Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD Sobolev

Rappel Théorème de Lax-Milgram : Soit H un espace de Hilbert réel.
Soit $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue (i.e. $\exists M > 0$ tel que $\forall u, v \in H$, $|a(u,v)| \leq M \, \|u\| \, \|v\|$) et coercive (i.e. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in H$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$).
Enfin, soit $\ell \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbf{R})$.
Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u,v) = \ell(v)$.

Exercice 1 (p129)
1) Avec les mêmes notations que le cours, on a $\|u\|_{H^m}^2 \leq \|u\|_{W^{m,2}}^2$ et par exemple, pour tout $n \leq m$, $\|u^{(n)}\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^m}$ donc $\|u\|_{W^{m,2}}^2 \leq m \, \|u\|_{H^m}$.
2) Si $I \subset J$ et $u \in W^{n,p}(J)$ alors $u \in L^p(I)$ et pour tout $k \leq n$, $u^{(k)} \in L^p(I)$ donc $u \in W^{n,p}(I)$.

Exercice 2 (p132)
Soit $\tilde{f}$ une forme linéaire continue sur $E \times F$. Par linéarité, on peut poser $\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x,0) + \tilde{f}(0,y) = f(x) + g(y)$. On déduit immédiatement de la continuité de $\tilde{f}$ que f et g sont continues respectivement sur E et F. On peut donc écrire $\tilde{f} = (f, g)$ avec $f \in E'$, $g \in F'$.

Exercice 3 (p132)
1) On a $u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t)dt$. Si $1 \leq p < \infty$, par l'inégalitè de Hölder, on obtient

$$|u(x)| \leq |u(y)| + |x-y|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

On peut intégrer cette relation en y sur un intervalle J contenant x et de mesure 1 par exemple, on obtient alors

$$|u(x)| \leq \int_J |u(y)|dy + \|u'\|_p$$

et à nouveau, par Hölder,

$$|u(x)| \leq \|u\|_p + \|u'\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Dans le cas $p = \infty$, on a $|u(x)| \leq |u(y)| + |x-y| \; \|u'\|_\infty$ et en choisissant comme ci-dessus J de mesure 1, $|u(x)| \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$.

2) Soit f la "distribution" $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \delta_{x_i}$ oĭes points x_i sont dans I alors $| < f, u > | \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} |u(x_i)|$ et d'après la question 1), $| < f, u > | \leq N \|u\|_{W^{1,p}}$ donc f est bien

dans le dual de $W^{1,p}(I)$.
3) Prendre $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $\varphi(0) \neq 0$. Alors si H est la fonction de Heavyside, $(\varphi H)' = \varphi(0)\delta_0 + \varphi' H$. Donc $\delta_0 = \frac{1}{\varphi(0)}((\varphi H)' - \varphi' H)$. Il suffit donc de poser $\varphi H = f$ et $\varphi' H = g$.

Exercice 4
********* PROLONGEMENT *********

Exercice 5 (p133)
Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné alors il existe un prolongement Pu de u dans $W^{1,p}(\mathbf{R})$ et par densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $W^{1,p}(\mathbf{R})$, il existe une suite $(u_n)_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\|Pu - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})} \to 0$. Comme $\|u - u_n\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|Pu - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})}$, il existe bien une suite $(u_n)_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(I)$.

Exercice 6 (p134)
Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné et soit $u \in W_0^{1,p}(I)$, on a par l'inégalité de Hölder et pour $x \in I$,

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'| dt \leq |x - a|^{\frac{1}{p'}} \ \|u'\|_p.$$

Donc $|u(x)|^p \leq (x-a)^{\frac{p}{p'}} \|u'\|_p^p$. En intégrant sur I, on obtient

$$\|u\|_p^p \leq \|u'\|_p^p \int_a^b (x-a)^{\frac{p}{p'}} dx,$$

d'où $\|u\|_p^p \leq \|u'\|_p^p (b-a)^{1+p/p'=p}$.

Exercice 7
On va montrer $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Pour $(i) \Rightarrow (iii)$, on écrit $u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt$ et en appliquant Hölder, on a

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq | \int_x^{x+h} u'|^p \leq h^{\frac{p}{p'}} \|u'\|_{L^p(x,x+h)}^p.$$

Soient ω un ouvert relativement compact dans I et h comme dans l'énoncé , alors

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq h^{\frac{p}{p'}} \int_\omega \int_x^{x+h} |u'|^p dt \, dx.$$

On effectue le changement de variable $t = x + sh$ alors $\int_x^{x+h} |u'|^p dt = h \int_0^1 |u'(x + sh)|^p ds$. Donc

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_\omega \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \, dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_\omega \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds\, dx = \int_0^1 \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p dy\, ds \leq \|u'\|_p^p \int_0^1 ds,$$

d'où

$$\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^p dx \leq |h|^p \|u'\|_p^p.$$

