Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD Théorèmes de Banach - Topologies faibles

Exercice 1 Conséquences du Théorème de Banach-Steinhaus

1) Convergence simple d'opérateurs linéaires : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F, tels que pour tout $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée Tx.
Montrer que

$$\sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty,$$

$$T \in \mathcal{L}(E,F) \text{ et } ||T||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

2) Soit H un espace de Hilbert et soit x_n une suite convergeant faiblement vers un élément x. Montrer que x_n est une suite bornée dans H et que

$$||x|| \leq \liminf_n ||x_n||.$$

Si de plus $||x_n|| \to ||x||$, vérifier que $x_n \to x$ fortement.

3) Borné d'un espace de Banach (caractérisation duale) : Soit G un espace vectoriel normé, B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G'$, $f(B) = \{f(x),\ x \in B\}$ est borné. Montrer que B est borné.
Ce théorème nous dit qu'un ensemble est borné si et seulement si ses projections sur des axes de coordonnées arbitraires sont bornées.

4) Application bilinéaire :
a) Soient E, F, G trois espaces de Banach. Soit $a : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que a est séparement continue c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, \quad y \in F \mapsto a(x,y) \text{ est continue et}$$

$$\forall y \in F, \quad x \in E \mapsto a(x,y) \text{ est continue.}$$

Montrer que a est continue sur $E \times F$ (c'est-à-dire $\exists M > 0$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|a(x,y)\|_G \leq M\, \|x\|_E \|y\|_F$).

b) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à une variable et à coefficients réels. On munit E de la norme

$$\|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

Soit $a : E \times E \to \mathbf{R}$ définie par $a(p,q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Montrer que a est séparement continue mais non continue sur $E \times E$.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel normé et soit K une partie convexe de E avec $0 \in K$. On pose

$$K^\star = \{f \in E';\ \forall x \in K,\ \ < f, x > \leq 1\} \text{ et}$$
$$K^{\star\star} = \{y \in E;\ \forall f \in K^\star,\ < f, y > \leq 1\}.$$

Montrer que $\overline{K} = K^{\star\star}$.

Exercice 3
L'objet de cet exercice est de montrer qu'en dimension ∞, on ne peut pas séparer deux convexes fermés.

On note $\ell^1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty\}$ qui muni de la norme $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ est un espace de Banach.

On considère les ensembles

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{x = (x_n)_n \in \ell^1 :\ \forall n \geq 1,\ x_{2n} = 0\} \text{ et} \\ B & = & \{x = (x_n)_n \in \ell^1 :\ \forall n \geq 1,\ x_{2n} = 2^{-n}\, x_{2n-1}\}. \end{array}$$

1) Vérifier que A_0 et B sont des sous-espaces fermés de ℓ^1 et que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.
2) Soit $c = (c_n)_n \in \ell^1$ tel que $\forall n \geq 1$, $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Vérifier que $c \notin A_0 + B$ et que si $A = A_0 - c = \{a - c,\, a \in A_0\}$, on a $A \cap B = \emptyset$. Montrer que A et B ne peuvent pas être séparés au sens large.

Exercice 4 Variante de la définition de la topologie faible
Dans tout ce qui suit E désignera un espace de Banach réel. Pour $f \in E'$, on définit $p_f(x) = |f(x)|$, c'est bien une semi-norme sur E. On note $\mathcal{P} = (p_f)_{f \in E'}$. Soit $p \in \mathcal{P}$, on appelle p-boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r l'ensemble $B(x, r)$ des points $y \in E$ tels que $p(x - y) < r$. Enfin on appelle $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre x toute intersection finie de p_i-boules ouvertes de centre x.
Définition : Une partie U de E est ouverte si ou bien $U = \emptyset$, ou bien $\forall x \in U$, il existe une $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre x contenue dans U. On peut vérifier facilement que l'on définit bien ainsi une topologie sur E.
On note $(E, \mathcal{P})$ l'espace E muni de cette topologie. La topologie $(E, \mathcal{P})$ s'appelle la topologie faible sur E (par "opposition" à la topologie de la norme qui est dite topologie forte). Elle est souvent notée $\sigma(E, E')$ ou bien E_w dans la littérature.
Pour simplifier les notations, on pose $E' = (f_i)_{i \in I}$ et on notera P.F.I l'ensemble des parties finies de I. Par définition de la topologie associée à une famille de semi-normes, les ensembles $V(x, J, \varepsilon) = \{y \in E, |< f_i, x - y >| < \varepsilon, \forall i \in J\}$ où $J \in P.F.I$ et $\varepsilon > 0$ constituent une base de voisinages (ouverts) de x dans E.
1) Montrer que si $\forall x \neq 0$, $\exists p$ semi-norme telle que $p(x) \neq 0$ alors l'espace $(E, \mathcal{P})$ est séparé. Vérifier que la topologie faible est séparée.
2) Montrer que si la dimension de E est finie, $\sigma(E, E')$ est équivalente à $(E, \| \, \|)$ (pour cela montrer que toute boule $B(x, r)$ contient un $V(x, J, \varepsilon)$).

