Analyse fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD Distributions

Introduction
Soit I un intervalle ouvert de **R** (non nécessairement borné).
On note $\mathcal{D}(I) = \mathcal{C}_c^\infty(I)$.
Définition : Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I)$, on dit que T est une **distribution** sur I si
$\forall K$ compact $\subset I$, $\exists p_K \in \mathbf{N}$, $\exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$ on a

$$|T(\varphi) =< T, \varphi > | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

C'est une condition de continuité.
On note $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I.
Définition Convergence dans $\mathcal{D}'(I)$: Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(I)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$. On note alors $T_n \rightharpoonup T$.

Exercice 1 Distribution fonction - Identification $L^1_{loc}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int f\varphi$ est une distribution sur **R**.
Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est séquentiellement continue, injective mais non surjective (on pourra vérifier par exemple que $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$ est une distribution et montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$).

Remarque : On a montré que l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est injective et non surjective. On peut donc "identifier" $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ avec la distribution T_f. On parle alors de "distribution fonction". Cela permet de donner un sens à des inclusions du type $L^1_{loc}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, et de parler de distributions constantes etc...

Exercice 2 Dérivée d'une distribution
Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$, on définit sa k-ième dérivée par

$$< T^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < T, \varphi^{(k)} > .$$

Vérifier que $\forall k$, $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(I)$.
Soit $u \in \mathcal{C}^k(I)$, montrer que $T_u^{(k)} = T_{u^{(k)}}$. Autrement dit, "la dérivée de u au sens des distributions" est égale à "la dérivée de u au sens usuel" (aprés identification).

Exercice 3 Multiplication
1) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On définit le produit fT par $< fT, \varphi > = < T, f\varphi >$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Montrer que $fT \in \mathcal{D}'(I)$.
2) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ et soit $g \in L^1_{loc}(I)$, montrer que $fT_g = T_{fg}$.
3) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, vérifier que $f\delta_0 = f(0)\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 4 Convergence d'une suite de distributions
On suppose que $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(I)$, vérifier que $\forall k$, $T_n^{(k)} \rightharpoonup T^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
Montrer que $\forall p, 1 \leq p \leq \infty$, $L^p(I) \subset \mathcal{D}'(I)$. Enfin, si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(I)$, montrer que $f_n^{(k)} \rightharpoonup f^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$ pour tout $k \geq 0$ (on identifie f et T_f grace à l'exercice 1).

Exercice 5
Quelles sont les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de $f_n(x) = \cos(nx)\mathbf{I}_{[0,1]}(x)$ et $g_n(x) = \sin^2(nx)\mathbf{I}_{[0,1]}(x)$?

Exercice 6
Montrer que $x\delta_0' = -\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 7 $T' = 0 \Rightarrow T$ est constante
Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta_0 = 1$.
1) Montrer que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\exists\lambda \in \mathbf{R}$, $\exists\psi \in \mathcal{D}(I)$ tels que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.
2) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est une fonction constante.
Remarque : on a montré que si $f \in L^1_{loc}$ vérifie $\forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int f\varphi' = 0$ alors $f = C$ constante p.p.
3) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 8
Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbf{R}$?

$$\varphi \to \sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(n), \qquad \varphi \to \sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

Exercice 9
1) Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Soit $Y = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}$, on pose $E = T_{Y\psi}$. Vérifier que $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$E^{(p)} = T_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta_0' + ... + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

2) Soit ψ solution de $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j\psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$, où $a_j \in \mathbf{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant
$\psi(0) = \psi'(0) = ... = \psi^{k-2}(0) = 0$ et $\psi^{k-1}(0) = \frac{1}{a_k}$.
Donner l'expression de $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j E^{(j)}$ où $E = T_{Y\psi}$ et calculer ψ.
En déduire une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de $E'' + E' + E = \delta_0$.

