Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

Complété d'un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique.
On note C l'ensemble des suites de Cauchy $U = (u_n)_n$ de E.
Le but de l'exercice est de plonger (E, d) dans un espace complet dont la distance prolonge celle de E.

1) a) Soient $U = (u_n)_n$ et $V = (v_n)_n \in C$. Montrer que la suite $(d(u_n, v_n))_n$ converge. On note $\delta(U, V)$ sa limite.
b) Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

2) On considère la relation d'équivalence sur C définie par

$$(U \sim V) \Leftrightarrow (\delta(U, V) = 0).$$

On note $\widehat{E}$ l'espace quotient $C/\sim$ et $\widehat{U}$ la classe d'équivalence dans $\widehat{E}$ de $U \in C$.
a) Quelle est la classe d'équivalence d'une suite convergente dans E ?
b) Montrer que si $U \sim U'$ et $V \sim V'$ alors $\delta(U, V) = \delta(U', V')$. Lorsque $\widehat{U}, \widehat{V} \in \widehat{E}$, le réel $\delta(U, V)$ est donc indépendant du choix des représentants. On le note $\delta(\widehat{U}, \widehat{V})$.
c) Ainsi définie, montrer que δ est une distance sur $\widehat{E}$.
d) Montrer qu'il existe une injection naturelle $i : E \to \widehat{E}$, isométrique et que $i(E)$ est dense dans $\widehat{E}$.

3) Montrer que $\widehat{E}$ est complet. On l'appelle "complété" de E.

4) Unicité du "complété" à isométrie bijective prés :
Soient $(\widehat{E}_1, d_1)$ et $(\widehat{E}_2, d_2)$ deux complétés de E, c'est-à-dire qu'ils sont tous les deux complets et qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans $\widehat{E}_1$ (resp. dans $\widehat{E}_2$), avec $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) dense dans E.
Montrer qu'il existe une unique isométrie φ de $\widehat{E}_1$ dans $\widehat{E}_2$ bijective telle que $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque : Par abus, on identifie souvent E et $i(E)$ dans $\widehat{E}$. Ainsi, $\widehat{E}$ est un espace complet dans lequel E est plongé et sa métrique prolonge celle de E.

Corrigé :

1)a) On montre que la suite $(d(u_n, v_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Pour tous $p, q \in \mathbf{N}$, on a

$$d(u_p, v_p) \leq d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) + d(v_q, v_p),$$

donc, en échangeant le rôle de p et q,

$$|d(u_q, v_q) - d(u_p, v_p)| \leq d(u_p, u_q) + d(v_q, v_p).$$

Les suites U et V étant de Cauchy, on en déduit que $(d(u_n, v_n))_n$ est de Cauchy.
b) Immédiat par passage à la limite puisque d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.
2)a) Soit $U = (u_n)_n$ une suite de E convergeant vers $x \in E$. Une suite convergente est de Cauchy donc $U \in C$. Soit $V = (v_n)_n \in C$. On a

$$U \sim V \Leftrightarrow \delta(U, V) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0.$$

Les inégalités $d(x, v_n) \leq d(x, u_n) + d(u_n, v_n)$ et $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, x) + d(x, v_n)$ montrent que $U \sim V$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(x, v_n) = 0$. Finalement, la classe de U est l'ensemble des suites qui convergent vers x.
b) Si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, comme δ satisfait l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(U, V) \leq \delta(U, U') + \delta(U', V') + \delta(V', V) = \delta(U', V'),$$

de même $\delta(U', V') \leq \delta(U, V)$. Donc $\delta(U, V) = \delta(U', V')$.
c) D'aprés la question 1)b), il suffit de voir que $\delta(\widehat{U}, \widehat{V}) = 0$ si et seulement si $\widehat{U} = \widehat{V}$. Ceci est vrai par construction de la relation d'équivalence.
d) Pour tout $x \in E$, on note $(x) \in C$ la suite constante égale à x. On définit $i : E \to \widehat{E}$ par $i(x) = \widehat{(x)}$. On a

$$\delta(i(x), i(y)) = \delta((x), (y)) = d(x, y),$$

c'est-à-dire i est isométrique, et c'est donc une injection.
Montrons que $i(E)$ est dense dans $\widehat{E}$. Soit $\widehat{U} \in \widehat{E}$ avec $U = (u_n)_n \in C$. Nous allons voir que $\widehat{U}$ est la limite de la suite $(i(u_n))_n$. Soit $\varepsilon > 0$, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc il existe $N > 0$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$. En fixant $p \geq N$, on en déduit

$$\delta(\widehat{U}, i(u_p)) = \delta(U, (u_p)) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

Et c'est vrai pour tout $p \geq N$, donc $\lim_{p\to\infty} i(u_p) = \widehat{U}$.
3) Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de Cauchy de $\widehat{E}$. Comme $i(E)$ est dense, pour tout n, il existe x_n dans E tel que $\delta(\alpha_n, i(x_n)) \leq \frac{1}{n}$. L'inégalité

$$d(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) \leq \delta(i(x_p), \alpha_p) + \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \delta(\alpha_q, i(x_q)) \leq \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E. On note α la classe de $(x_n)_n$ dans $\widehat{E}$. Montrons que $(\alpha_n)_n$ converge vers α dans $\widehat{E}$. Comme

$$\delta(\alpha_n, \alpha) \leq \delta(\alpha_n, i(x_n)) + \delta(i(x_n), \alpha) \leq \frac{1}{n} + \delta(i(x_n), \alpha),$$

il suffit de voir que $\lim_{n\to\infty} \delta(i(x_n), \alpha) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E, donc il existe $N > 0$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$. Alors, si on fixe $n \geq N$,

$$\delta(i(x_n), \alpha) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_p) \leq \varepsilon,$$

et ceci pour tout $n \geq N$, d'où le résultat.
4) On définit l'application φ sur $i_1(E)$ par $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$. Elle est isométrique sur $i_1(E)$ car $\forall x, y \in E$,

$$d_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) = d_2(i_2(x), i_2(y)) = d(x, y) = d_1(i_1(x), i_1(y)).$$

En particulier, φ est uniformément continue sur $i_1(E)$ dense dans E_1 et à valeurs dans E_2 complet. Par le théorème de prolongement, il existe un unique prolongement de φ sur E_1, encore noté φ, qui est uniformément continu sur E_1. Par continuité et densité, il est facile de voir que ce prolongement reste isométrique sur E_1 tout entier. En particulier, φ est injective.
Montrons que φ est surjective. Soient $\beta \in E_2$. Par densité de $i(E_2)$, il existe une suite $(\beta_n = i_2(x_n))_n$ de $i(E_2)$ qui converge vers β. De plus pour tous p, q,

$$d_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = d(x_p, x_q) = d_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) = d_2(\beta_p, \beta_q).$$

La suite $(i_1(x_n))_n$ est donc de Cauchy dans E_1 complet, elle converge vers $\alpha \in E_1$. Comme φ est continue,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

d'où la surjectivité.