Analyse de Fourier
ENS de Cachan 2009-2010

TD Révision

Exercice 1
On note $\Omega = [0, 2\pi]^2$ et $\partial\Omega$ son bord. Supposons que $u \in C^{\infty}_{per}([0, 2\pi]^2)$. On note $u(x_0, .)$ la restriction, ou "trace" de u au segment $\{x_0\} \times [0, 2\pi]$, $u(., y_0)$ sa trace sur le segment $[0, 2\pi] \times \{y_0\}$. L'objectif de l'exercice est de montrer que si $u \in H^1([0, 2\pi]^2)$, alors u a une trace bien définie sur chaque segment du domaine, et en particulier sur le bord du domaine qui est l'union des quatre segments.
1) En utilisant que

$$u(x_0, y) = u(x, y) + \int_x^{x_0} \frac{\partial u}{\partial x}(t, y)dt,$$

déduire que

$$|u(x_0, y)| \leq |u(x, y)| + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{x_0} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Par des intégrations adéquates en x et y, déduire qu'il existe une constante C telle que

$$||u(x_0, .)||^2_{L2([0,2\pi])} = \int_{[0,2\pi]} |u(x_0, y)2|dy \leq C||u||^2_{H^1_{per}([0,2\pi]^2)}.$$

3) Théorème de trace : utilisant la densité de C^{∞}_{per} dans H^1_{per}, en déduire que si u est dans $H^1_{per}([0, 2\pi]^2)$, u a un représentant qui vérifie l'inégalité de trace pour tout x_0, y_0, et en particulier sur le bord de $[0, 2\pi]^2$.

Exercice 2
1) Soit a un élément non nul d'un espace de Hilbert réel H. On note $a^{\perp} = \{y \in H : (y, a) = 0\}$. Démontrer que pour tout x dans H,

$$d(x, a^{\perp}) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $H = L^2(0, 1)$ défini par

$$F = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

Déterminer $F^{\perp}$. Calculer la distance à F de l'élément f de H défini par $f(x) = e^x$.

Exercice 3
Comparer $L^4(A)$ et $L^5(A)$ dans les cas $A = [0,1]$ et $A = \mathbb{R}$.

Exercice 4
1) Soit $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, existe-t'il g continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f = g$ p.p. ?
2) Les fonctions continues à support compact sont-elles denses dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 5 On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.
1) Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
2) Démontrer que $\Gamma(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$. (Utiliser le théorème de convergence monotone)

Exercice 6
On note $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup_n |x_n| < \infty\}$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1}|x_n|$.
Enfin, on note $\mathcal{C}_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0\}$.
1) Vérifier que ℓ^∞ et $\mathcal{C}_0$ munis de $\| \,.\, \|_\infty$ sont complets.
2) Soit $y = (y_1, y_2, ...) \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\geq 1}|y_n| < \infty$, on définit $\Lambda_y : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}$ par $\Lambda_y(x) = \sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$ si $x = (x_n)_n$. Montrer que Λ_y est linéaire et continue sur $\mathcal{C}_0$. Calculer $\|\Lambda_y\|$.
3) a) Soit $e^n = (e^n_k)_k$ avec $e^n_k = \delta_{nk}$ pour tout n. Soit $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_0$, montrer que la suite $x^N = \sum_1^N x_n e^n$ converge vers x dans $\mathcal{C}_0$.
b) Montrer que tout élément du dual topologique de $\mathcal{C}_0$ s'écrit comme un Λ_y pour un certain y.

Corrigé

Exercice 1

1) Si u est une fonction régulière $\in C^\infty_{per}([0,2\pi]^2)$ alors on peut écrire que $u(x_0,y) = u(x,y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(t,y)dt$ pour tout $(x_0,x,y) \in [0,2\pi]$. Puis en utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u(x_0,y)| \leq |u(x,y)| + \left(\int_{x_0}^{x} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}.$$

On a utilisé le fait que $\sqrt{|x-x_0|} \leq \sqrt{2\pi}$.

