Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD 6 : Lemme de Baire et applications

Exercice 1 Théorème de l'application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective alors
1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $B(0,2C) \subset \overline{T(B(0,1))}$. Pour cela, utiliser les ensembles $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$.
2) Démontrer qu'en fait $B(0,C) \subset T(B(0,1))$. Soit $y \in B(0,C)$, on construira une suite $(z_n)_n$ telle que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - Tz_1 - ... - Tz_n\| < \frac{C}{2^n}$, $\forall n$ et on en déduira que la série $x = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge et que $||x|| < 1$.

Exercice 2 Théorème d'isomorphisme d'espaces de Banach

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective, montrer que T^{-1} est continue.

Exercice 3 Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$. Si E est complet pour les deux normes et si $\| \|_1 \leq C \| \|_2$, montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 4 Théorème du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E,F)$ $L(E,F)$ est l'espace des applications linéaires de E dans F. On suppose que le graphe de T, G(T)= $\{(x,y) \in E \times F, \quad y = Tx\}$, est fermé dans $E \times F$, montrer que T est continue.
(On pourra considérer la norme du graphe $\|x\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.)

Exercice 5 Base algébrique dénombrable et complétude

Existe-t'il une norme sur $E = \mathbf{R}[x]$ qui en fasse un espace de Banach ?

Exercice 6

Rappel : Soit $f \in L^p \cap L^q$ avec $1 \leq p < q$ alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

avec $\theta \in [0,1]$ et donc $f \in L^r, \forall r \in [p,q]$.

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^1 tel que $E \subset \bigcup_{1<q\leq+\infty} L^q$. On va montrer que $\exists p > 1$ tel que $E \subset L^p$ avec injection continue. On considère les ensembles
$$E_n = \{f \in E \cap L^{1+\frac{1}{n}},\ \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n\}.$$

a) Montrer que $E = \bigcup_n E_n$.
b) Montrer que $\forall n$, E_n est fermé dans $(E, \| \|_1)$.
c) Montrer que $\exists n_0$ tel que $\text{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$.
d) En déduire que $id : E, \| \|_1 \longrightarrow L^{1+\frac{1}{n_0}}$ est continue.

Exercice 7

Soit $T : L^2 \to L^2$ vérifiant : $\forall f, g \in L^2$, $\displaystyle\int T(f)g = \int fT(g)$.
Montrer que T est linéaire et continue.

Exercice 8

Soient $1 \leq p \leq q < \infty$. Soit $a(x)$ une fonction mesurable définie sur Ω.
On suppose que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.
1) En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^p(\Omega)$,
$$\|au\|_q \leq C \|u\|_p.$$
2) Vérifier que $a^q \in L^1_{loc}(\Omega)$.
3) Montrer qu'il existe $g \in L^{(\frac{p}{q})'}$ unique telle que pour tout $v \in L^{\frac{p}{q}}$,
$$\int_\Omega |a|^q v = \int_\Omega gv.$$
4) En déduire que $a \in L^r(\Omega)$ avec $r = \frac{pq}{q-p}$.

Corrigé

Exercice 1
1) Soit $F_n = n\overline{T(B(0,1))}$ alors F_n est fermé et $F = \cup_n F_n$ car T est surjective. Par le lemme de Baire, on sait qu'il existe n_0 tel que int(F_{n_0})$\neq \emptyset$ et donc int$\left(\overline{T(B(0,1))}\right) \neq \emptyset$. Alors il existe $r > 0$ et $y_0 \in F$ tels que $B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0,1))}$. Si $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ alors $-y_0$ aussi et $B(y_0, r) = y_0 + B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))}$ donc $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} \subset 2\overline{T(B(0,1))}$ d'où $B(0, \frac{r}{2}) \subset \overline{T(B(0,1))}$ et $2C = \frac{r}{2}$ convient.
2) Soit $y \in B(0,C)$ fixé, on cherche $x \in B(0,1)$ tel que $y = Tx$. On sait que $B(0,C) \subset \frac{1}{2}B(0,2C) \subset \overline{T(\frac{1}{2}B(0,1))}$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon$, $\|z_\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ tel que $\|y - Tz_\varepsilon\| < \varepsilon$.
On choisit $\varepsilon = \frac{C}{2}$, cela nous donne un z_1 tel que $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - Tz_1\| < \frac{C}{2}$. Alors $y - Tz_1 \in B(0, \frac{C}{2}) \subset \overline{T(\frac{1}{4}B(0,1))}$ et on recommence, pour $\varepsilon = \frac{C}{4}$, $\exists z_2$ tel que $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ et $\|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{C}{4}$, etc...
On construit ainsi une suite $(z_n)_n$ telle que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - Tz_1 - ... - Tz_n\| < \frac{C}{2^n}$, $\forall n$.
La suite $x_n = z_1 + ... + z_n$ est de Cauchy dans E donc converge vers un $x \in E$, comme T est continue, $Tx_n \to Tx$, donc $y = Tx$. Il reste à voir que $\|x\| < 1$.
Par exemple, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|z_1\| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ alors

$$\|x_n\| \leq \sum_1^n \|z_k\| \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Exercice 2
Par le théorème de l'application ouverte, $\exists C > 0$ tel que $B_F(0,C) \subset T(B_E(0,1))$. Comme T est bijective, $\forall x \in E$ tel que $\|Tx\| < C$ on a $\|x\| < 1$. Donc $\|x\| \leq \frac{1}{C}\|Tx\|$ et T^{-1} est continue.

Exercice 3
On applique le résultat précédent à $id : E, \|x\|_2 \to E, \|x\|_1$.