Exercice 10 Valeur principale
1) Soit $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| \geq \varepsilon$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon. Vérifier que $\forall \varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(I)$ et montrer que $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ converge au sens des distributions pour $\varepsilon \to 0^+$.
2) On définit ainsi une distribution, appelée **valeur principale** de $\frac{1}{x}$, notée $vp(\frac{1}{x})$, par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad < vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1 sur **R**. On pourra utiliser la suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(I)$ construite de la façon suivante : pour tout n, φ_n est impaire, $supp(\varphi_n) \subset]-1, 1[$, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\varphi_n(x) = 1$ si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $\varphi_n(x) = 0$, si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]$, avec un raccord $\mathcal{C}^\infty$ entre 0 et 1 sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}\right]$ (faire un dessin).
3) Vérifier que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
4) Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\theta_0(0) = 1$.
Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \exists g \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) = xg(x), \forall x \in$ **R**.
5) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $xT = 0$, montrer que $T = c\delta_0$ où c est une constante.
6) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $xT = 1$, montrer que $T = vp(\frac{1}{x}) + c\delta_0$ où c est une constante.

Exercice 11
Soit I un intervalle ouvert de **R**, on note

$$H^1(I) = \{f \in L^2(I) : \; f' \in L^2(I)\},$$

où f' désigne la dérivée au sens des distributions de f. H^1 est appelé espace de Sobolev. On peut ainsi définir par récurrence l'espace H^m pour $m \geq 2$ par

$$H^m(I) = \{f \in H^{m-1}(I) : \; f' \in H^{m-1}(I)\} = \{f \in L^2 : \forall k \leq m, f^{(k)} \in L^2\}.$$

On munit H^1 du produit scalaire

$$(f, g) = \int_I fg + \int_I f'g'.$$

Montrer que H^1 muni de $\|u\| = \sqrt{(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)}$ est complet.

Corrigé :

Exercice 1
Soit K compact $\subset I$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ avec $supp(\varphi) \subset K$ alors

$$| < T, \varphi >= \int f\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{L^1(K)},$$

donc $p_K = 0$ et $C_K = \|f\|_{L^1(K)}$ conviennent. T_f est linéaire et $\in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
Montrons la continuité séquentielle : si $f_n \to f$ dans $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$| \int (f_n - f)\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_{L^1(supp\varphi)},$$

donc $< T_{f_n}, \varphi > \to < T, \varphi >$. D'où, la continuité séquentielle.
L'injectivité : supposons que $\int (f-g)\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Posons $h(x) = sign(f(x)-g(x))$. Alors, pour tout $R > 0$, $h \in L^1(-R,R)$ et $\exists (\varphi)_n \in \mathcal{D}(]R,R[)$ telle que $\varphi_n \to h$ dans $L^1(-R,R)$ et p.p. avec $|\varphi_n| \leq 1$ pour tout n. Par le TCD, on endéduit que

$$0 = \int_{-R}^{R} (f-g)\varphi_n \longrightarrow \int_{-R}^{R} |f-g|,$$

donc $f = g$ p.p.
Surjectivité : $| < \delta_0, \varphi >= \varphi(0)| \leq \|\varphi\|_\infty$, donc δ_0 est bien une distribution.
Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ telle que $< \delta_0, \varphi >= \varphi(0) = \int f\varphi$. Alors on peut trouver une suite $((\varphi)_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_n(0) = 1$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ pour tout n et $supp\varphi_n \subset]-1/n, 1/n[$. Grâce au TCD, on a

$$1 = \varphi_n(0) = \int_{-1}^{1} f\varphi_n \to 0.$$

D'où contradiction.

Exercice 2
Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ alors $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists p_K \in \mathbf{N}$, $\exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$ on a

$$|T(\varphi) =< T, \varphi > | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Alors $T^{(k)}$ est linéaire par définition et

$$| < T^{(k)}, \varphi > | = | < T, \varphi^{(k)} > | \leq C_K \max_{i \leq p_K + k} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|,$$

donc $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(I)$.
Si $u \in \mathcal{C}^k(I)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$< T_u^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < T_u, \varphi^{(k)} >= (-1)^k \int u\varphi^{(k)} = \int u^{(k)}\varphi,$$

en I.P.P. k fois. D'où $T_u^{(k)} = T_{u^{(k)}}$.

