Analyse Fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD 7 : Espaces de Hilbert

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert. Déterminer la projection orthogonale sur sa boule unité fermée. (Faire un dessin).

Exercice 2

L'espace $L^p(\mathbf{R})$, muni de sa norme usuelle avec $1 \leq p \leq \infty$, est-il un espace de Hilbert ?

Exercice 3 Projection orthogonale dans L^2

On considère l'espace de Hilbert réel $L^2 = L^2(\mathbf{R})$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, on note

$$C = \left\{ f \in L^2 : \alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ p.p.} \right\}.$$

1) Montrer que C est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.
On suppose désormais que $\alpha\beta \leq 0$.
2) Montrer que C est un convexe fermé de L^2.
3) Soit $f \in L^2$, montrer que sa projection orthogonale sur C est donnée par

$$P_C f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\} \text{ p.p.}$$

Exercice 4

1) Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 dx,$$

et trouver

$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx,$$

où g est soumis aux contraintes

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

2) Si $x_0 \in H$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, énoncer le problème de maximum correspondant à $\min\{\|x_0 - x\|,\ x \in M\}$ comme dans la question précédente.

Exercice 5 Théorème de Lax-Milgram, lemme de Céa et méthode de Galerkin

Soit H un espace de Hilbert réel.
Soit $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue (i.e. $\exists M > 0$ tel que $\forall u, v \in H$, $|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$) et coercive (i.e. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in H$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$).
Enfin, soit $\ell \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbf{R})$.
1) Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u,v) = \ell(v)$. (C'est Lax-Milgram)
2) Soit V_h un sous-espace vectoriel fermé $\subset H$ et soit $u \in H$ la solution de $a(u,v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.

a) Vérifier que $\exists! u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v) = \ell(v), \forall v \in V_h$ et que $\|u_h\| \leq \frac{\|\ell\|}{\alpha}$. (C'est une condition de stabilité)

b) Montrer que
$$\|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h).$$
C'est le lemme de Céa.
Ici, a est symétrique, on peut donc remplacer $\frac{M}{\alpha}$ par $\sqrt{\frac{M}{\alpha}}$ dans cette inégalité. Pourquoi ?
3) On suppose qu'il existe une suite de sous-espaces $(V_n)_{n\geq 1}$ de H telle que
$$\begin{cases} (i) & \mathrm{dim} V_n < \infty, \\ (ii) & V_n \subset V_{n+1}, \\ (iii) & \bigcup_n V_n \text{ est dense dans H.} \end{cases}$$
On note u_n la solution de $a(u_n, v) = \ell(v), \forall v \in V_n$ et $\delta_n = \inf\{\|u - w\|,\ w \in V_n\}$.
a) Montrer que δ_n est atteint.
b) Montrer que $\delta_n \longrightarrow 0$.
c) Montrer que u_n converge vers u dans H.

Remarque : Dans le cas où H est séparable, si $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H et si on pose $V_n = vect\{e_1, ..., e_n\}$, alors la question 3) ci-dessus est connue sous le nom de "Méthode de Galerkin".

Exercice 6 Un peu de calcul différentiel ? ineq diff ?

Corrigé

Exercice 1
On trouve $Pu = u$ si $\|u\| \leq 1$. Si $\|u\| > 1$, pour tout v avec $\|v\| \leq 1$, on a

$$\|u - v\| \geq \|u\| - \|v\| \geq \|u\| - 1 = \|u - \frac{u}{\|u\|}\|.$$

Donc $Pu = \frac{u}{\|u\|}$.

Exercice 2
Déjà, si $p = 2$, on sait que L^2 est un Hilbert.
Soient $f = \mathbf{I}_{]0,1[}$ et $g = \mathbf{I}_{]1,2[}$. Alors $f, g \in L^p$ pour tout $p \geq 1$ et $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$.
D'autre part $\|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$.
Pour $p \neq 2$, on a donc $\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2$.
L'identité du parallélogramme n'est donc pas satisfaite si $p \neq 2$. Ce qui prouve que la norme p ne dérive pas d'un produit scalaire dans ce cas.

Exercice 3
1) Si $\alpha\beta > 0$ (donc non nuls et de même signe), on a alors pour $f \in C$, $|f| \geq \gamma = \min(|\alpha|, |\beta|) > 0$ p.p.. Donc $\int f^2 \geq \infty$, en contradiction avec $f \in L^2$. Donc $C = \emptyset$.
Si maintenant $\alpha\beta \leq 0$, on a alors $\alpha \leq 0 \leq \beta$ donc $0 \in C$. C n'est pas vide.
2) On sait déjà que C n'est pas vide. Il est facile de voir que C est convexe. Montrons que C est fermé : soit $(f_n)_n \subset C$ telle que $f_n \to f$ dans L^2. Par la réciproque du TCD, il existe une sous-suite, encore notée f_n, telle que $f_n \to f$ p.p. et pour tout n, $\alpha \leq f_n(x) \leq \beta$ p.p. On en déduit $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ p.p. donc $f \in C$, C est fermé.
3) Soit $f \in L^2$, on pose

$$g = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\} = \alpha\mathbf{I}_{\{f<\alpha\}} + f\mathbf{I}_{\{\alpha\leq f\leq\beta\}} + \beta\mathbf{I}_{\{f>\beta\}}.$$

Comme $|g| \leq |f|$ p.p., on a bien $g \in L^2$. Enfin, il est facile de voir que $g \in C$.
Pour montrer que g est la projection orthogonale de f sur C, on utilise la caractérisation du projeté : si $h \in C$,

$$\begin{aligned}(f - g, g - h) &= \int (f - g)(g - h), \\ &= \int (f - \alpha)(\alpha - h)\mathbf{I}_{\{f<\alpha\}} + \int (f - \beta)(\beta - h)\mathbf{I}_{\{f>\beta\}} \geq 0,\end{aligned}$$

car $\alpha \leq h \leq \beta$ p.p. On en déduit que $g = P_C f$.