Donc $C = \|u'\|_p$ convient et (iii) est démontré.
Pour $(iii) \Rightarrow (ii)$, soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et $\omega \subset\subset I$ tel que le support de $\varphi \subset \omega$, enfin soit h comme dans l'énoncé, on peut toujours écrire $\int_I (u(x+h)-u(x))\varphi(x)dx = \int_I u(x)(\varphi(x-h)-\varphi(x))dx$. D'autre part, par Hölder, on a

$$|\int_I (u(x+h)-u(x))\varphi(x)dx| \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \|\varphi\|_{L'(\omega)} \leq C|h|\, \|\varphi\|_{p'}.$$

Donc,

$$|\int_I u(x)\frac{(\varphi(x-h)-\varphi(x))}{|h|}dx| \leq C\, \|\varphi\|_{p'},$$

et quand $h \to 0$, on en déduit que $|\int_I u\varphi'| \leq C\, \|\varphi\|_{p'}$.
Enfin pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on considère la forme linéaire $T : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I) \mapsto \int_I u\varphi'$. Elle est continue sur $\mathcal{C}_c^1(I)$ dense dans $L^{p'}(I)$, par le théorème de prolongement (ou bien de Hahn-Banach), elle se prolonge à $L^{p'}(I)$ en une forme linéaire continue sur $L^{p'}(I)$, encore notée T. Par le théorème de Riesz, il existe $f \in L^p(I)$ telle que $T(g) = \int fg$, pour toute $g \in L^{p'}(I)$. En particulier, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $T(\varphi) = \int u\varphi' = \int f\varphi$, donc $u' = -f \in L^p$ et $u \in W^{1,p}(I)$.

Exercice 8
1) En vertu du théorème 10.1 et de la Proposition 10.1 du Chapitre 10, si $u \in H^1(0,1)$ alors $u \in \mathcal{C}[0,1]$ et $\forall x, y \in [0,1]$, $u(x)-u(y) = \int_y^x u'(t)dt$.
Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \|u'\|_2 |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq |u(y)| + \|u'\|_2.$$

On intègre cette inégalité par rapport à y et on applique encore Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_0^1 |u(y)|dy + \|u'\|_2 \\ &\leq \|u\|_2 + \|u'\|_2 \\ &\leq 2\|u\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_{H^1}$ et l'injection $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue.
De $|u(x)-u(y)| \leq \|u'\|_2 |x-y|^{\frac{1}{2}}$, on déduit que la boule unité fermée B_{H^1} de $H^1(0,1)$ est équicontinue. Enfin, $B_x = \{u(x),\ u \in B_{H^1}\} \subset [-2,2]$ donc $\overline{B_x}$ est

compact. Par le théorème d'Ascoli, on en conclut que B_{H^1} est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}[0,1]$, d'où l'injection $id : H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est compacte.

Remarque (+++) :
L'intêret majeur de ce résultat est que de toute suite bornée de $H^1(0,1)$, on peut extraire une sous-suite fortement convergente dans $\mathcal{C}[0,1]$.

2) Soient $u, v \in H_0^1(0,1)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ alors par le théorème 10.2, il existe $u_n, v_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ tels que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ pour la norme H^1. Comme u_n, v_n sont régulières et nulles au bord, on a évidemment $\int_0^1 u_n' v_n + \int_0^1 u_n v_n' = 0$ et $\int_0^1 u_n' f + \int_0^1 u_n f' = 0$. Le produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 fg dx$ étant continu sur $(L^2)^2$, il n'y a aucuns problèmes pour passer à la limite dans ces égalités et on obtient donc

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \displaystyle\int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' & = & 0, \\ (2) & \displaystyle\int_0^1 u'f + \int_0^1 uf' & = & 0, \end{array}$$

et ceci $\forall u, v \in H_0^1(0,1)$.
Si $u \in H^1(0,1)$, on note $p_u(x) = xu(1) + (1-x)u(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ alors $u - p_u \in H_0^1(0,1)$. En appliquant la formule d'intégration par parties (2) à $u - p_u$ et p_u, on obtient

$$\int_0^1 u'f + \int_0^1 uf' = \int_0^1 p_u' f + \int_0^1 p_u f' = u(1)f(1) - u(0)f(0).$$

Maintenant si $u, v \in H^1(0,1)$, alors de $\int_0^1 (u-p_u)'(v-p_v) + \int_0^1 (u-p_u)(v-p_v)' = 0$, on déduit que $\int_0^1 (u-p_u)'v + \int_0^1 (u-p_u)v' = 0$ (car $\int_0^1 (u-p_u)'p_v + \int_0^1 (u-p_u)p_v' = 0$). Donc, en développant,

$$\int_0^1 u'v + \int_0^1 uv' = \int_0^1 p_u' v + \int_0^1 p_u v' = u(1)v(1) - u(0)v(0).$$

