Mathématiques | Analyse
ENS de Cachan | S.Fabre 2009-2010

DM 1 Topologie à rendre le

Bibliographie recommandée : poly analyse, J.Dixmier "topologie générale", G.Choquet "cours de topologie".

**Exercice 1**
Soit $E$ un espace topologique. Pour $A \subset E$ on note $\overline{A}$ le plus petit fermé de $E$ contenant $A$,

$$\text{Intérieur}(A) = \{x \in A : \exists U \text{ ouvert tel que } x \in U \subset A\}$$

et

$$\text{adh}(A) = \{x \in E : x \text{ est adhérent à } A\} = \{x \in E : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}.$$

Vérifier que $E \setminus \text{adh}(A) = \text{Intérieur}(E \setminus A)$.
Montrer que $\overline{A}$ et l'adhérence de $A$ sont identiques et que la relation $A = \overline{A}$ caractérise les ensembles fermés.

**Exercice 2** Théorèmes du point fixe
1) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne avec k<1. Montrer que f admet un unique point fixe $x = f(x)$.
2) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $\Lambda$ un espace topologique. Soit $f : E \times \Lambda \to E$ telle que
- $\forall x \in E, \quad \lambda \to f(x, \lambda)$ est continue de $\Lambda$ dans E,
- $\exists k < 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad x \to f(x, \lambda)$ est k-lipschitzienne de E dans E. On pose $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$. Si $a_\lambda$ est l'unique point fixe de $f_\lambda$, montrer que $\lambda \to a_\lambda$ est continue de $\Lambda$ dans E.
3) Soit C un convexe compact dans E espace vectoriel normé et soit $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe ( pour z fixé dans C, considérer $f_n(x) = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}f(x)$).

**Exercice 3**
Soit $E$ un e.v.n. de dimension finie, montrer que $E$ est séparable.

**Exercice 4**
Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On munit $E$ de la norme $\|.\|_\infty$. On souhaite montrer ici que $E$ n'est pas séparable.
On note $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites constituées de 0 ou 1.
1) Montrer que $A$ n'est pas dénombrable (raisonner par l'absurde).
2) Vérifier que $\forall z = (z_n)_n \in A$, il existe $f_z \in E$ telle que $f_z(n) = z_n$, $\forall n$, $0 \leq f_z(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et telle que $z \neq t \Rightarrow \|f_z - f_t\|_\infty = 1$.
3) Supposer qu'il existe une suite $(g_n)_n$ dense dans $E$ et construire une injection de $A$ dans $\mathbb{N}$. Conclure.

**Exercice 5** Théorème de Weierstrass
Soit $Q_n(t) = c_n(1 - t^2)^n$ sur $[-1, 1]$ où $c_n$ est choisi pour que $\int_{-1}^{1} Q_n dt = 1$.
1) Vérifier que (faire un dessin)

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nt^2) dt,$$

et en déduire que $c_n < \sqrt{n}$.
2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et on prolonge $f$ et $Q_n$ par 0 à $\mathbb{R}$ tout entier.
On pose $P_n(x) = f * Q_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.
Vérifier que $P_n$ est polynômial et montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.
3) Montrer que les polynômes à coefficients réels sont denses dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. C'est le théorème de Weierstrass.
4) En déduire que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est séparable.