TD Espaces de Lebesgue et topologie faible

Exercice 1
On considère $L^1(\mathbf{R})$ et son dual $L^\infty(\mathbf{R})$. Soit $g \in L^\infty$ et la suite $g_n(x) = g(x-n)$.
1) Montrer par un exemple que g_n est bornée dans L^∞ mais qu'elle ne converge pas nécessairement faiblement-*.
2) Donner un exemple simple de fonction g non nulle telle que la convergence faible * a bien lieu.

Exercice 2
Soit $E = L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ muni de $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$.
1) Vérifier que $(E, \|f\|)$ est un espace de Banach.
Soit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1 \in L^\infty(\mathbf{R})$ et $f_2 \in L^2(\mathbf{R})$, montrer que

$$u \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)u(x)dx \in E'.$$

2) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, montrer que

$$u \mapsto \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx \in E'.$$

(Décomposer l'intégrale suivant les ensembles $[|x| > M]$ et $[|x| \leq M]$.)
3) Soit $K = \{u \in E : u \geq 0 \text{ p.p. et } \int_{\mathbf{R}} udx \leq 1\}$.
Montrer que K est un convexe fermé de E.

Soit $(u_n)_n \subset K$ et $u \in L^2(\mathbf{R})$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(\mathbf{R})$ faible.
4) Montrer que $u \in K$.
5) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} u_n dx \longrightarrow \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx.$$

6) Pour $u \in E$, on définit

$$J(u) = \int_{\mathbf{R}} u^2 dx - \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx,$$

où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.
Montrer que $\exists C \in \mathbf{R}$ tel que $J(u) \geq C, \forall u \in K$.

On pose $m = \inf_{u \in K} J(u)$. On cherche à prouver que cet inf est atteint.
7) Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $J(u_n) \longrightarrow m$. Montrer que $\|u_n\|$ reste bornée.
8) Extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(\mathbf{R})$ et conclure.
9) E est-il réflexif ?

Exercice 3
Soit $\Omega =]0,1[$ et soit $f_n(x) = n^{\frac{1}{p}} e^{-nx}$ où $1 \leq p < +\infty$.
1) Montrer que $f_n \to 0$ p.p. dans Ω, $(f_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $f_n \not\to 0$ dans $L^p(\Omega)$.
2) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et soit T l'application définie sur $L^p(\Omega)$ par $T(g) = \int_0^1 g\, \varphi\, dx$, montrer que $T \in (L^p(\Omega))'$.
3) Si $1 < p < +\infty$, montrer que $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^p(\Omega)$ faible.
Si $p = 1$, montrer que $f_n \not\rightharpoonup 0$ dans $L^1(\Omega)$ faible et qu'il n'existe aucune sous-suite de $(f_n)_n$ convergeant faiblement dans $L^1(\Omega)$. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 4
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$ et soit f une fonction mesurable réelle sur Ω.
On pose $K = \{u \in L^p(\Omega);\ u \geq f\ p.p.\}$.
1) Si $1 \leq p < +\infty$, vérifier que K est fermé pour la topologie faible de $L^p(\Omega)$.
2) On considère le cas $p = +\infty$.
a) Montrer que

$$K = \{u \in L^\infty(\Omega);\ \forall \varphi \in L^1(\Omega),\ \varphi \geq 0,\ f\varphi \in L^1(\Omega), \text{on ait } \int_\Omega u\varphi \geq \int_\Omega f\varphi\}.$$

(On pourra d'abord supposer que $|\Omega| < \infty$.)
b) En déduire que K est fermé faible $\star$ dans $L^\infty(\Omega)$.
c) Soient f_1 et f_2 dans $L^\infty(\Omega)$ telles que $f_1 \leq f_2$ p.p. Montrer que "l'intervalle" $\{u \in L^\infty(\Omega) : f_1 \leq\ u \leq\ f_2\, p.p.\}$ est compact faible $\star$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Corrigé

Exercice 1

1) On écrit pour tout $x \in \mathbf{R}$ $x = n + r$, $0 \leq r < 1$ et on pose $g(n+r) = (-1)^n$. On considère également $f = \mathbf{I}_{[0,\,1]} \in L^1(\mathbf{R})$. On a donc $\int f(x)g(x-n) = (-1)^n$ qui ne converge pas. Donc la suite $g_n(x) = g(x-n)$ ne converge pas faiblement-*.
2) Franchement, ce n'est pas compliqué : il suffit de prendre $g = 1$.