Exercice 4

1) On note $\mathbf{P}_2$ =vect$\{1, x, x^2\}$, c'est un espace vectoriel de dimension finie donc fermé. Par le théorème de projection dans $L^2(-1,1)$, $\exists! P \in \mathbf{P}_2$ tel que $d(x^3, \mathbf{P}_2) = \|x^3 - P\|$ et $(x^3 - P, v) = 0, \forall v \in \mathbf{P}_2$ où $(,)$ dénote le produit scalaire usuel dans L^2. En choisissant successivement $v = 1, x, x^2$, on détermine explicitement P et on trouve $P(x) = \frac{3}{5}x$ d'où $\|x^3 - P\|^2 = \int_{-1}^{1} |x^3 - \frac{3}{5}x|^2 dx = \frac{8}{175}$.

Si $g \in \mathbf{P}_2^{\perp}$ alors

$$\begin{aligned} (x^3, g) &= (x^3 - q, g), \quad \forall q \in \mathbf{P}_2, \\ &\leq d(x^3, \mathbf{P}_2)\|g\|, \end{aligned}$$

donc finalement si $g \in \mathbf{P}_2^{\perp}$ et $\|g\| = 1$ alors $(x^3, g) \leq \|x^3 - P\|$ où $P(x) = \frac{3}{5}x$. Soit $g_0 = \frac{x^3 - P}{\|x^3 - P\|}$ alors $g_0 \in \mathbf{P}_2^{\perp}$, $\|g_0\| = 1$ et $(x^3, g_0) = (x^3 - P, g_0) = \|x^3 - P\| = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$ donc

$$\max\{\int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx \ : \ g \in \mathbf{P}_2^{\perp}, \|g\| = 1\} = (x^3, g_0) = d(x^3, \mathbf{P}_2).$$

2) Si $x_0 \in H$ et si M est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $d(x_0, M) = \|x_0 - P_M x_0\|$ où $P_M x_0$ est la projection orthogonale de x_0 sur M et $(x_0 - P_M x_0, v) = 0, \forall v \in M$. Si $y \in M^{\perp}$, $\|y\| = 1$ alors $(x_0, y) = (x_0 - P_M x_0, y) \leq \|x_0 - P_M x_0\|$ donc

$$\max\{(x_0, y) : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} \leq \|x_0 - P_M x_0\| = \min\{\|x_0 - x\|, x \in M\},$$

et

$$(x_0 - P_M x_0, \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}) = (x_0, \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}) = \|x_0 - P_M x_0\|.$$

Donc le max est atteint en $y = \frac{x_0 - P_M x_0}{\|x_0 - P_M x_0\|}$ et sa valeur est égale à $d(x_0, M)$ d'où

$$\max\{(x_0, y) : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} = \min\{\|x_0 - x\|, x \in M\}.$$

Exercice 5

1) On peut vérifier facilement que a définit un nouveau produit scalaire sur H. Sa norme associée est équivalente à celle de H grâce à la continuité et à la coercivité de a. Donc l'espace H muni de a est aussi un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz s'applique : ℓ continue sur H est aussi continue pour a, il existe donc un unique $u \in H$ tel que $\ell(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in H$.

2) a) V_h est fermé dans H donc Lax-Milgram s'applique et il existe un unique $u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_n$, $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$. Et comme $\alpha\|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) \leq \|\ell\|\|u_h\|$, on a $\|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_{H'}$.

b) $\forall w \in V_h$, $a(u_h, w) = \ell(w) = a(u, w)$ donc $a(u_h - u, w) = 0$. Donc si $w \in V_h$,

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) = a(u - u_h, u - w)$$

$$\Longrightarrow \alpha\|u_h - u\|^2 \leq a(u - u_h, u - w) \leq M\|u_h - u\| \, \|u - w\|, \ \forall w \in V_h,$$
$$\Longrightarrow \|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h).$$

3) a) V_n est convexe fermé donc par le théorème de projection il existe un unique $v_n \in V_n$ tel que $\delta_n = \|u - v_n\|$.
b) Comme $V_n \subset V_{n+1}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n$. La suite $(\delta_n)_n$ est décroissante positive donc elle converge. D'autre part, $\overline{\bigcup V_n} = V$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\|u - w_N\| \leq \varepsilon$ où $w_N \in V_N$. Donc $\delta_n \leq \varepsilon$ et ceci $\forall n \geq N$, d'où $\delta_n \to 0$.
c) On applique le lemme de Céa à V_n, alors

$$\|u_n - u\| \leq \frac{M}{\alpha}\delta_n.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ converge vers u dans H.

Exercice 6