. Celle-ci a $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)|$ comme chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, elle est donc convergente dans L^1 et on obtient la formule demandée.

Exercice 7
On a

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{f(x)^2+t^2}+\sqrt{f^2(x)}}dx = \int_0^1 k_t(x)dx.$$

On voit que $k_t(x) = 1$ si $f(x) = 0$ et $k_t(x) \to 0$ quand $t \to 0$ si $f(x) \neq 0$. Donc $k_t(x) \to \mathbf{I}_{\{f(x)=0\}}$, la fonction caractéristique de l'ensemble des points où $f(x)$ s'annule. Ceci nous donne la limite ponctuelle. Cherchons un chapeau intégrable. On voit immédiatement que $|k_t(x)| \leq 1$. Donc, par le théorème de Lebesgue, $k_t \to \mathbf{I}_{\{f(x)=0\}}$ quand $t \to 0$ dans $L^1(0,1)$. D'où

$$\varphi'(0^+) = \int \mathbf{I}_{\{f(x)=0\}} = \lambda(\{x, f(x)=0\}).$$