Exercice 9
1) Soit $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$, alors a est bilinéaire symétrique et $|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|u\|_2\|u\|_2 \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$ donc a est continue sur $H^1(0,1) \times H^1(0,1)$. Montrons que a est coercive, c'est à dire, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in H^1(0,1)$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$.
On raisonne par l'absurde, sinon, $\forall n$, $\exists u_n \in H^1(0,1)$ tel que $a(u_n,u_n) < \frac{1}{n}\|u_n\|_{H^1}^2$. On peut toujours supposer que $\|u_n\|_{H^1} = 1$. Comme L'injection $H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est compacte, il existe une sous-suite encore notée u_n telle que $u_n \to u$ pour $\|.\|_\infty$ et en particulier $u_n \to u$ dans L^1 et L^2. D'autre part, $\|u_n'\|_2 < \frac{1}{n} \Longrightarrow u_n' \to 0$ dans L^2, donc finalement u_n est de Cauchy dans $H^1(0,1)$ donc converge et $\exists v \in H^1(0,1)$ tel que $u_n \to v$ dans $H^1(0,1)$. Alors, $\|v\|_{H^1} = 1$ et $v' = 0$ p.p.

D'après l'exercice 9 chap.9, v est constante. Enfin, de $\left(\int_0^1 u_n\right)^2 < \frac{1}{n}$ et $u_n \to v$ dans L^1, on déduit que $\int_0^1 v = 0$ donc nécessairement $v = 0$ or $\|v\|_{H^1} = 1$, c'est absurde.
D'après le théorème de Lax-Milgram (cf Rappel), il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv, \forall v \in H^1(0,1)$.
2) Comme $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(0,1)$, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, $a(u,\varphi) = \int_0^1 f\varphi =< f,\varphi >$ en terme de distributions. Et,

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= \int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 \left(\int_0^1 u\right)\varphi, \\ &= < u',\varphi' > + < \int_0^1 u,\varphi >, \\ &= - < u'',\varphi > + < \int_0^1 u,\varphi > . \end{aligned}$$

D'où $< -u'' + \int_0^1 u - f, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, donc $-u'' + \int_0^1 u = f$ au sens des distributions, mais $f \in L^2(0,1)$ et $\int_0^1 u \in L^2(0,1)$ montre que $u \in H^2(0,1)$ et vérifie

$$(\star) \qquad - u'' + \int_0^1 u = f \quad \text{p.p.}$$

Pour trouver les conditions aux limites, on multiplie $(\star)$ par $v \in H^1(0,1)$ et on intègre sur $(0,1)$ alors $-\int_0^1 u''v + \left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 v\right) = \int_0^1 fv$. Comme $u \in H^2$ et $v \in H^1$, l'exercice précèdent nous permet de faire une intégration par parties et on obtient $a(u,v) - \int_0^1 fv = [u'v]_0^1$.
Or u est solution de la formulation variationnelle (c'est-à-dire $a(u,v) = \int_0^1 fv$, $\forall v \in H^1(0,1)$), donc $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$ et ceci $\forall v \in H^1(0,1)$. Donc nécessairement $u'(1) = u'(0) = 0$.
D'où u est solution du problème suivant, $u \in H^2(0,1)$ et

$$\begin{cases} -u'' + \int_0^1 u &= f \quad \text{p.p.} \\ u'(1) = u'(0) &= 0 \end{cases}$$

Et réciproquement.

Exercice 10
Soit $V = \{u \in H^1(0,1) \,:\, u(\frac{1}{2}) = 0\}$.
1) Comme $id \,:\, H^1(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ est continue, $u \mapsto u\left(\frac{1}{2}\right)$ est continue sur $H^1(0,1)$ et V est fermé dans $H^1(0,1)$.
$\|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur V et si pour un $v \in V$, $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors, d'après l'exercice 9 chap. 9, v est constante sur $(0,1)$ et de $v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on en déduit que $v = 0$. Donc, on a bien à faire à une norme sur V. On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}$.