2) On élève l'inégalité ci-dessus au carré et on utilise $2ab \leq a^2+b^2$ alors

$$|u(x_0,y)|^2 \leq 2|u(x,y)|^2 + 4\pi \int_0^{2\pi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dt.$$

On intègre maintenant en y sur $[0,2\pi]$, on a

$$\int_0^{2\pi} |u(x_0,y)|^2 dy \leq 2\int_0^{2\pi} |u(x,y)|^2 dy + 4\pi \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dtdy.$$

Enfin, on intègre en x, alors

$$2\pi \int_0^{2\pi} |u(x_0,y)|^2 dy \leq 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x,y)|^2 dydx + 8\pi^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dtdy \leq 8\pi^2 \|u\|^2_{H^1}.$$

3) On déduit de cette inégalité que l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{x_0} : C^\infty_{per}([0,2\pi]^2) & \to & L^2([0,2\pi]), \\ u & \mapsto & u(x_0,.) \end{array}$$

est linéaire continue sur $C^\infty_{per}([0,2\pi]^2)$ muni de la norme H^1. Comme C^∞_{per} est dense dans H^1_{per} et que l'espace d'arrivée $L^2([0,2\pi])$ est complet, on peut appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues : γ_{x_0} se prolonge de façon unique à H^1_{per} tout entier en une application linéaire continue, appelée "trace", $\gamma_{x_0} : H^1_{per} \to L^2([0,2\pi])$ qui permet de définir $u(x_0,.) = \gamma_{x_0} u$. Et ceci, pour tout $x_0 \in [0,2\pi]$.

Exercice 2

1) Comme $\mathbb{R}a$ est un s.e.v. fermé de H, on peut utiliser la décomposition en somme directe orthogonale (cf poly) qui donne ici $H = \mathbb{R}a \oplus a^\perp$. Donc tout $x \in H$ peut s'écrire $x = \lambda a + h$ avec $h \in a^\perp$. Alors $(x,a) = \lambda \|a\|^2$ d'où

$$\|x-h\| = |\lambda|\|a\| = \frac{|(x,a)|}{\|a\|}.$$

Enfin, comme h est précisemment la projection orthogonale de x sur $a^{\perp}$, on en déduit le résultat.
2) On peut remarquer que $F = 1^{\perp}$ donc $F^{\perp} = 1^{\perp\perp} = vect1$. En utilisant 1), on a

$$d(f, F) = d(f, 1^{\perp}) = \frac{|\int_0^1 e^x dx|}{\|1\|} = e - 1.$$

Exercice 3
Si $A = [0, 1]$, montrons que $L^5(A) \subset L^4(A)$. Soit $f \in L^5(A)$, alors $|f|^4 \in L^{\frac{5}{4}}$ et $1 \in L^p(A), \forall p \geq 1$. L'inégalité de Hölder montre que

$$\int_0^1 |f|^4 \leq \left(\int_0^1 |f|^5\right)^{\frac{4}{5}} \left(\int_0^1 1\right)^{\frac{1}{5}}.$$

D'où $f \in L^4(A)$.
Si $A = \mathbb{R}$, $L^5(A)$ et $L^4(A)$ ne sont pas "comparables". On va chercher d'abord une fonction $f \in L^5(\mathbb{R}]$ qui n'est pas dans $L^4(\mathbb{R})$ sous la forme $f(x) = 1/|x|^{\alpha}$ si $|x| \geq 1$ et $f(x) = 1$ sinon. Donc on voudrait

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^{5\alpha}} < \infty \text{ et } \int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^{4\alpha}} = \infty.$$

On peut prendre par exemple $\alpha = \frac{1}{4}$.
Maintenant on cherche f dans $L^4(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans $L^5(\mathbb{R})$. On la cherche sous la forme $f(x) = 1/|x|^{\alpha}$ si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Cette fois, on veut $4\alpha < 1$ et $5\alpha \geq 1$ donc $\alpha = \frac{1}{5}$ convient.

Exercice 4
2) Non, sinon toute fonction de L^{∞} serait (égale p.p. à une fonction) continue, ce qui est faux.

Exercice 5
1) $\forall t > 0$, $x \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1} \in L^1(]0, +\infty[)$. Enfin, $\forall [a, b] \subset]0, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a,

$$|e^{-t}\, t^{x-1}| \leq \mathbb{1}_{(0,1)} e^{-t}\, t^{a-1} + \mathbb{1}_{(1,+\infty)} e^{-t}\, t^{b-1} \in L^1(0, +\infty).$$

Par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on conclut que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
$\forall k$, $\frac{\partial}{\partial x^k}(e^{-t}\, t^{x-1}) = e^{-t}(\log t)^k t^{x-1}$ et

$$|\frac{\partial}{\partial x^k}(e^{-t}\, t^{x-1})| \leq \mathbb{1}_{(0,1)} e^{-t} |\log t|^k t^{a-1} + \mathbb{1}_{(1,+\infty)} e^{-t} |\log t|^k t^{b-1} \in L^1(0, +\infty),$$

