TD 5

Exercice 1 Réciproque du théorème de convergence dominée
Soit $(f_n)_n$ une suite convergeant vers f dans L^1.
On souhaite montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. et $(f_{n_k})_k$ a un chapeau intégrable. Pour cela :
1) Vérifier qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $\forall k \geq 1$,

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}.$$

2) On pose $g_k(x) = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$, $G_N(x) = \sum_1^N |g_k(x)|$ et
$G(x) = \sum_1^\infty |g_k(x)|$.
Montrer, en utilisant le théorème de convergence monotone, que $G \in L^1$. En déduire que la suite $(f_{n_k})_k$ converge p.p. vers une limite notée h et qu'elle a un chapeau intégrable.
3) Montrer que $h = f$ p.p.

Exercice 2
1) Soit $\chi_n(x) = \frac{1}{2n}$ sur $[-n, n]$, $\chi_n(x) = 0$ ailleurs. Etudier sa limite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.
2) Utiliser cette suite de fonctions pour montrer que

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0\}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Base de Haar 1D
On pose $H(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $H(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C'est la fonction de Haar. On pose

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$ et $0 \leq k \leq 2^l - 1$. Démontrer que ces fonctions forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
2) Compter les fonctions de Haar qui sont à support dans $[0, 1]$ et qui sont constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j}. On appelle S_j le système qu'elles forment. Remarquer qu'elles sont toutes d'intégrale nulle et déduire qu'elles forment une base de W_j, l'espace des fonctions en escalier dyadiques, constantes sur des intervalles de longueur 2^{-j} et à moyenne nulle.
3) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On commencera par montrer qu'une partie de la base de Haar engendre l'espace des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $(-2^j, 0)$ et $(0, 2^j)$.

Exercice 4 Exemple de base hilbertienne dans $L^2([-1,1])$: les polynômes de Legendre

On se place sur $[-1,1]$ et on considère $\omega \equiv 1$. On pose $R_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$. Vérifier que R_n est un polynôme de degré n et montrer que $(R_n, R_m) = 0$ si $m < n$. Calculer (R_n, R_n). En déduire une expression des polynômes orthogonaux et orthonormaux de Legendre. Dans les ouvrages, on appelle souvent polynômes de Legendre les $L_n = \dfrac{1}{2^n(n)!} R_n$ qui ne sont pas unitaires...

Exercice 5 Convergence faible

1) Soit H un espace de Hilbert et soit x_n une suite bornée convergeant faiblement vers un élément x. Montrer que

$$||x|| \leq \liminf_n ||x_n||.$$

Si de plus $||x_n|| \to ||x||$, montrer que $x_n \to x$ fortement.

3) Soit H un espace de Hilbert. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ 2 suites d'éléments de H telles que $(x_n)_n$ est bornée, $x_n \rightharpoonup x$ faiblement et $y_n \to y$ fortement. Montrer que

$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

Corrigé :

Exercice 1
1)Si $f_n \to f$ dans L^1, alors elle est de Cauchy et vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n, m \geq N,\ \ \|f_n - f_m\|_1 \leq \epsilon.$$

En particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_1$, $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2}$.
Ensuite, pour $\epsilon = \frac{1}{2^2}$, $\exists n_2 > n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_2$, $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2^2}$ et $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_1 \leq \frac{1}{2}$. Et on recommence, etc...Il existe donc une suite $(n_k)_k$ strictement croissante telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.
2) On a $\int G_N = \sum_{k=1}^N \|g_k\|_1 \leq \sum_k 2^{-k} = 1$. La suite $(G_N)_N$ est positive et croissante donc la série $G(x)$ est positive et converge partout (éventuellement vers l'infini). Par le théorème de convergence monotone, $\int G(x)dx = \Sigma_k \int |g_k(x)|dx = \sum_k \|g_k\|_1 \leq 1$. D'où $G \in L^1$ et on déduit que la série de réels $G(x) = \sum_k |g_k(x)|$ est finie p.p. et converge pour presque tout x. Il en est donc de même pour la série $g(x) = \sum_k g_k(x)$. Comme $f_{n_{k+1}} = f_{n_1} + \sum_1^k g_i$, on en déduit que $(f_{n_k})_k$ converge p.p. vers $g + f_{n_1}$.
3) La série $\sum_k g_k(x)$ a G pour chapeau intégrable donc $|f_{n_1}| + G$ est un chapeau intégrable pour la suite $(f_{n_k})_k$. Par le théorème de Lebesgue, elle converge vers $g + f_{n_1}$ dans L^1. Par unicité de la limite, on en déduit que $f = g + f_{n_1}$ p.p.

Remarque : Adaptation à la démonstration de complétude de L^1 : Si f_n est une suite de Cauchy dans L^1, on peut définir g_k comme précédemment et appliquer exactement le même raisonnement pour prouver que la série $\sum_k g_k(x)$ converge pour presque tout x et a donc une limite ponctuelle $g(x)$. On déduit alors du théorème de Lebesgue que $(f_{n_k})_k$ converge vers $f = g + f_{n_1}$ dans L^1. Il est alors immédiat (inégalité triangulaire) que toute la suite $(f_n)_n$ converge vers f.