Pour l'autre sens, on utilise $u(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} u'dt$ car $u(\frac{1}{2}) = 0$. On applique Cauchy-Schwarz, on obtient $|u(x)|^2 \leq |x - \frac{1}{2}| \, \|u'\|_2^2 \leq \|u'\|_2^2$. On intègre sur $(0, 1)$, on a $\|u\|_2 \leq \|u'\|_2$. Les deux normes sont donc bien équivalentes sur V.
2) Soit $a(u, v) = \int_0^1 u'v'$, alors a est une forme bilinéaire symétrique continue sur V et $v \mapsto v(0)$ est continue sur V puisque $id : H^1(0, 1) \longrightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ est continue sur $H^1(0, 1)$. Du théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u, v) = v(0), \forall v \in V$.
3) $\mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[) \not\subset V$ donc on ne peut pas exactement raisonner comme dans l'exercice précèdent, mais on peut remarquer que $\mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[) \cup \mathcal{C}_c^\infty(]\frac{1}{2}, 1[) \subset V$ (en prolongeant ces fonctions par 0 à $]0, 1[$ tout entier).
Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[)$ alors $a(u, \varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} u'\varphi' = \varphi(0) = 0$, c'est à dire $< u', \varphi' >= 0 = - < u'', \varphi >$ et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, \frac{1}{2}[)$, donc $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]0, \frac{1}{2}[)$ et donc dans $L^2(0, \frac{1}{2})$.
On obtient par un même raisonnement, $u'' = 0$ dans $\mathcal{D}'(]\frac{1}{2}, 1[)$ et donc dans $L^2(\frac{1}{2}, 1)$. Donc finalement $u \in H^2(0, \frac{1}{2}) \cap H^2(\frac{1}{2}, 1)$. On peut alors faire des intégrations par parties sur les deux sous-intervalles $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 1)$. Si $v \in V$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^{\frac{1}{2}} u''v &= \int_0^{\frac{1}{2}} u'v' - [u'v]_0^{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\frac{1}{2}} u'v' + u'(0)v(0), \\ 0 &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 u''v &= \int_{\frac{1}{2}}^1 u'v' - [u'v]_{\frac{1}{2}}^1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 u'v' - u'(1)v(1). \end{aligned}$$

On ajoute ces deux égalités, alors $a(u, v) + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = 0 \Longrightarrow (1 + u'(0)) \, v(0) = u'(1)v(1), \ \forall v \in V$. Donc nécessairement $u'(0) = -1$ et $u'(1) = 0$. Donc on a résolu

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'' & = & 0 \text{ sur } (0, \frac{1}{2}) \\ u\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \\ u'(0) & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u'' & = & 0 \text{ sur } (\frac{1}{2}, 1) \\ u\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \\ u'(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

de solutions respectives :

$$\begin{aligned} u(x) &= -x + \frac{1}{2} \quad \text{sur } [0, \frac{1}{2}] \\ u(x) &= 0 \quad \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

On voit tout de suite que $u \notin H^2(0, 1)$ (sinon elle serait $\mathcal{C}^1$).
Au sens des distributions, il est clair que $u' = -\mathbf{I}_{(0, \frac{1}{2})} \in L^2(0, 1)$ et que $u'' = \delta_{\frac{1}{2}} \notin L^2(0, 1)$.

Exercice 11
$v \rightarrow \|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur $H^1(0, +\infty)$. Si $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors $v' = 0$ p.p. et donc v est une constante. Or la seule constante de $L^2(0, +\infty)$ est la constante nulle donc c'est bien une norme sur $H^1(0, +\infty)$. On a évidemment

$\|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$.
Soit $u_n(x) = n - x$ si $x \leq n$ et $u_n(x) = 0$ sinon. Alors $u_n \in H^1(0, +\infty)$, $\|u_n'\|_{L^2}^2 = n$ et $\|u_n\|_{L^2}^2 = \frac{n^3}{3}$ donc les deux normes ne peuvent pas être équivalentes sur $H^1(0, +\infty)$.

Exercice 12

1) Par le théorème des accroissements finis, il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in H^1(I)$, $|f(u)| \leq |f(0)| + C\,|u| \in L^2(I)$ donc $f(u) \in L^2(I)$.
2) Soit $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ tel que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$.
a) De la même façon, on a : $|f(u_n) - f(u)| \leq C\,|u_n - u|$ donc $u_n \to u$ dans $L^2(I)$ $\Longrightarrow f(u_n) \to f(u)$ dans $L^2(I)$.
b) On a $|\alpha_n| \leq C\,|u_n' - u'|$ donc $u_n' \to u'$ dans $L^2(I) \Longrightarrow \alpha_n \to 0$ dans $L^2(I)$. Comme $u_n \to u$ dans $L^2(I)$, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \to u$ p.p. (voir réciproque du TCD). Par continuité de f', $f'(u_n) \to f'(u)$ p.p. D'où finalement,

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{n_k} \to 0 \quad \text{p.p.} \\ |\beta_{n_k}| \leq 2\|f'\|_\infty |u'| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta_{n_k} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée.
c)Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, alors

$$(\star) \qquad \int_I f(u_n)\varphi' = -\int_I f'(u_n)u_n'\varphi,$$

puisque toutes les fonctions considérées sont assez régulières. Comme $f(u_n) \to f(u)$ dans $L^2(I)$, $\int_I f(u_n)\varphi' \longrightarrow \int_I f(u)\varphi'$.
D'autre part, $f'(u_n)u_n' - f'(u)u' = \alpha_n + \beta_n$ donc

