Analyse fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD Banach-Steinhaus et Séries de Fourier

Exercice 1 Théorème de Banach-Steinhaus

Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E,F)$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que

$$\forall x \in E,\ \sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty.$$

Montrer que

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty,$$

c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall i \in I,\ \forall x \in E,\ \|T_i x\| \leq c\|x\|.$$

Exercice 2 Moyenne de Césaro

1) Soit $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $s_n \longrightarrow s$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j \longrightarrow s.$$

2) Montrer qu'il existe $(s_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que $(s_n)_n$ ne converge pas et

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j \text{ converge.}$$

Exercice 3 Séries de Fourier

On note $\mathcal{C}(\Pi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}),\ 2\pi\text{-périodiques}\}$, que l'on munit de $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$. On notera $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$. Soit $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

On note

$$\begin{aligned} S_n(f,t) &= \sum_{-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt},\ \ n \in \mathbf{N} \text{ et} \\ \sigma_n(f,t) &= \frac{1}{n+1}\sum_0^n S_j(f,t). \end{aligned}$$

1) On pose $D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{ikt}$ et $K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{0}^{N} D_j(t)$, pour $N \in \mathbf{N}$.
Montrer que

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \neq 0, \quad D_N(0) = 2N+1, \\ K_N(t) &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2, \quad t \neq 0, \quad K_N(0) = N+1. \end{aligned}$$

2) Vérifier que $K_N(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\|K_N\|_1 = 1$ et que $\forall \delta > 0$, $K_N \longrightarrow 0$ uniformément sur $\delta \leq |t| \leq \pi$.
3) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. (Remarquer que $\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t-x)dx = K_n \star f(t) = f \star K_n(t)$.)
4) On appelle polynôme trigonométrique, toute fonction de la forme $\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikt}$.
En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et que si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $f = g$.

5) Théorème de Du Bois-Reymond :
$\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\limsup |S_n(f,0)| = +\infty$.
Pour démontrer ce résultat, on définit $\Lambda_n : \mathcal{C}(\Pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Lambda_n(f) = S_n(f,0)$.

a) Vérifier que $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$.
b) Montrer que $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.
c) Montrer que $\|D_n\|_1 \longrightarrow +\infty$ (par exemple : $\|D_n\|_1$ est plus grand que la somme partielle d'une série divergente.)
d) En déduire que $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f,0)| = +\infty$.

6) Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$ telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)dx = 0$ pour tout polynôme p trigonométrique, vérifier que $f = 0$ p.p.

7) On note $C_0(\mathbb{Z}) = \{c = (c_n)_n : c_n \to 0 \text{ quand } n \to \pm\infty\}$. Muni de la norme ∞, c'est un espace de banach.
Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$, on pose $c(f) = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Vérifier que $c(f) \in C_0(\mathbb{Z})$.
Montrer que l'application $T : L^1(-\pi, \pi) \to C_0(\mathbb{Z})$ définie par $T(f) = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire continue injective mais non surjective.

Corrigé :

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \{x \in E,\ \forall i,\ \|T_i x\| \leq n\}$. Chaque X_n est une intersection de fermés et est donc fermé. Par hypothèse, $\bigcup_n X_n = E$. On déduit du lemme de Baire que l'un des X_n, X_{n_0}, doit être d'intérieur non vide. Soient donc $x_0 \in X_{n_0}$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Alors

$$\forall i \in I,\ \forall z \in B(0,1),\ \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0,$$

et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\forall z \in B(0,1),\ r\|T_i(z)\| \leq n_0 + \|T_i(x_0)\| \leq 2n_0,\ \text{soit}$$

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Remarque : Pour que le théorème de Banach-Steinhaus marche, il suffit que l'espace de départ E soit complet. L'espace d'arrivée F peut être simplement vectoriel normé.

Exercice 2

1) Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|s_j - s| \leq \varepsilon$ et

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s = \frac{1}{n+1}\sum_0^n (s_j - s).$$

Donc pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s| &\leq \frac{1}{n+1}(\sum_0^N |s_j - s| + \sum_{N+1}^n |s_j - s|), \\ &\leq \frac{1}{n+1}(\sum_0^N |s_j - s| + (n-N)\varepsilon). \end{aligned}$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \geq N$ tel que $\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon$, donc si $n \geq N_1$, on a $\sum_0^N |s_j - s| \leq N_1\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon$ et d'autre part $(n-N)\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon$ d'où

$$|\frac{1}{n+1}\sum_0^n s_j - s| \leq 2\varepsilon.$$

2) Soit $s_n = (-1)^n$ alors $(s_n)_n$ ne converge pas et $|\sum_0^n s_j| \leq 1$ donc

$$|\frac{1}{n+1}\sum_0^n (-1)^j| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Exercice 3

1) On a directement $D_N(0) = 2N+1$ et $K_N(0) = N+1$.

D'autre part, $e^{i\frac{t}{2}} D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{i(k+\frac{1}{2})t}$ et $e^{-i\frac{t}{2}} D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{i(k-\frac{1}{2})t}$ donc $2i\sin(\frac{t}{2})D_N(t) = \sum_{-N}^{N} (e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{i(k-\frac{1}{2})t}) = e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}$.

D'où $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ si $t \neq 0$.