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel normé tel que $dimE = +\infty$. On se propose de montrer que la topologie faible n'est pas métrisable. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une distance d sur E dont la topologie est équivalente à $\sigma(E, E')$.
1) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E' telle que
$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \exists I_k \in P.F.\mathbf{N}^\star, \quad \exists \varepsilon_k > 0$ tels que

$$\bigcap_{i\in I_k} \{x \in E : | < f_i, x > | < \varepsilon_k\} \subset B_d(0, \frac{1}{k}),$$

où $B_d(0, \frac{1}{k}) = \{x \in E : d(0, x) < \frac{1}{k}\}$.
2) Soient $g \in E'$ et $V = \{x \in E : \ | < g, x > | < 1\}$. Montrer que $\exists I \in P.F.\mathbf{N}^\star$ tel que

$$\bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset V, \text{ puis que } \bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset \ker g.$$

On note $I = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$.
3) On considère

$$\begin{array}{rcl} F : E & \longrightarrow & \mathbf{R}^{k+1} \\ x & \longmapsto & (g(x), f_{n_1}(x), ..., f_{n_k}(x)). \end{array}$$

Séparer ImF de (1,0,...,0) dans $\mathbf{R}^{k+1}$. En déduire que $\exists (\lambda_i)_i \in \mathbf{R}^k$ tel que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i}$.
4) Soit $F_n = \text{vect}\{f_1, ..., f_n\}$. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $E' = F_{n_0}$. (remarquer que $E' = \bigcup_n F_n$).
5) Conclure.

Exercice 6
Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire.
1) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lllll} (1) & T : E & \longrightarrow & F \text{ continue.} \\ (2) & T : E_w & \longrightarrow & F_w \text{ continue.} \\ (3) & T : E & \longrightarrow & F_w \text{ continue.} \end{array}$$

2) Montrer que si $T : E_w \longrightarrow F$ est linéaire continue alors $\dim Im(T) < \infty$.

Exercice 7
Soit $E = \ell^\infty$ que l'on munit de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.
Trouver une suite $(f_n)_n$ de E' telle que $\|f_n\|_{E'} = 1$ et $(f_n)_n$ ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible $\star$. Y-a-t-il contradiction avec le fait que $(B_{E'}, w\star)$ est compact ? Que pouvez-vous en conclure sur E ?

Exercice 8 Opérateur compact et cv faible

Soient E et F deux espaces de Banach, on note $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que T est compacte si $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F (pour la norme).

1) Vérifier qu'un compact dans un espace vectoriel normé est borné.

2) Montrer que si T est compacte alors T est continue.

3) Montrer que si T est compacte, T vérifie la propriété ($\star$) suivante,

$$(\star) \qquad [x_n \rightharpoonup x \text{ dans } E_w \Longrightarrow Tx_n \longrightarrow Tx \text{ dans } F]$$

4) Réciproquement : si de plus E est réflexif, montrer que si T vérifie la propriété ($\star$) alors T est compacte.

Exercice 9

Soit E un espace réflexif et soit $f \in E'$, montrer que $\|f\|_{E'}$ est atteinte.

(C'est un critère simple pour montrer qu'un espace n'est pas réflexif.)