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_n \to 0 \text{ dans } L^2(I) & \Longrightarrow & \int_I \alpha_n\varphi \longrightarrow 0 \\ \beta_{n_k} \to 0 \text{ dans } L^2(I) & \Longrightarrow & \int_I \beta_{n_k}\varphi \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_I (\alpha_{n_k} + \beta_{n_k})\varphi \longrightarrow 0.$$

D'où en passant à la limite dans $(\star)$, pour une sous-suite, on obtient :

$$\int_I f(u)\varphi' = -\int_I f'(u)u'\varphi,$$

et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Or $f'(u)u' \in L^2(I)$ car $f' \in L^\infty(I)$ et $u' \in L^2(I)$, donc $f(u) \in H^1(I)$ et $(f(u))' = f'(u)u'$.
3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé, $f_\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$ par valeurs positives, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. De plus, si $t > 0$, $f_\varepsilon'(t) = \frac{t}{\sqrt{(t^2+\varepsilon^2)}} \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$, donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Enfin, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t \in \mathbf{R}$, $|f_\varepsilon'(t)| \leq 1$ donc $f_\varepsilon \in E$ et $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t$, $|f_\varepsilon(t)| \leq |t|$.
Quand $\varepsilon \to 0$, $f_\varepsilon(t) \to 0$ si $t \leq 0$ et $f_\varepsilon(t) \to t$ si $t \geq 0$ donc $f_\varepsilon(t) \to t^+$. D'où

$$\left.\begin{array}{l} f_\varepsilon(u) \to u^+ \text{ p.p.} \\ |f_\varepsilon(u)| \leq |u| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_\varepsilon(u) \longrightarrow u^+ \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée.
4) D'après 2), $f_\varepsilon(u) \in H^1(I)$ et $\forall \varepsilon > 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' = -\int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi$.
On sait que $f_\varepsilon(u) \to u^+$ dans $L^2(I)$ donc $\int_I f_\varepsilon(u)\varphi' \longrightarrow \int_I u^+\varphi'$. D'autre part,

$$\left.\begin{array}{rcll} f'_\varepsilon(t) & = & \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & t > 0 \\ & = & 0, & t \le 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right\} = \mathbf{I}_{[t>0]},$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} f'_\varepsilon(u) \to \mathbf{I}_{[u>0]} \text{ p.p.} \\ |f'_\varepsilon(u)u'| \le |u'| \in L^2(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'_\varepsilon(u)u' \longrightarrow \mathbf{I}_{[u>0]}u' \text{ dans } L^2(I),$$

par le théorème de convergence dominée. D'où

$$\int_I f'_\varepsilon(u)u'\varphi \longrightarrow \int_I \mathbf{I}_{[u>0]}u'\varphi.$$

A la limite, on obtient : $\int u^+\varphi = -\int \mathbf{I}_{[u>0]}u'\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, donc $u^+ \in H^1(I)$ et $(u^+)' = \mathbf{I}_{[u>0]}u'$.
5) On a $u^- = (-u)^+$ donc $u^- \in H^1(I)$, $(u^-)' = -\mathbf{I}_{[u<0]}u'$ et $|u| = u^+ + u^- \in H^1(I)$.
(La démonstration est la même en dim> 1, en remplaçant u' par $\frac{\partial}{\partial x_i}u$.)

Exercice 13
Soit N une norme dérivant d'un produit scalaire, alors N^2 est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée seconde est une forme bilinéaire symétrique définie positive (c'est à une constante positive près le produit scalaire) donc N^2 est strictement convexe.
Une norme est convexe et non strictement convexe car $N(tu) = tN(u)$ si $t > 0$.

Exercice 14
On note $H_0^1(0,1) = \{u \in H^1(0,1) \,:\, u(0) = u(1) = 0\}$.
1) Si $u \in H_0^1(0,1)$ alors on peut écrire $u(x) = \int_0^x u'(t)dt$. En appliquant Cauchy-Schwarz, on en déduit que $|u(x)| \le \sqrt{x}\|u'\|_2$. On élève cette dernière inégalité au carré et on intègre, on obtient alors $\|u\|^2 \le \frac{1}{2}\|u'\|_2^2$, d'où $\|u'\|_2^2 \le \|u\|_{H^1}^2 \le \frac{3}{2}\|u'\|_2^2$. On en conclut que $(H_0^1(0,1), \|u'\|_2)$ est un espace de Hilbert.
2) Si $v \in H^1(0,1)$ alors $v \in L^2 \cap L^\infty$ car $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$. Donc $v \in L^q$, $\forall q \ge 2$ et $F(v)$ a bien un sens. Comme $|\int_0^1 fv| \le \|f\|_2\|v\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2$ si $v \in H_0^1(0,1)$, il existe $C > 0$ tel que $F(v) \ge \frac{1}{2}\|v'\|_2^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|v'\|_2 \ge C$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$. Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante. On note $m = \inf F$. Alors par exemple, $\forall n$, $m \le F(u_n) \le m + \frac{1}{n} \le m + 1$. En particulier, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(0,1)$. En effet de