On multiplie maintenant $K_N(t)$ par $\frac{2\sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}$ alors

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} (2\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2}) + 2\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{3t}{2}) + ... + 2\sin(\frac{t}{2})\sin((N+\frac{1}{2})t)).$$

On utilise ensuite l'égalité $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ pour obtenir

$$K_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos(N+1)t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})},$$

pour $t \neq 0$.

2) Il est clair que $K_N(t) \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$ et que K_N est 2π-périodique. De $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta_{k,0}$ on déduit que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D_j(t)dt = 1$ et $\|K_N\|_1 = 1$. Enfin si $\delta \leq |t| \leq \pi$ où $\delta > 0$, on a

$$K_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\right)^2 \longrightarrow 0,$$

quand $N \to \infty$.

3) On a

$$\begin{aligned} S_n(f,t) &= \sum_{-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt}, \\ &= \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ik(t-x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t-x) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) K_n(x) dx, \end{aligned}$$

car f et K_n sont 2π-périodiques. Comme $\|K_N\|_1 = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f,t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t)) K_n(x) dx \right|, \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|x|\leq\delta} |f(t-x) - f(t)| K_n(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta\leq|x|\leq\pi} 2\|f\|_\infty K_n(x) dx. \right. \end{aligned}$$

La fonction f étant uniformément continue, pour $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x-y| \leq \delta$. Pour ce δ, d'après 2), $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ $|K_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$, $\forall x$ tel que $\delta \leq |x| \leq \pi$, d'où

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|K_N\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} dx \leq \varepsilon,$$

et ceci $\forall t$, donc $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ uniformément sur $[-\pi,\pi]$.
4) $\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t-x)dx$ est un polynôme trigonométrique, donc 3) montre que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\Pi)$.
Si $f, g \in \mathcal{C}(\Pi)$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ alors $0 = \sigma_n(f,t) - \sigma_n(g,t) \longrightarrow f(t) - g(t), \forall t$, donc $f(t) = g(t), \forall t \in [-\pi,\pi]$.
5) a) $\Lambda_n(f) = S_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(-t)dt$, pour $n \geq 0$ donc Λ_n est linéaire et $|\Lambda_n(f)| \leq \|D_n\|_1\|f\|_\infty$. Donc $\Lambda_n \in (\mathcal{C}(\Pi))'$ et $\|\Lambda_n\| \leq \|D_n\|_1$.
b) Soit $g_n(t) = \text{sign}(D_n(-t))$ alors il existe une suite $(f_j)_j$ dans $\mathcal{C}(\Pi)$ telle que $-1 \leq f_j \leq 1, \forall j$ et $f_j(t) \longrightarrow g_n(t)$ p.p. quand $j \to \infty$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)D_n(-t)dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(-t)|dt = \|D_n\|_1.$$

De $|\Lambda_n(f_j)| \leq \|\Lambda_n\|$, on déduit $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$.
c) Comme $|\sin\frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}$, pour $0 \leq t \leq \pi$,

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin(n+\frac{1}{2})t|\,\frac{dt}{t}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\|D_n\|_1 &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}|\sin x|\frac{dx}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\frac{dx}{x},\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2}\log(n+1),\end{aligned}$$

D'où $\|D_n\|_1 \longrightarrow +\infty$ quand $n \to \infty$.
d) Si $\forall f \in \mathcal{C}(\Pi)$, $\exists C_f$ tel que $\forall n$, $|S_n(f,0)| \leq C_f$ alors par le théorème de Banach-Steinhaus $\exists M$ tel que $\forall n$, $\|\Lambda_n\| \leq M$ or c'est impossible d'après la question précédente. Donc $\exists f \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\sup_n |S_n(f,0)| = +\infty$.
6) On note $h = sign(f)$. Alors $|h| \leq 1$ p.p. et $\|h\|_1 \leq 1$. Comme les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(-\pi,\pi)$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{C}_c(]-\pi,\pi[)$ telle que $\|h - g\|_1 \leq \varepsilon$. On prolonge g à $\mathbf{R}$ par 2π-périodicité ($g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ puisque $g(-\pi) = g(\pi) = 0$). Alors d'aprés la question 4), $\exists p$ polynôme trigonométrique tel que $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Ensuite, on écrit

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fh = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(h - g + g - p + p).$$

Donc, $\|f\|_1 \leq \|h-g\|_1 + \|g-p\|_\infty \leq \epsilon$. Et ceci, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $f = 0$ p.p.
7) Par le Lemme de Riemann-Lebesgue, on sait déjà que $\widehat{f}(n) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$ donc $c(f) \in C_0(\mathbb{Z})$. On a aussi immédiatement $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.
L'application T est clairement linéaire et l'inégalité ci-dessus montre qu'elle est continue. Si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout n alors $\int_{-\pi}^{\pi} fp dx = 0$, pour tout polynôme trigonométrique p donc $f = 0$ p.p. et T est injective.
T ne peut pas être surjective sinon par le théorème de l'application ouverte (voir TD Baire-isomorphisme d'espaces de Banach), elle serait d'inverse continue. Il existerait donc une constante $M > 0$ telle que $\|f\|_1 \leq M\|c(f)\|_\infty$. Mais une telle inégalité est contredite par les D_n, en effet $\widehat{D_n}(k) = 0$ ou 1, donc $\|c(D_n)\|_\infty = 1$ alors qu'on a vu ci-dessus que $\|D_n\|_1 \to +\infty$.