Exercice 10

Soit E un e.v.n. et E' son dual. On note $< f,\ x >= f(x)$ et pour $A \subset E$ et $B \subset E'$, $A^\perp = \{f \in E',\ < f,\ x >= 0,\ \forall x \in A\}$, $B^\perp = \{x \in E,\ < f,\ x >= 0,\ \forall f \in B.\}$. Montrer que

$$A^{\perp\perp} = \overline{vect(A)}$$

et que, si E est réflexif,

$$B^{\perp\perp} = \overline{vect(B)}.$$

Corrigé :

Exercice 1

1) La première relation est une conséquence directe du théorème de Banach-Steinhaus. Comme $||T_n x|| \leq ||T_n|| ||x||$, on obtient par passage à la limite inférieure,

$$||Tx|| \leq (\lim\inf_{n\to\infty} ||T_n||)||x||.$$

2) Par le théorème de Riesz, nous avons $||x_n||_H = ||x_n||_{\mathcal{L}(H,\mathbf{R})}$ et on peut donc appliquer 1). Supposons maitenant que $||x_n|| \to ||x||$. On a $||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2(x_n, x)$. Comme x_n tend vers x faiblement, $(x_n, x) \to ||x||^2$ et on déduit que $||x_n - x||^2 \to 0$.

3) On applique le théorème de Banach-Steinhaus avec $E = G'$, $F = \mathbf{R}$, $I = B$. Pour $b \in B$ et $f \in E = G'$, on pose $J_b(f) = f(b)$. On a donc par hypothèse

$$\forall f \in E, \ \sup_{b\in B} |J_b(f)| < +\infty.$$

On en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall b \in B, \ \forall f \in E, \ ||J_b(f)|| \leq c||f||_{G'}, \text{ soit}$$

$$\forall f \in G', |f(b)| \leq c||f||_{G'}.$$

Comme par le corollaire 11.2 p 139, on a $||b|| = ||J_b||$, on conclut que $||b|| \leq c$. B est donc borné.

4) a) On note $a_x : y \mapsto a(x,y)$, $a_y : x \mapsto a(x,y)$ et $B_E = \overline{B_E(0,1)}$. Par hypothèse, la famille $\{a_x, x \in B_E\}$ vérifie :
$\forall x \in B_E$, $a_x \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\forall y \in F$, $\exists M_y > 0$, $\forall x \in B_E$, $\|a_x(y)\| \leq M_y$. Donc $\sup_{x\in B_E} \|a_x(y)\| \leq M_y < \infty$, $\forall y \in F$. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus et $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in B_E$, $\forall y \in F$, $\|a_x(y)\| \leq M\|y\|$. D'où la continuité de a.

b) Comme $|a(p,q)| \leq \|p\|_\infty \|q\|_1$ ou $\|q\|_\infty \|p\|_1$, a est séparement continue.
Si a est continue, $\exists M > 0$, $\forall p, q$, $|\int_0^1 p(t)q(t)dt| \leq M \ \|p\|_1 \|q\|_1$. En choisissant par exemple dans cette inégalité, $p(x) = x^n$ et $q = p'$, on obtient $\frac{1}{2} \leq \frac{M}{n+1}$, ce qui est absurde pour n assez grand.

Exercice 2

Les ensembles $K^\star$ et $K^{\star\star}$ sont fermés comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, donc de $K \subset K^{\star\star}$ on déduit $\overline{K} \subset K^{\star\star}$. Si $\overline{K} \neq K^{\star\star}$, $\exists y_0 \in K^{\star\star} \setminus \overline{K}$ et par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \not\equiv 0$, $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$< f, x > < \alpha < < f, y_0 >, \qquad \forall x \in K.$$

Comme $0 \in K$, on a $\alpha > 0$ et $\forall x \in K$, $< \frac{f}{\alpha}, x > < 1$, donc $\frac{f}{\alpha} \in K^\star$ or $y_0 \in K^{\star\star}$ donc $< \frac{f}{\alpha}, y_0 > \leq 1$, c'est absurde. D'où $K^{\star\star} = \overline{K}$.