Exercice 2

1) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^1 et L^2. Donc $\exists f \in L^1$, $\exists g \in L^2$ telles que $f_n \longrightarrow f$ dans L^1 et $f_n \longrightarrow g$ dans L^2. En utilisant la "réciproque" du théorème de convergence dominée, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \longrightarrow f$ p.p. et $f_{n_k} \longrightarrow g$ dans L^2, donc il existe une sous-suite $(f_{n_{k_l}})_l$ telle que $f_{n_{k_l}} \longrightarrow g$ p.p. D'où $f = g$ p.p. et $f_n \longrightarrow f$ dans E, donc E est un espace de Banach.
En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\int_{\mathbf{R}} f(x)u(x)dx| \leq \|f_1\|_\infty \|u\|_1 + \|f_2\|_2 \, \|u\|_2 \leq (\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_2) \, \|u\|.$$

Donc $u \mapsto \int fudx \in E'$.
2) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on peut toujours écrire

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} udx = \int_{[|x|>M]} \frac{1}{|x|^\alpha} udx + \int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha} udx.$$

Soient $f_1(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\mathbf{I}_{[|x|>M]}$ et $f_2(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\mathbf{I}_{[|x|\leq M]}$, alors $\alpha > 0 \Longrightarrow f_1 \in L^\infty(\mathbf{R})$ et $2\alpha < 1 \Longrightarrow f_2 \in L^2(\mathbf{R})$. La question 1) permet alors de conclure.
3) K est évidemment convexe, montrons qu'il est fermé. Soit $(u_n)_n \subset K$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E, alors $u_n \longrightarrow u$ dans L^1 donc $\int u_n \longrightarrow \int u$ et on en déduit que $\int u \leq 1$. La convergence dans L^1 implique aussi qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \longrightarrow u$ p.p. (voir réciproque du TCD) donc $u \geq 0$ p.p. et on en conclut que $u \in K$. Donc K est fermé.
4) Posons $K_0 = \{u \in L^2 : u \geq 0\,\text{p.p.}\}$ alors K_0 est un convexe fermé fort de L^2 donc fermé faible de L^2, donc $u \in K_0$. Il reste à montrer que $u \in L^1$ et $\int u \leq 1$.
Soit A un ensemble mesurable de mesure finie (notation $|A| < \infty$), alors $\mathbf{I}_A \in L^2$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2 faible $\Longrightarrow \int \mathbf{I}_A u_n \longrightarrow \int \mathbf{I}_A u$. Or $\int \mathbf{I}_A u_n \leq \int u_n \leq 1$ donc $\forall A$ tel que $|A| < \infty$, $\int_A u \leq 1$. Pour passer à $\mathbf{R}$ tout entier, on utilise le lemme de Fatou.
Soit $v_n = \mathbf{I}_{(-n,n)}u$ alors $v_n \in L^1$, $v_n \geq 0$ p.p., $v_n \longrightarrow u$ p.p. et $\sup_n \int v_n \leq 1$, donc par le lemme de Fatou, on en déduit que $u \in L^1$ et $\int u \leq \liminf \int v_n \leq 1$. Donc $u \in K$.

5) Soit $M > 0$, alors

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| &\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + |\int_{[|x|>M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)|, \\
&\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + \frac{1}{M^\alpha}(\|u_n\|_1 + \|u\|_1), \\
&\leq |\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| + \frac{2}{M^\alpha},
\end{aligned}$$

puisque $u_n, u \in K$.
Comme u_n converge faiblement vers u dans L^2,

$$\int_{[|x|\leq M]} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u) \longrightarrow 0.$$

Donc en prenant la limite sup sur n, on obtient

$$\limsup |\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| \leq \frac{2}{M^\alpha},$$

et ceci $\forall M > 0$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on a $\limsup |\int \frac{1}{|x|^\alpha}(u_n - u)| = 0$ d'où

$$\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_n \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u.$$