$$\frac{1}{2}\|u'_n\|_2^2 + \frac{1}{4}\|u_n\|_4^4 - \int_0^1 fu_n = F(u_n) \le m + 1,$$

on tire

$$\frac{1}{2}\|u'_n\|_2^2 \le m + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|u'_n\|_2,$$

qui est un trinôme du 2nd degré en $\|u_n'\|_2$ (avec le bon signe), donc $\|u_n'\|_2$ est bornée. Comme $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$ avec injection compacte, il existe une sous-suite encore notée, $(u_n)_n$ qui converge uniformément dans $\mathcal{C}[0,1]$, donc dans L^2 et L^4, vers une limite u. Par la proposition 5.3 p 71, on a $\|u'\|_2 \leq \liminf \|u_n'\|_2$. (NB : c'est la même limite u en passant aux distributions). On prend maintenant les liminf dans

$$m \leq \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2 + \frac{1}{4}\|u_n\|_4^4 - \int_0^1 f u_n \leq m + \frac{1}{n},$$

on obtient $F(u) = m$. D'où u réalise l'inf de F. L'unicité provient du fait que F est strictement convexe car le terme $\|v'\|_2^2$ l'est d'après l'exercice précédent.
3) Soient $t > 0$ et $v \in H_0^1(0,1)$ alors $F(u+tv) - F(u) \geq 0$ donc

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv + t\,\mathcal{O}(1) \geq 0.$$

Quand $t \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv \geq 0,$$

et en changeant v en $-v$,

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv = 0,$$

pour tout $v \in H_0^1(0,1)$.
4) En particulier, comme $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[) \subset H_0^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u^3\varphi = \int_0^1 f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[).$$

On utilise maintenant le fait que u', u^3, f sont dans L^1_{loc} et définissent des distributions pour écrire que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u'\varphi' &= <u', \varphi'> = -<u'', \varphi>, \\
\int_0^1 u^3\varphi &= <u^3, \varphi>, \\
\int_0^1 f\varphi &= <f, \varphi>,
\end{aligned}$$

et donc $< -u'' + u^3 - f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$. D'où $-u'' + u^3 = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. Comme f et u^3 sont dans $L^2(I)$, on en déduit que $u'' \in L^2(I)$ donc légalité a lieu p.p et $u \in H^2(0,1)$.

5) Comme F est convexe, on a : $\forall t \in]0,1]$, $F(u+t(v-u)) \leq F(u) + t[F(v) - F(u)]$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$. Donc

$$\frac{F(u+t(v-u)) - F(u)}{t} \leq F(v) - F(u), \quad \forall t > 0.$$

On a vu en 3) que

$$\frac{F(u+t(v-u)) - F(u)}{t} = \int_0^1 u'(v-u)' + \int_0^1 u^3(v-u) - \int_0^1 f(v-u) + t\,\mathcal{O}(1).$$

Comme $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ et $v \in H_0^1(0,1)$, on a $\int_0^1 u'(v-u)' = -\int_0^1 u''(v-u)$ donc

$$\frac{F(u+t(v-u)) - F(u)}{t} = \int_0^1 (\underbrace{-u'' + u^3 - f}_{=0})(v-u) + t\mathcal{O}(1), \quad \forall t > 0.$$

En particulier, $F(v) - F(u) \geq t\mathcal{O}(1)$ et quand $t \to 0$, on obtient $F(v) \geq F(u)$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$. Donc u est solution de $(\star)$.
6) On suppose que $f \geq 0$ p.p. Si u est solution de $(\star)$ alors on a vu que $\forall v \in H_0^1(0,1)$, $\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv$. On choisit $v = u^- = -\inf(0,u)$ alors $v \in H_0^1(0,1)$ (voir l'exercice 12), $v \geq 0$ et on obtient $-\int_0^1 (u^-)'^2 - \int_0^1 (u^-)^4 = \int_0^1 fu^- \geq 0$. On en déduit par exemple que $\int_0^1 (u^-)^4 \leq 0$ et donc que $u^- = 0$ p.p. D'où $u \geq 0$ p.p.