Exercice 3
1) On définit les deux formes linéaires continues suivantes

$$\begin{array}{rcl} f_{2n} : \ell^1 & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x_{2n} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g_{2n} : \ell^1 & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x_{2n} - 2^{-n}x_{2n-1}. \end{array}$$

Alors $A_0 = \cap_n f_{2n}^{-1}(\{0\})$ et $B = \cap_n g_{2n}^{-1}(\{0\})$ sont fermés comme intersection de fermés.
Soit $e^n = (\delta_{ni})_{i\geq 1}$ où $\delta_{ni} = 1$ si i =n, $\delta_{ni} = 0$ sinon, alors si $F_k = \text{vect}\{e^1, ..., e^k\}$ et si $F = \cup_k F_k$, on a $\overline{F} = \ell^1$. Donc pour montrer que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$, il suffit de montrer que $\forall k$, $F_k \subset A_0 + B$.
Soit $x \in F_k$, on définit a, b de la façon suivante,

$$\begin{cases} b_{2n} = x_{2n} & b_{2n-1} = 2^n x_{2n} \\ a_{2n-1} = x_{2n-1} - 2^n x_{2n} & a_{2n} = 0 \end{cases}$$

alors $x = a + b$ et comme $x_n = 0$ si $n > k$, $a, b \in \ell^1$ et $(a, b) \in A_0 \times B$. Donc $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.
2) Si $c = a + b$ alors nécessairement $a_{2n} = 0$, $b_{2n} = 2^{-n}$, $b_{2n-1} = 1$ et $a_{2n-1} = -1$ donc $a, b \notin \ell^1$ et $c \notin A_0 + B$. Il est clair alors que $A \cap B = \emptyset$.
Supposons qu'il existe $f \in (\ell^1)'$, $f \not\equiv 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$< f, a > \leq \alpha \leq < f, b >, \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Comme B est vectoriel, nécessairement $< f, b >= 0$, $\forall b \in B$. De même, de $< f, a_0 >\leq \alpha + f(c)$, $\forall a_0 \in A_0$, on en déduit que $< f, a_0 >= 0$, $\forall a_0 \in A_0$. Donc $f \equiv 0$ sur $A_0 + B$ dense dans ℓ^1, par continuité on en conclut que f est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut donc pas séparer A et B.

Exercice 4
1) Soit donc $x \neq 0$, et p telle que $p(x) \neq 0$ alors si $r = \frac{1}{2}p(x)$ on a $B(x, r) \cap B(0, r) = \emptyset$ et on sépare 0 et x. Si $x \neq y$, on peut écrire $y = x + z$ avec $z \neq 0$ et on a $B(x, r) \cap B(x + z, r) = \emptyset$.
Utilisons ce critère, soit donc $x \neq 0$, par Hahn-Banach, $\exists f \in E'$, $f \not\equiv 0$ telle que $f(x) > 0 = f(0)$ donc $p_f(x) \neq 0$ et la topologie faible est séparée.
2) On suppose dim$E < \infty$. On sait déjà qu'un ouvert faible est un ouvert fort, il reste à montrer que U ouvert fort est un ouvert faible. Soit $x_0 \in U$ supposé non vide, alors $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. On va montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists J \in P.F.I.$ tels que $V(x_0, J, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $\forall i$ $\|e_i\| = 1$. Tout x de E s'écrit $x = \sum_1^n x_i e_i$, soit $f_i : E \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x_i$ alors $f_i \in E'$ et on a

$$\|x - x_0\| \leq \sum_1^n |x_i - x_{0i}| = \sum_1^n | < f_i, x - x_0 > |.$$

D'où si $x \in V = V(x_0, \{1, ..., n\}, \varepsilon)$ alors $\|x - x_0\| < n\varepsilon$, on choisit donc $\varepsilon \leq \frac{r}{n}$ et on a bien $V \subset B(x_0, r)$.