6) On peut écrire, par exemple, pour $u \in K$,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} u = \int_{[|x|\leq 1]} \frac{1}{|x|^\alpha} u + \int_{[|x|>1]} \frac{1}{|x|^\alpha} u \leq \mathcal{C}_0 \|u\|_2 + \|u\|_1 \leq \mathcal{C}_0 \|u\|_2 + 1,$$

où $\mathcal{C}_0 = \|\mathbf{I}_{[|x|\leq 1]} \frac{1}{|x|^\alpha}\|_2$. Alors pour $u \in K$, on a

$$J(u) \geq \|u\|_2^2 - \mathcal{C}_0 \|u\|_2 - 1 \geq C,$$

où C est une constante indépendante de $u \in K$. (Par exemple $C = -(1 + \frac{\mathcal{C}_0^2}{4})$ convient.)
7) Soit $(u_n)_n \subset K$, une suite minimisante, par exemple telle que $m \leq J(u_n) \leq m + \frac{1}{n}$. D'après la question 6), on a

$$\|u_n\|_2^2 - \mathcal{C}_0 \|u_n\|_2 - 1 \leq J(u_n) \leq m + 1, \quad \forall n,$$

donc nécessairement $\|u_n\|_2$ reste bornée, donc $\exists M_0$ tel que $\forall n$, $\|u_n\|_2 \leq M_0$ alors $\|u_n\| \leq M_0 + 1$.
8) La suite $(u_n)_n$ est bornée dans L^2 réflexif, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans L^2 faible et $u_{n_k} \in K$. Alors la question 4) montre que $u \in K$ et la question 5) montre que $\int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k} \longrightarrow \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$.
D'autre part,

$$J(u_{n_k}) \leq m + \frac{1}{n_k} \text{ donc } \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \frac{1}{n_k} + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u_{n_k}.$$

On prend les lim inf dans cette inégalité, on obtient $\liminf \|u_{n_k}\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$. Comme $\| \ \|_2^2$ est s.c.i. faible, on a $\|u\|_2^2 \leq \liminf \|u_{n_k}\|_2^2$, donc finalement $\|u\|_2^2 \leq m + \int \frac{1}{|x|^\alpha} u$, soit $J(u) \leq m$. D'où $J(u) = m$.
9) La réponse est non. En effet supposons E réflexif. Soit $f_n = \mathbf{I}_{(n,n+1)}$ alors $\|f_n\|_1 = \|f_n\|_2 = 1$ donc $\|f_n\| = 2$. Si E est réflexif alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans E faible.
Soit $g \equiv 1$ alors $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ et $u \mapsto \int gu \in E'$ donc $1 = \int f_{n_k} \longrightarrow \int f$, d'où $\int f = 1$.
Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ alors $u \mapsto \int gu \in E'$ et $\int gf_{n_k} \longrightarrow \int gf$. Or, $\exists N$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset \overline{B}(0,N)$ et si $k \geq k_0$, $n_k > N$, donc $f_{n_k} \equiv 0$ sur $\mathrm{supp}(g)$ et $\int gf_{n_k} = 0$, ceci pour tout $k \geq k_0$. On en déduit que $\int fg = 0, \forall g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ donc $f = 0$ p.p. or $\int f = 1$, c'est absurde.

Exercice 3
1) $f_n(x) = n^{\frac{1}{p}} e^{-nx}$ avec $1 \leq p < \infty$.
$f_n \to 0$ p.p. sur $]0,1[$ car par exemple $f_n \to 0$ uniformément sut tout compact de $]0,1[$. On a

$$\int_0^1 |f_n|^p = \|f_n\|_p^p = \frac{1}{p}(1 - e^{-np}) \longrightarrow \frac{1}{p},$$