Exercice 4
Sur E, on considère $\|x\|_1 = \|x\|_E$ et $\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$. Si $(E, \|x\|_2)$ est complet, comme $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, $\forall x \in E$, en appliquant l'exercice ci-dessus, on obtient l'équivalence des normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ et donc T est continue.
Vérifions que $(E, \|x\|_2)$ est complet. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy pour $\|x\|_2$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|x\|_1$ donc elle converge vers un $x \in E$ au sens de la norme $\|x\|_1$. La suite $(Tx_n)_n$ est aussi de Cauchy dans F complet donc converge vers un certain $y \in F$. Or $(x_n, Tx_n)_n \in G(T)$ fermé, donc $y = Tx$ et $(E, \|x\|_2)$ est complet.

Exercice 5

Exercice 6

a) Montrons que $E = \bigcup_n E_n$.

Si $f \in E$ alors $\exists q > 1$ tel que $f \in L^1 \cap L^q$. Donc $\exists N_0$ tel que à la fois $\|f\|_1 \leq N_0$ et $\forall n \geq N_0$, $1 + \frac{1}{n} < q$. Soit $r_n = 1 + \frac{1}{n}$ alors grâce au rappel,

$$\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1^{\theta_n} \|f\|_q^{(1-\theta_n)}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{r_n} = \frac{n}{n+1} = \theta_n + \frac{1-\theta_n}{q}.$$

Or $\theta_n(1 - \frac{1}{q}) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{q}$ où $q > 1$ donc $\theta_n \longrightarrow 1$ et $\|f\|_1^{\theta_n} \|f\|_q^{(1-\theta_n)} \longrightarrow \|f\|_1$. Donc $\exists N \geq N_0 + 1$ tel que $\forall n \geq N$ $\|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \|f\|_1 + 1 \leq N_0 + 1 \leq N$ et $f \in E_N$ par exemple. D'où $E = \bigcup_n E_n$.

b) Montrons que $\forall n$, E_n est fermé dans $(E, \| \|_1)$.

Soit $(f_p)_p \subset E_n$ telle que $f_p \longrightarrow f$ dans $(E, \| \|_1)$. A-t'on $f \in E_n$?

$\|f_p - f\|_1 \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ il existe une sous-suite $(f_{p_k})_k$ telle que $f_{p_k} \longrightarrow f$ p.p. (voir la réciproque du TCD), donc

$$\begin{cases} |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow |f|^{1+\frac{1}{n}} \text{ p.p.,} \\ |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1, \ |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \geq 0 \text{ p.p.,} \\ \forall k, \ \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Le lemme de Fatou montre que $|f|^{1+\frac{1}{n}} \in L^1$, soit $f \in L^{1+\frac{1}{n}}$, et

$$\int |f|^{1+\frac{1}{n}} \leq \liminf \int |f_{p_k}|^{1+\frac{1}{n}} \leq n^{1+\frac{1}{n}}.$$

Donc $f \in E_n$, et E_n est fermé.

c) Comme $E = \bigcup_n E_n$ avec E_n fermé dans $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_1)$ est complet, on peut appliquer le lemme de Baire : $\exists n_0$ tel que $\text{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$.

d) On en déduit que $\exists f \in E$ et $\exists r > 0$ tels que $B(f,r) \subset E_{n_0}$. Si $g \in E$, $g \neq 0$ alors $f + \frac{r}{2}\frac{g}{\|g\|_1} \in B(f,r) \subset E_{n_0}$ donc $g \in L^{1+\frac{1}{n_0}}$ et $|\frac{r}{2}\frac{1}{\|g\|_1}\|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} - \|f\|_{1+\frac{1}{n_0}}| \leq n_0 \Longrightarrow \|g\|_{1+\frac{1}{n_0}} \leq \frac{4n_0}{r}\|g\|_1$.

D'où $id : E, \| \|_1 \longrightarrow L^{1+\frac{1}{n_0}}$ est continue.

Exercice 7

Exercice 8

1) On définit l'opérateur linéaire $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ par $Tu = au$.

Montrons que T est continu avec le téorème du graphe fermé. Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $Tu_n \to f$ dans $L^q(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $u_n \to u$ p.p. et $au_n \to f$ p.p.. Donc $f = au$ p.p. soit $f = Tu$. On en déduit que le graphe est fermé donc T est continu. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^p(\Omega)$,

$$(1) \qquad \|au\|_q \leq C\,\|u\|_p.$$

2) En choisissant dans (1), $u = \mathbf{I}_K$ où K est un compact quelconque de Ω, on voit que a^q est localement intégrable.
3) On déduit de (1) que pour tout $v \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$,

$$\int |a|^q |v| \leq C^q \|v\|_{\frac{p}{q}},$$

(prendre $u = |v|^{\frac{1}{q}}$).
L'application $v \longmapsto \displaystyle\int |a|^q v$ définit donc une forme linéaire continue sur $L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$.
Par conséquent, le théorème de dualité 4.1 nous dit qu'il existe une unique fonction $g \in L^{(\frac{p}{q})'}$ telle que pour tout $v \in L^{\frac{p}{q}}$,

$$\int_\Omega |a|^q v = \int_\Omega gv.$$

4) On écrit $\Omega = \bigcup_N \Omega \cap B(0,N)$. On fixe N et on approche la fonction $signe(|a|^q - g)$ par une suite $(f_k)_k$ de fonctions régulières à support compact inclus dans $\Omega \cap B(0,N)$ telles que $f_k \to signe(|a|^q - g)$ p.p. et $|f_k| \leq 1$ p.p.
Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\int_{\Omega\cap B(0,N)} |\,|a|^q - g| = 0,$$

pour tout N donc $|a|^q = g$ p.p. D'où, $a \in L^r(\Omega)$.