Exercice 5
On suppose que $dimE = +\infty$ et que les applications

$$\begin{array}{llll} id: & (E, \sigma(E, E')) & \to & (E, d), \\ id: & (E, d) & \to & (E, \sigma(E, E')) \end{array}$$

sont continues.
1) $\forall k \in \mathbf{N}^\star$, $B_d(0, \frac{1}{k})$ est un voisinage de 0 pour d, donc $\exists V(0, I_k, \varepsilon_k) \subset B_d(0, \frac{1}{k})$ où $\varepsilon_k > 0$ et I_k est un ensemble fini d'indices. L'ensemble $\{f_j, j \in I_k, k \in \mathbf{N}^\star\}$ est dénombrable et constitue la suite cherchée.
2) L'ensemble $V = V(0, g, 1)$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible, par hypothèse $\exists k_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $B_d(0, \frac{1}{k_0}) \subset V$. Alors d'après 1),

$$\bigcap_{i \in I_{k_0}} \{x \in E : | < f_i, x > | < \varepsilon_{k_0}\} \subset V.$$

On pose $I = I_{k_0}$ alors $\bigcap\limits_{i \in I} \ker f_i \subset V$. Et $| < g, x > | < 1$ sur un espace vectoriel, donc nécessairement $g(x) = 0$, $\forall x \in \bigcap\limits_{i \in I} \ker f_i$, par suite $\bigcap\limits_{i \in I} \ker f_i \subset \ker g$.
3) Pour simplifier les notations, on notera $I = \{1, 2, ..., k\}$, et soit

$$\begin{array}{rcl} F : E & \longrightarrow & \mathbf{R}^{k+1} \\ x & \longmapsto & (g(x), f_1(x), ..., f_k(x)). \end{array}$$

ImF est convexe fermé (car vectoriel de dimension finie) et $e_1 = (1, 0...0) \notin$ImF car $\bigcap\limits_{i \in I} \ker f_i \subset \ker g$. D'après le théorème d'Hahn-Banach version fermé-compact, $\exists h \in (\mathbf{R}^{k+1})'$, $h \not\equiv 0$ et $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tels que $h(F(x)) < \alpha < h(e_1)$, $\forall x \in E$. Comme ImF est vectoriel, on en déduit que $h(F(x)) = 0$, $\forall x \in E$ et comme $h \in (\mathbf{R}^{k+1})'$, $h \not\equiv 0$, $\exists (\mu_0, ..., \mu_k) \in \mathbf{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $h(x) = \sum\limits_0^k \mu_i x_i$ si $x = (x_0, ..., x_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$. D'où on obtient

$$\mu_0 g(x) + \sum_1^k \mu_i f_i(x) = 0 < \alpha < \mu_0, \quad \forall x \in E.$$

Donc $\mu_0 \neq 0$ et $g(x) = \sum(-\frac{\mu_i}{\mu_0}) f_i(x)$ pour tout x. (On peut démontrer ce résultat par une preuve purement algébrique, par exemple un raisonnement par récurrence sur k.)
4) Soit $F_n = \text{vect}\{f_1, ..., f_n\}$, d'après 2) et 3), $\forall g \in E'$, $\exists N$ tel que $g \in F_N$

donc $E' = \bigcup F_n$. Comme E' est complet, F_n fermé (car dim$F_n < \infty$), on peut appliquer le lemme de Baire et $\exists n_0$ tel que int$(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Si $f \in$ intF_{n_0} alors $\exists r > 0$ tel que $B(f,r) \subset F_{n_0}$ par suite $E' = F_{n_0}$ car F_{n_0} est vectoriel et donc dim$E' \leq n_0$.
5) On en conclut que dim$E < \infty$, en effet soit

$$\begin{array}{lll}\Phi : & E & \to \mathbf{R}^{n_0} \\ & x & \mapsto (f_1(x), ..., f_{n_0}(x)).\end{array}$$

Φ est linéaire et injective (car $\Phi(x) = 0 \Longrightarrow \forall f \in E'$, $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ par Hahn-Banach) donc dim$E \leq n_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exercice 6
1) On montre que $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$. Pour simplifier les notations on montrera que T est continue en 0 (ce qui implique la continuité de T partout).
$(1) \Longrightarrow (2)$:
$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $\omega \in \mathcal{V}_w(0)$ tel que $x \in \omega \Longrightarrow Tx \in \Omega$? On peut toujours choisir $\Omega = \{y \in F : | < f_i, y > | < \varepsilon, \forall i = 1, ..., n\}$ où $f_i \in F'$ et $\varepsilon > 0$. Maintenant,

$$\begin{array}{rcl} Tx \in \Omega & \Longleftrightarrow & | < f_i, Tx > | < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n, \\ & \Longleftrightarrow & | < f_i oT, x > | < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n. \end{array}$$