Exercice 15
1) V est un sous-espace vectoriel de $H^1(0,1)$. On pose $L(v) = v(0) - kv(1)$ alors $|L(v)| \leq (1+|k|)\sup_{[0,1]}|v(x)|$. Comme $H^1(0,1)$ s'injecte de façon continue dans $\mathcal{C}([0,1])$, $\exists C$ constante telle que $\forall v \in H^1(0,1)$, $\sup_{[0,1]}|v(x)| \leq \|v\|_{H^1}$. Donc $|L(v)| \leq (1+|k|)C\|v\|_{H^1}$. Ainsi V, noyau d'une forme linéaire continue, est fermé.
2) Pour $v \in H^1(0,1)$, on écrit que $v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)dt$. En particulier si $v \in V$ alors $v(1) = kv(1) + \int_0^1 v'(t)dt$. Donc,

$$|1-k|\ |v(1)| \leq \int_0^1 |v'(t)|dt \leq \|v'\|_2,$$

par Cauchy-Schwarz. Alors,

$$|v(1)| \frac{1}{|1-k|}\|v'\|_2 \text{ et } |v(0)| \leq \frac{|k|}{|1-k|}\|v'\|_2.$$

D'où

$$|v(x)| \leq \left(1 + \frac{|k|}{|1-k|}\right)\|v'\|_2,$$

et $\|v\|_\infty \leq C\|v'\|_2$.
3) $a(.,.)$ est clairement bilinéaire et symétrique. Soit $v \in V$, comme $\left(\int_0^1 v\right)^2 \leq$

$\int_0^1 |v|^2$, on a $a(v,v) \geq \|v'\|_2^2 \geq 0$. Si $a(v,v) = 0$ alors $\|v'\|_2 = 0$ et d'après 2), $\|v\|_\infty = 0$ donc $v = 0$. On en conclut que $a(.,.)$ est bien un produit scalaire sur V.
Soit $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$. On a évidemment $\|v\|_a^2 \leq \|v\|_{H^1}^2$.
D'autre part si $v \in V$, $\|v\|_2 \leq \|v\|_\infty \leq C\|v'\|_2$ par 2). Donc,

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2 \leq (C^2+1)\|v'\|_2^2 \leq \|v\|_a^2.$$

D'où,

$$\left(\frac{1}{C^2+1}\right)\|v\|_{H^1}^2 \leq \|v\|_a^2 \leq \|v\|_{H^1}^2,$$

et les deux normes sont équivalentes.
4) Soit $\ell(v) = \int_0^1 fv$, alors ℓ est une forme linéaire sur V. Et

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_2 \, \|v\|_2 \leq (C^2+1)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2 \, \|v\|_a,$$

montre que ℓ est continue sur V pour $\| \ \|_a$.
V est fermé dans H^1 donc complet pour la norme H^1. Par équivalence des normes, on déduit que $(V, a(.,.))$ est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz s'applique à ℓ donc il existe un unique $u \in V$ tel que $\ell(v) = a(u,v), \forall v \in V$.
5) Soit u solution de $(\star)$ alors :

$$\forall v \in V, \qquad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 \left(f - u + \int_0^1 u\right) v.$$

En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$,

$$< -u'', \varphi >= \int_0^1 u'\varphi' = \int_0^1 \left(f - u + \int_0^1 u\right)\varphi =< \left(f - u + \int_0^1 u\right), \varphi >,$$

donc $-u'' = f - u + \int_0^1 u$ au sens des distributions. Comme $f,\ u,\ \int_0^1 u \in L^2$, on a $u'' \in L^2$ donc $u \in H^2(0,1)$ et $-u'' = f - u + \int_0^1 u$ p.p. $(\star\star)$.
Si $v \in V$, comme $u \in H^2$, on peut intégrer par parties et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 u'v' &= -\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0),\\ &= -\int_0^1 u''v + (u'(1) - ku'(0))v(1).\end{aligned}$$

Alors, en tenant compte de l'équation $(\star\star)$, $a(u,v) = \int_0^1 fv \Longrightarrow (u'(1)-ku'(0))v(1) = 0$ et ceci pour tout $v \in V$, donc nécessairement $u'(1) = ku'(0)$. Les conditions aux limites satisfaites par u sont donc

$$(\star\star\star) \quad \begin{cases} u'(1) = ku'(0) \\ u(0) = ku(1).\ (u \in V) \end{cases}$$

Et réciproquement, si $u \in H^2(0,1)$ satisfait l'équation $(\star\star)$ et les conditions aux limites $(\star\star\star)$ ci-dessus, alors u vérifie $(\star)$.