Exercice 2
1) On a $\chi_n(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$, $\chi_n \to 0$ p.p. et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n^2 = \frac{1}{2n} \to 0$. Donc $\chi_n \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\chi_n \not\to 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
En fait, si $\chi_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ alors par réciproque du TCD, nécessairement $f = 0$ p.p. Or $\lim \int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} |f|$, c'est absurde. La suite χ_n ne converge pas dans L^1.
2) L'ensemble $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ par exemple. Soit $E = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 0\}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $g_n = f - (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \in E$ et $f - g_n = (\int_{\mathbb{R}} f)\chi_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
Donc E est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

$$H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k), \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

1) Le support de H_k^l est $I_k^l = [\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. Donc si $l = l'$ et $k \neq k'$, les supports de H_k^l et $H_{k'}^{l'}$ sont disjoints donc $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Si $l \neq l'$, par exemple $l > l'$ alors $H_{k'}^{l'}$ est constante sur les intervalles dyadiques de longueur $2^{-l'-1}$ donc est constante sur le support de H_k^l. Comme H_k^l est de moyenne nulle, on en déduit que $(H_k^l, H_{k'}^{l'})_{L^2} = 0$. Enfin $\|H_k^l\|_{L^2}^2 = 2^l \int_{I_k^l} 1dx = 1$. Donc $(H_k^l)_{l,k}$ forme un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
2) Les fonctions de Haar constantes sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} et à support dans $[0,1]$ sont :

$$\begin{array}{rcl} H_0^0 & \text{constante sur les intervalles de longueur} & \dfrac{1}{2}, \\ H_0^1,\, H_1^1 & \text{constantes sur les intervalles de longueur} & \dfrac{1}{4}, \dots \\ H_0^{j-1}, \dots, H_{2^{j-1}-1}^{j-1} & \text{constantes sur les intervalles de longueur} & \dfrac{1}{2^j}. \end{array}$$

Donc card(S_j)$= 1 + 2 + \dots + 2^{j-1} = 2^j - 1$. Or W_j est un espace de codimension 1 dans un espace de dimension 2^j, l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles dyadiques de longueur 2^{-j}, donc le système S_j forme une base de W_j.
3) Les fonctions indicatrices des intervalles dyadiques sont denses dans $L^2(0,1)$ donc $\{1, H_k^l, l \geq 0, k = 0, \dots, 2^l - 1\}$ forme une base orthogonale de $L^2(0,1)$. Si on enlève la fonction égale à 1, les H_k^l forment une base orthogonale de $\{f \in L^2(0,1)$, f à moyenne nulle $\}$, et par symétrie par rapport à 0 et dilatations, les H_k^l, $l \geq -j$, $k = -2^{l+j}, \dots, 2^{l+j} - 1$ forment une base orthogonale des fonctions de $L^2(-2^j, 2^j)$ d'intégrale nulle sur $[-2^j, 0]$ et $[0, 2^j]$.
3) Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme les fonctions à supports compacts sont denses dans L^2, on peut supposer que f est à support compact. On découpe f en $f = \mathbf{I}_{(0,+\infty)} f + \mathbf{I}_{(-\infty,0)} f$. Soit $g = \mathbf{I}_{(0,+\infty)} f$ alors g est à support compact dans $\mathbb{R}^+$, soit $[0, A]$ son support alors $A \leq 2^j$ pour un j.
On connaît une base de $L^2(0, 2^j)$ en ajoutant aux H_k^l la fonction $e_1 = 2^{-\frac{j}{2}} \mathbf{I}_{(0,2^j)}$ donc $g = (g, e_1)e_1 + \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i$ où les e_i pour $i \geq 2$ sont les H_k^l.
Alors $\|g - \sum_{i \geq 2} (g, e_i)e_i\|_2 = |(g, e_1)|$. Montrons que pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir j tel que $|(g, e_1)| \leq \varepsilon$. On a

$$|(g, e_1)| = |\int_0^A 2^{-\frac{j}{2}} g(x)dx| \leq 2^{-\frac{j}{2}} \|g\|_2 \sqrt{A},$$

et on veut rendre ce terme plus petit que ε, il est clair que c'est vrai pour j assez grand. On raisonne de la même façon pour le terme $\mathbf{I}_{(-\infty,0)} f$, donc on approxime arbitrairement bien toute fonction à support compact et par densité toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1) Par Cauchy-Schwarz, on a $|(x_n, y)| \leq \|x_n\| \|y\|$.

On prend les liminf sur n dans cette inégalité, alors le membre de droite converge vers $|(x, y)|$ par hypothèse et on obtient $|(x, y)| \leq (\liminf_n \|x_n\|)\|y\|$, pour tout y. En particulier pour $y = x$, on obtient l'inégalité demandée.

Supposons maitenant que $||x_n|| \to ||x||$. On a $||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2(x_n, x)$. Comme x_n tend vers x faiblement, $(x_n, x) \to ||x||^2$ et on déduit que $||x_n - x||^2 \to 0$.

2) On écrit $(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)$. Alors

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \|x_n\| \ \|y_n - y\| + |(x_n - x, y)|.$$

Comme la suite $(x_n)_n$ est bornée, le terme $\|x_n\| \ \|y_n - y\|$ tend vers 0 puisque y_n converge fortement vers y. Enfin le terme $|(x_n - x, y)|$ tend vers 0 puisqu'il y a convergence faible de $x_n - x$ vers 0.