Si $\omega = \{x \in E : | < f_i oT, x > | < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n\}$ où $f_i oT \in E'$, alors ω est bien un voisinage faible de 0 donc (2).
$(2) \Longrightarrow (3)$:
$\forall \Omega \in \mathcal{V}_w(0)$, existe-t'il $r > 0$ tel que $x \in B(x,r) \Longrightarrow Tx \in \Omega$?
On sait par hypothèse qu'il existe un voisinage faible de 0, ω, tel que $x \in \omega \Longrightarrow Tx \in \Omega$ et on sait qu'un ouvert faible est un ouvert fort donc (3).
$(3) \Longrightarrow (1)$:
On utilise le théorème du graphe fermé, soit $(x_n, y_n)_n \in G(T) = \{(x,y) \in E \times F, y = Tx\}$ telle que $x_n \to x$ et $y_n = Tx_n \to y$, a-t'on $y = Tx$?
Comme T est continue de E fort dans F faible, $Tx_n \rightharpoonup Tx$ et d'autre part la convergence forte impliquant la convergence faible $Tx_n \rightharpoonup y$, donc nécessairement $y = Tx$. D'où le graphe de T est fermé et T est continue (pour les topologies fortes).
2) Soit $T : E_w \longrightarrow F$ linéaire continue. La continuité en 0 implique que $\exists \varepsilon > 0$, $\exists f_1, .., f_n \in E'$ tels que

$$| < f_i, x > | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, ..., n \Longrightarrow \|Tx\|_F < 1.$$

Alors $\bigcap_i \ker f_i \subset \ker T$. On va montrer que dim(ImT)$\leq n$.
Soit $y_1 = Tx_1, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1} \in$ ImT, existe-t'il $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_1^{n+1} \lambda_k Tx_k = 0$?

Ou encore tels que $T(\sum_1^{n+1}\lambda_k x_k) = 0$? On remarque que si il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ non tous nuls tels que $\sum_1^{n+1}\lambda_k x_k \in \bigcap_i \ker f_i$, c'est fini. Donc on veut

$$\sum_1^{n+1} \lambda_k < f_i, x_k >= 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

C'est un système linéaire de n équations à $n+1$ inconnues dont on sait qu'il existe des solutions non triviales, d'où le résultat.

Exercice 7

Soit $f_n : E \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_n(x) = x_n$ si $x = (x_n)_n$. Alors $f_n \in E'$ et $\|f_n\| = 1$. S'il existe une sous-suite $(f_{nk})_{nk}$ qui converge vers un f dans $E'_{w\star}$ alors $\forall x \in E$, $< f_{nk}, x >= x_{nk} \longrightarrow < f, x >$ quand k tend vers $+\infty$. Donc en fait il s'agit de trouver une suite de réels qui ne converge pas...c'est facile. Par exemple, soit $x = (x_n)_n$ tel que $x_{nk} = (-1)^k$ et $x_n = 0$ ailleurs, alors $x \in \ell^\infty$ et $< f_{nk}, x >= (-1)^k$ ne converge pas. Donc il n'existe pas de sous-suites faiblement-$\star$ convergentes bien que $(f_n)_n$ soit dans un compact faible-$\star$. Mais ce compact n'est pas métrisable, on peut en conclure par exemple que ℓ^∞ n'est pas séparable ni réflexif. En effet, ℓ^1 est séparable et si ℓ^∞ était réflexif, il serait donc aussi séparable.

Exercice 8

1) $K \subset \bigcup_{n>0} B(0, n)$ et K compact $\Longrightarrow \exists N$ tel que $K \subset B(0, N)$.