$\forall x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$. Donc le théorème de dérivation sous le signe somme montre que Γ est $\mathcal{C}^k$ sur $]0, +\infty[$, $\forall k$, donc est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2) Quand $x \longrightarrow 0$, le théorème de convergence monotone nous dit que

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \to \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = +\infty.$$

Exercice 6

Commençons par montrer que ℓ^∞ est complet. Soit $(x^k)_k$ une suite de Cauchy dans ℓ^∞. On note pour tout k, $x^k = (x_j^k)_j$. On a alors, pour toute coordonnée j, $|x_j^k - x_j^l| \leq \|x^k - x^l\|_\infty$. Donc pour tout j, la suite $(x_j^k)_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle converge vers un certain $x_j \in \mathbb{R}$. Posons $x = (x_j)_j$. Vérifions que $x \in \ell^\infty$ et que la suite $(x^k)_k$ converge vers x dans ℓ^∞.
On sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall j \geq 1$, $\forall k, l \geq N$,

$$|x_j^k - x_j^l| \leq \sup_i |x_i^k - x_i^l| \leq \varepsilon.$$

On fixe j et on fait tendre l vers l'infini alors $|x_j^k - x_j| \leq \varepsilon$, et ceci pour tout j et pour tout $k \geq N$. Donc $\sup_i |x_i^k - x_i| \leq \varepsilon$, pour tout $k \geq N$. En particulier, $x^k - x \in \ell^\infty$, donc $x = x - x^k + x^k \in \ell^\infty$ et la suite $(x^k)_k$ converge vers x dans ℓ^∞. On remarque déjà que $\mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$. Montrons que $\mathcal{C}_0$ est fermé :
Soit $(x^k)_k$ une suite dans $\mathcal{C}_0$ qui converge vers $x = (x_j)_j \in \ell^\infty$, montrons que $x \in \mathcal{C}_0$.
On note pour tout k, $x^k = (x_j^k)_j$. On a alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall j \geq 1$, $\forall k \geq N$, $|x_j^k - x_j| \leq \|x^k - x\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme $x^N \in \mathcal{C}_0$, il existe N_1 tel que $\forall j \geq N_1$, $|x_j^{N_1}| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\forall j \geq N_1$, $|x_j| \leq |x_j^{N_1}| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.
2) On pose $f = \Lambda_y$. D'abord $f \in (C_0)'$ car elle est linéaire et $|f(x)| \leq \sum_n |y_n| \, \|x\|_\infty$ pour tout $x \in C_0$. En particulier $\|f\| \leq \sum_n |y_n|$.
Montrons que $\|f\| = \sum_n |y_n|$.
Soit $x \in C_0$ défini par $x_n = sign(y_n)$ si $n \leq N$ et $x_n = 0$ sinon. Alors $\|x\|_\infty = 1$ et $f(x) = \sum_1^N |y_n| \leq \|f\|$. C'est vrai pour tout N, on en déduit que $\|f\| = \sum_n |y_n|$.
3) a) Soit $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_0$, montrons que la suite $x^N = \sum_1^N x_n e^n$ converge vers x dans $\mathcal{C}_0$.
Chaque x^N est bien dans $\mathcal{C}_0$ puisque tous les termes de la suite sont nuls à partir d'un certain rang. Comme $x \in \mathcal{C}_0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$, $\forall n \geq N_0$, $|x_n| \leq \varepsilon$. Donc, $\forall N \geq N_0$, $\|x^N - x\|_\infty = \sup_{n \geq N+1} |x_n| \leq \sup_{n \geq N_0+1} |x_n| \leq \varepsilon$.
b) On note E l'espace des suites réelles $y = (y_n)_n$ telles que la série $\sum_n |y_n|$ converge. Soit maintenant $f \in (C_0)'$ et $y_n = f(e^n)$ où $e^n = (e_k^n)_k$ avec $e_k^n = \delta_{nk}$. Comme f est continue sur $\mathcal{C}_0$, en utilisant a), on voit que $f(x^N) = \sum_{n=1}^N x_n f(e^n) \to f(x)$. Donc $f(x) = \sum_n x_n f(e^n)$.
Il reste à vérifier que $y = (y_n)_n \in E$.
Soit x défini par $x_n = sign(y_n)$ si $n \leq N$ et $x_n = 0$, alors $f(x) = \sum_1^N |y_n| \leq \|f\|$. Et c'est vrai pour tout N, d'où $y \in E$.