quand n tend vers l'infini. Donc la suite (f_n) est bornée dans L^p et $f_n \not\to 0$ dans L^p car $\|f_n\|_p^p \to \frac{1}{p} \neq 0$.
2) Appliquer l'inégalité de Hölder.
3) Si $1 < p < \infty$, L^p est réflexif et $(f_n)_n$ est bornée donc il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^p faible. En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0,1[)$, $\int_0^1 f_{n_k}\varphi \to \int_0^1 f\varphi$. Or $f_{n_k} \to 0$ uniformément sur le support compact de φ donc $\int_0^1 f\varphi = 0$ et ceci $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0,1[)$. On en déduit que $f = 0$ p.p. et c'est toute la suite f_n qui converge faiblement vers 0 (raisonner par l'absurde).
Si $p = 1$, supposons que la suite f_n converge faiblement vers 0 dans L^1 faible. Comme $f \mapsto \int_0^1 f \in (L^1)'$, on aurait $\int_0^1 f_n \to 0$ or $\int_0^1 f_n \to 1$ donc c'est absurde et $f_n \not\rightharpoonup 0$ dans L^1 faible.
Si $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^1 faible alors comme ci-dessus : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(]0,1[)$, $\int_0^1 f_{n_k}\varphi \to \int_0^1 f\varphi$ et $f_{n_k} \to 0$ uniformément sur le support compact de φ donc $\int_0^1 f\varphi = 0$. On en déduit que $f = 0$ p.p. mais $\int_0^1 f_{n_k} \to 1 \neq 0$, donc c'est impossible.
On peut en conclure que $L^1(0,1)$ n'est pas réflexif.

Exercice 4
On pose $K = \{u \in L^p(\Omega);\ u \geq f\ p.p.\}$.
1) K est convexe fermé fort donc fermé faible.
2) a) Posons $K_\varphi = \{u \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\varphi \geq \int_\Omega f\varphi\}$ où $\varphi \in L^1$, $\varphi \geq 0$ p.p. et est telle que $f\varphi \in L^1$. Soit $K_0 = \bigcap_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ où l'intersection est prise sur l'ensemble

$$\Phi = \{\varphi \in L^1,\ \varphi \geq 0,\ f\varphi \in L^1\}.$$

Montrons que $K = K_0$. Il est clair que $K \subset K_0$. Soit donc $u \in K_0$, alors $\forall \varphi \in L^1$ telles que $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$, on a $\int u\varphi \geq \int f\varphi$.
Soit $\Omega_n = \{x : |f(x)| < n\}$ et soit $E = \{x : u(x) < f(x)\}$, on va montrer que $|E| = 0$.
Supposons d'abord $|\Omega| < \infty$.
On a $\Omega = \bigcup_n \uparrow \Omega_n$. Soit $\varphi = \mathbf{I}_{E\cap\Omega_n}$, alors $\varphi \in L^1(\Omega)$ car $|\Omega| < \infty$, $\varphi \geq 0$ p.p. et $f\varphi \in L^1$ car $|f| < n$. Alors

$$\int_{E\cap\Omega_n} (u-f)\varphi = \int_\Omega (u-f)\varphi \geq 0.$$

Or $u - f < 0$ sur $E \cap \Omega_n$ donc nécessairement $|E \cap \Omega_n| = 0$ et ceci $\forall n$, donc $E = \cup_n (E \cap \Omega_n)$ est négligeable.
Si $|\Omega| = +\infty$, alors $\Omega = \cup_k \uparrow \omega_k$ où $\omega_k = \Omega \cap B(0,k)$. On se restreint donc à ω_k, $|\omega_k| < \infty$ et $E = \bigcup\limits_{n,k} E_{n,k}$ où $E_{n,k} = E \cap \Omega_n \cap \omega_k$.
Soit $\varphi = \mathbf{I}_{E_{n,k}}$ alors comme tout à l'heure, $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ p.p., $f\varphi \in L^1$ et on montre de la même façon que ci-dessus que $E_{n,k}$ est négligeable. Donc E est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. On en conclut que $u \in K$ d'où $K = K_0$.
b) Si $\varphi \in L^1$, $u \mapsto \int u\varphi$ est continue sur L^∞ pour la topologie faible $\star$ donc K_φ est fermé faible $\star$ et $K = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} K_\varphi$ est fermé faible $\star$.
c) Les boules fermées sont compactes faible $\star$ et $K \subset \overline{B}(0, \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty)$ donc K est compact faible $\star$.