2) $\forall x \in B_E, Tx$ est dans un compact donc $\exists N$ tel que $Tx \in B(0, N) \Longrightarrow \|Tx\| \leq N$.

3) Soit $(x_n)_n \in E$ telle que x_n converge faiblement vers $x \in E$, alors $\|x_n\|$ est bornée car E est un Banach et donc $\exists R > 0$ tel que $\forall n$, $x_n \in \overline{B}(0, R)$. Comme T est compacte, $(Tx_n)_n$ est dans un compact fort et il existe une sous-suite $(Tx_{nk})_k$ qui converge fortement vers $y \in F$. D'autre part T est linéaire continue donc continue de E faible dans F faible et $Tx_{nk} \rightharpoonup Tx$ d'où $y = Tx$. Tx est la seule valeur d'adhérence de la suite $(Tx_n)_n$ donc toute la suite converge vers Tx d'où $(\star)$.

4) Montrons que $T(B_E)$ est fermé. Soit $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, on suppose que $Tx_n \longrightarrow y$, a-t-on $y = Tx$ où $x \in B_E$?

Comme E est réflexif et que $\|x_n\| \leq 1, \forall n$, il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ telle que $x_{nk} \rightharpoonup x$. Alors $(\star) \Longrightarrow Tx_{nk} \longrightarrow Tx$ donc $y = Tx$ et $\|x\| \leq \liminf \|x_{nk}\| \leq 1$ et $T(B_E)$ est fermé.

Soit encore $y_n = Tx_n \in T(B_E)$, alors E réflexif $\Longrightarrow x_{nk} \rightharpoonup x$ et $Tx_{nk} \longrightarrow Tx$ donc Tx est valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ et $T(B_E)$ est compact.

Exercice 9
On définit $J : E \longrightarrow E''$ par $J(x) = J_x$ avec

$$< J_x, f >_{E'',E'} = < f, x >_{E',E} \quad \forall x \in E, \ \forall f \in E'.$$

On a $\|J_x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} | < f, x > | = \|x\|$ par Hahn-Banach, donc J est linéaire isométrique.
Ici, E est réflexif donc J est surjective c'est-à-dire $J(E) = E''$.
Si $f \in E'$ alors $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} | < f, x > | = \sup_{\|\xi\|\leq 1} | < \xi, f > |$ car J est isométrique et surjective.
Par Hahn-Banach, $\sup_{\|\xi\|\leq 1} | < \xi, f > | = \max_{\|\xi\|\leq 1} | < \xi, f > |$ et donc $\exists x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq 1$ et $\|f\| = | < f, x_0 > |$.

Exercice 10
En ce qui concerne A, on raisonne comme dans l'exercice 2.
$A^{\perp\perp}$ est fermé et contient $\overline{vect(A)}$. Si il existe $x \in A^{\perp\perp}$ qui n'est pas dans $\overline{vect(A)}$, on sépare $\{x\}$ et $\overline{vect(A)}$ par un hyperplan fermé et on conclut comme dans l'exercice 2.
De même pour B, $B^{\perp\perp}$ est fermé et contient $\overline{vect(B)}$. Si il existe $f_0 \in B^{\perp\perp}$ qui n'est pas dans $\overline{vect(B)}$, par le théorème d'Hahn-Banach version fermé -compact, il existe $\xi \in E''$, non identiquement nulle, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $< \xi, f_0 >< \alpha << \xi, f >$ pour tout $f \in vect(B)$. Comme $vect(B)$ est vectoriel, on en déduit que $< \xi, f >= 0$ pour tout $f \in vect(B)$ et $\alpha < 0$. Si E est réflexif, $\exists x_0 \in E$ tel que $< \xi, f >=< f, x_0 >$ pour tout $f \in E'$, alors $< f, x_0 >= 0$ pour tout $f \in B$ donc $x_0 \in B^{\perp}$ et $< f_0, x_0 >= 0 < \alpha$ ce qui est absurde.

