Mathématiques
ENS de Cachan

Analyse Fonctionnelle
S.Fabre 2008-2009

Devoir 1 : Exercices de Topologie

Bibliographie recommandée : poly analyse, J.Dixmier "topologie générale", G.Choquet "cours de topologie".

Exercice 1
Soit E un espace topologique "grossier" i.e. les ouverts de E sont $\{\emptyset, E\}$. Montrer que si E contient plus d'un élément, il n'est pas séparé.

Exercice 2
Soit E un espace topologique compact, montrer que toute suite de points de E possède une valeur d'adhérence.

Exercice 3 Soit E un espace métrique alors montrer que
1) l'espace E est séparé,
2) si A est une partie de E et si $x \in E$ alors $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to x$.

Exercice 4 Continuité séquentielle
Si E et F sont des espaces métriques, montrer que $f : E \to F$ est continue si et seulement si elle est *séquentiellement continue*, c'est-à-dire si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Exercice 5 Valeur d'adhérence dans un espace métrique
Soient E un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de points de E et $x \in E$. Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers x.

Exercice 6
1) Soient E un espace topologique compact et F un espace topologique séparé. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(E)$ est compact.
2) Soient E un espace métrique compact et F un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 7
Soient E un espace vectoriel réel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé
1) Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
2) Soit $u : E \to F$ linéaire, montrer que u est continue.

Exercice 8
Soit $E = \mathbb{Q}\,[\sqrt{2}] = \left\{\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}, \mathrm{a} \in \mathbb{Q}\ , \mathrm{b} \in \mathbb{Q}\ \right\}$. On définit sur E, $N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_1(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|)$.
a) Vérifier que N_0 et N_1 sont des normes sur E.
Soit $x = \sqrt{2} - 1$, montrer que $\forall n \geq 1$, $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$. En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.
b) Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes sur E.
c) E est pourtant un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie, commenter.

Exercice 9
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.
Montrer que si F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet (donc $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est toujours complet).

Exercice 10 Théorème de prolongement

Théorème 1 *Soient E un espace métrique et F un espace métrique complet. Soit $X \subset E$, une partie dense dans E. Enfin soit $f : X \to F$ uniformément continue. Montrer qu'il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f, continu. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

Démontrer ce théorème.

Exercice 11
Soit E un e.v.n. de dimension finie, montrer que E est séparable.

Exercice 12 Théorèmes du point fixe
1) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne avec k<1. Montrer que f admet un unique point fixe $x = f(x)$.
2) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit Λ un espace topologique. Soit $f : E \times \Lambda \to E$ telle que
- $\forall x \in E, \quad \lambda \to f(x,\lambda)$ est continue de Λ dans E,
- $\exists k < 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad x \to f(x,\lambda)$ est k-lipschitzienne de E dans E. On pose $f_\lambda(x) = f(x,\lambda)$. Si a_λ est l'unique point fixe de f_λ, montrer que $\lambda \to a_\lambda$ est continue de Λ dans E.
3) Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x,y \in E, \qquad d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.
4) Soit C un convexe compact dans E espace vectoriel normé et soit $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe (pour z fixé dans C, considérer $f_n(x) = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}f(x)$).

Exercice 13
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.
a) Vérifier que N est une norme sur E.
b) Montrer que $\exists C > 0$ telle que pour toute f dans E, $\|f\|_\infty \leq C\, N(f)$.
c) Montrer que $\| \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 14 Théorème de Weierstrass
Soit $Q_n(t) = c_n(1-t^2)^n$ sur $[-1,1]$ où c_n est choisi pour que $\int_{-1}^1 Q_n dt = 1$.
1) Vérifier que (faire un dessin, ça suffit)

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nt^2) dt,$$

et en déduire que $c_n < \sqrt{n}$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et on prolonge f et Q_n par 0 à $\mathbb{R}$ tout entier. On pose $P_n(x) = f * Q_n(x)$ pour $x \in [0,1]$, où $*$ désigne le produit de convolution.

Vérifier que P_n est polynômial et montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Montrer que les polynômes à coefficients réels sont denses dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. C'est le théorème de Weierstrass.

4) En déduire que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est séparable.

A Lire :

Théorème 2 ***Soit E un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :***
(i) L'espace E est compact.
(ii) Toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence.
(iii) Toute suite de points de E a une sous-suite convergente.

Démonstration :
On a déjà vu $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ dans ce devoir. Il reste à voir $(iii) \Rightarrow (i)$.
Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E, on montre

1) $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in E$, $\exists i \in I$, tel que $B(x,r) \subset O_i$.

2) E est recouvert par un nombre fini de O_i. Démontrons le point 1) par l'absurde, si pour tout $r > 0$, il existe x_r tel que, pour tout i, $B(x_r, r) \not\subset O_i$, en choisissant $r = \frac{1}{n}$, on construit une suite $(x_n)_n$ telle que $\forall i$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$. Par hypothèse, il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ convergeant vers un x dans E. D'autre part, il existe i tel que $x \in O_i$ ouvert donc pour un certain N, $B(x, \frac{1}{N}) \subset O_i$. Enfin, $\exists n \geq 2N$ tel que $x_n \in B(x, \frac{1}{2N})$. Alors

$$B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \frac{1}{2N}) \subset B(x, \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}) \subset O_i,$$

ce qui est absurde.
Démontrons le point 2).
Soit $y_1 \in E$, $\exists i_1$ tel que $B(y_1, r) \subset O_{i_1}$. Si $E = O_{i_1}$, c'est fini.
Sinon, $\exists y_2 \in E \setminus O_{i_1}$ et $\exists i_2$ tels que $B(y_2, r) \subset O_{i_2}$. Si $E = O_{i_1} \cup O_{i_2}$, c'est fini, sinon $\exists y_3 \in E \setminus (O_{i_1} \cup O_{i_2})$ etc... Si le processus s'arrête, E est compact. Sinon, il existe une suite $(y_n)_n$ dans E telle que $y_n \notin O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_{n-1}}$ et donc $y_n \notin B(y_1, r) \cup ... \cup B(y_{n-1}, r)$ pour tout n. Par hypothèse, une sous-suite converge or $d(y_n, y_m) \geq r > 0$ dés que $n > m$, c'est absurde.