6) On a vu en 2) que $|u_n(x)|^2 \leq \left(1 + \frac{|k_n|}{|1-k_n|}\right) \|u'_n\|_2^2$ avec $k_n \neq 1$. La suite $\left(1 + \frac{|k_n|}{|1-k_n|}\right)_n$ est bornée et non nulle car elle converge vers $1+\frac{|k|}{|1-k|}$. Donc $\exists M > 0$ tel que $\|u_n\|_2^2 \leq M \ \|u'_n\|_2^2, \forall n$. De plus,

$$\frac{1}{M}\|u_n\|_2^2 \leq \|u'_n\|_2^2 \leq |a(u_n, u_n)| = |\int_0^1 fu_n| \leq \|f\|_2 \ \|u_n\|_2.$$

Donc,

$$\begin{array}{lllll} \|u_n\|_2^2 & \leq & M \ \|f\|_2 \ \|u_n\|_2 & \leq & M \ \|f\|_2 \ \|u_n\|_{H^1} \text{ et} \\ \|u'_n\|_2^2 & \leq & \|f\|_2 \ \|u_n\|_2 & \leq & \|f\|_2 \ \|u_n\|_{H^1}. \end{array}$$

Donc $\|u_n\|_{H^1}^2 \leq (M+1)\|f\|_2 \ \|u_n\|_{H^1}$ d'où la suite $(u_n)_n$ est bornée dans H^1.
7) Comme H^1 est réflexif, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_p})_p$ convergeant faiblement dans H^1 vers $u\star$. Avec l'injection compacte de $H^1(0,1)$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ (voir l'exercice ci-dessus), on en déduit que $u_{n_p} \to u\star$ uniformément sur $[0,1]$. Comme $u_{n_p} \in V_{n_p}$, $u_{n_p}(0) = k_{n_p}u_{n_p}(1)$ et chaque terme converge. A la limite, on a $u\star(0) = ku\star(1)$ donc $u\star \in V$.
8) On vérifie facilement que $v_n \in V_n$ et $|v_n(t) - v(t)|^2 = |\frac{k-k_n}{k_n-1}| \, |v(1)|^2$. Donc $\|v_n - v\|_2^2 = |\frac{k-k_n}{k_n-1}| \, |v(1)|^2 \to 0$. D'autre part, $v'_n = v'$ donc $v_n \to v$ dans H^1. Comme $u_{n_p} \rightharpoonup u\star$ dans H^1 faible et $v_{n_p} \to v$ dans H^1 fort, $(u_{n_p}, v_{n_p})_{H^1} \to (u\star, v)_{H^1}$. Les autres termes de $(\star)_{n_p}$ passent à la limite sans problèmes et on obtient $a(u\star, v) = \int_0^1 fv$, ceci $\forall v \in V$, par unicité de u, $u\star = u$.
9) Comme $u_{n_p} \to u$ uniformément sur $[0,1]$, $\left(\int_0^1 (u_{n_p} - u)\right)^2 \to 0$. D'autre part, on peut écrire $a(u_{n_p} - u, u_{n_p} - u) = \int_0^1 fu_{n_p} - 2a(u_{n_p}, u) + a(u,u)$ et chaque terme converge car u_{n_p} converge faiblement dans H^1. Donc,

$$\|u_{n_p} - u\|_{H^1}^2 = a(u_{n_p} - u, u_{n_p} - u) + \left(\int_0^1 (u_{n_p} - u)\right)^2 \to \int_0^1 fu - a(u,u) = 0.$$

10) Sinon, $\exists A > 0$, il existe une sous-suite $(u_{n_p})_p$ telle que $\|u_{n_p} - u\|_{H^1} \geq A > 0$. On sait alors qu'il existe une sous-suite de $(u_{n_p})_p$, encore notée $(u_{n_p})_p$, qui converge vers u dans H^1 faible. Comme en 9), on montre qu'en fait, elle converge fortement vers u dans H^1, d'où contradiction.
11) T est bien définie et linéaire par unicité de la solution de $(\star)$ et par symétrie de a, on a $\int_0^1 fTg = \int_0^1 gTf$. Vérifions que T est continue. Par 3), $\exists C > 0$ tel que $\forall u \in V$, $C \ \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u,u)$ donc en choisissant $u = Tf$, on obtient : $C \ \|Tf\|_{H^1}^2 \leq \int_0^1 fTf \leq \|f\|_2 \ \|Tf\|_2$. Comme $\| \ \|_2 \leq \| \ \|_{H^1}$, on en déduit que $\|Tf\|_2 \leq \frac{1}{C}\|f\|_2$ et T est continue.
Pour montrer que T est compacte, on va utiliser le critère démontré dans l'exercice L^2 étant réflexif, il suffit de montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans L^2 faible, $Tf_n \to Tf$ dans L^2 fort. Comme $C \ \|Tf_n\|_{H^1}^2 \leq \|f_n\|_2 \ \|Tf_n\|_{H^1}$, on en déduit que $(Tf_n)_n$ est bornée dans $H^1(0,1)$ réflexif, donc il existe une sous-suite $(Tf_{n_k})_k$ qui converge

faiblement vers un $g \in H^1$. Alors $Tf_{n_k} \to g$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ et donc dans L^2 fortement et faiblement. Comme T est linéaire continue, on en déduit que $g = Tf$ Donc toute la suite $(Tf_n)_n$ converge vers Tf dans L^2.