Exercice 11 Corrigé exercice 9 p160 du poly

1) $\|x^N - x\|_1$ = reste d'une série convergente.
2) f est linéaire et $|f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$ donc $f \in (\ell^1)'$.
a) On a montré que $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_\infty$. On a $\Lambda_y(e^N) = y_N$ donc $\|\Lambda\| \geq \|y\|_\infty$, d'où Λ est une isométrie.
b) Λ est injective car isométrique. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (\ell^1)'$ alors par linéarité et continuité de ℓ, on a $< \ell, x >= \sum_1^\infty x_n y_n$ si $x = (x_n)_n \in \ell^1$ et $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \ell^1$, $| < \ell, x > | \leq M\|x\|_1$. En particulier pour $x = e^n$, on obtient $| < \ell, e^n > | = |y_n| \leq M$ et $y \in \ell^\infty$. Donc $\ell = \Lambda_y$ et Λ est bijective. Par le théorème de l'application ouverte (cf TD Baire), on conclut que Λ est un isomorphisme d'espaces de Banach.
3) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 faible $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in \ell^\infty < y, x^n > \rightarrow < y, 0 >= 0 \Longleftrightarrow \sum_1^\infty x_i^n y_i \rightarrow 0, \forall y = (y_i)_i \in \ell^\infty$.
4) Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de ℓ^1 telle que $x^n \rightharpoonup 0$ dans ℓ^1 faible.

a) On montre facilement que d est une distance sur K.

b) On veut montrer que $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists y^1, ..., y^n \in \ell^1$ tels que

$$V = \{g \in K : | < g - f, y^i > | < \varepsilon, \forall i = 1, ..., n\} \subset \Omega.$$

On a

$$d(f,g) = \sum_1^n \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| + \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| \text{ et } \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| \leq 2 \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

pour $f, g \in K$. Soient donc ε et n tels que $\varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r$ et $y^i = e^i$ pour $1 \leq i \leq n$, alors

$$\sum_1^n \frac{1}{2^i}|f_i - g_i| = \sum_1^n \frac{1}{2^i}| < f - g, e^i > | \leq \varepsilon \sum_1^n \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon,$$

si $g \in V$. D'où $d(f,g) \leq \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} < r, \forall g \in V$ donc $V \subset \Omega$.

c) La question précèdente montre que l'application $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \to (K, d)$ est continue. Or K est compacte faible $\star$, donc(K, d) est compact.

d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $A_n = \{f \in \ell^\infty : | < f, x^n > | \leq \varepsilon\}$ alors A_n est fermé faible $\star$, et $F_k = K \cap \bigcap_{n \geq k} A_n$ est aussi fermé faible $\star$ dans K compact donc F_k est compact faible $\star$. Son image par $id : (K, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)) \to (K, d)$ (qui est continue) est compacte donc fermée dans (K, d).
$K = \bigcup_k F_k$ car $< f, x^n > \to 0, \forall f \in \ell^\infty$. Enfin, (K, d) métrique compact est complet, on peut donc appliquer le lemme de Baire : il existe k_0 tel que $\text{Int}F_{k_0} \neq \emptyset$. Donc il existe $f_0 \in K$, $\exists \rho > 0$ tels que $K \cap B_d(f_0, \rho) \subset F_{k_0}$.

e) En choisissant f comme dans l'énoncé, on a,

$$d(f, f^0) \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}} < \rho.$$

Donc $f \in F_{k_0}$ et

$$| < f, x^n > | = | \sum_1^N f_0^i x_i^n + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\pm x_i^n)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq k_0.$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |f_0^i x_i^n| \leq \varepsilon + \sum_1^N |x_i^n|,$$

car $f^0 \in K$, d'où

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n| \leq \varepsilon + 2 \sum_{1}^{N} |x_i^n|, \quad \forall n \geq k_0.$$

f) i étant fixé, $x_i^n \to 0$ car $x_i^n =< e^i, x^n >$, donc $\exists I$ tel que $\forall n \geq I$, $|x_i^n| \leq \frac{\varepsilon}{2N}$.
Dès que $n \geq \max(k_0, I)$, on a $\|x^n\|_1 \leq 2\varepsilon$ d'où $x^n \to 0$ dans ℓ^1.
5) Comme ℓ^1 n'est pas de dimension finie, les topologies faibles et fortes ne sont pas équivalentes et cette application ne peut donc pas être continue.