Exercice 3
1) Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $f\varphi \in \mathcal{D}(I)$ donc la définition a bien un sens. On écrit que $T \in \mathcal{D}'(I)$: $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists p_K \in \mathbf{N}$, $\exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$ on a

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Donc

$$< T, f\varphi > | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |(f\varphi)^{(i)}(x)|.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on peut facilement voir qu'il existe une constante $D_K > 0$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$,

$$< fT, \varphi > | \leq D_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|,$$

d'où $fT \in \mathcal{D}'(I)$.
2) Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in L^1_{loc}(I)$, $fg \in L^1_{loc}(I)$ donc T_{fg} a un sens et $\in \mathcal{D}'(I)$. Enfin, si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $< fT_g, \varphi >=< T_g, f\varphi >= \int fg\varphi =< T_{fg}, \varphi >$. D'où, $fT_g = T_{fg}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
3) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, alors $< f\delta_0, \varphi >=< \delta_0, f\varphi >= f(0)\varphi(0) =< f(0)\delta_0, \varphi >$. Donc $f\delta_0 = f(0)\delta_0$.

Exercice 4
On a $< T_n^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < T_n, \varphi^{(k)} > \longrightarrow (-1)^k < T, \varphi^{(k)} >=< T^{(k)}, \varphi >$.
On a $L^p \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(I)$ en identifiant $f = T_f$. On utilise Hölder :

$$| \int (f_n - f)\varphi| \leq \|\varphi\|_{p'} \|f_n - f\|_p,$$

d'où la convergence dans $\mathcal{D}'(I)$. On en déduit que $\forall k \geq 0$, $f_n^{(k)} \rightharpoonup f^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

Exercice 5
D'abord, $f_n, g_n \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. En calquant la démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$\int f_n\varphi = \int_0^1 \cos(nx)\varphi = \frac{1}{n}\int_0^1 \sin(nx)\varphi' + \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\varphi\right]_0^1 \to 0,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, donc $f_n \rightharpoonup 0$.
Enfin, $g_n = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{[0,1]} - \frac{1}{2}f_{2n} \rightharpoonup \frac{1}{2}\mathbf{I}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 6
La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc le produit $x\delta_0'$ a bien un sens et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$< x\delta_0', \varphi >=< \delta_0', x\varphi >= - < \delta_0, (x\varphi)' >= - < \delta_0, x\varphi' + \varphi >= - < \delta_0, \varphi > .$$

Exercice 7
a) Si $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$, où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\int_I \varphi = \lambda \int_I \theta_0 + \int_I \psi'$ donc nécessairement $\lambda = \int_I \varphi$. Avec ce choix de λ, trouvons ψ.
$\exists a, b$ tels que supp$(\varphi)\cup$supp$(\theta_0) \subset [a,b] \subset I$ (I connexe). Soit $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) - (\int_I \varphi)\theta_0(t))dt$ alors $\psi' = \varphi - (\int_I \varphi)\theta_0$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Vérifions que ψ est à support compact. Si $x \in]-\infty, a[\cap I$ alors $\forall t \in [a,x]$ $\varphi(t) = \theta_0(t) = 0$ et $\psi(x) = 0$. Si $x \in]b, \infty[\cap I$ alors $\psi(x) = 0$ donc supp$(\psi) \subset [a,b]$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$. (On peut remarquer que le couple (λ, ψ) est unique.)
b) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = 0$, on veut montrer que $\exists C \in \mathbf{R}$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $< T, \varphi >= C \int_I \varphi$, ce qui veut bien dire que $T = C$ au sens des distributions
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\exists \psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi = (\int_I \varphi)\theta_0 + \psi'$ et $< T, \varphi >= (\int_I \varphi) < T, \theta_0 > + < T, \psi' >$. Or par hypothèse $< T, \psi' >=< T', \psi >= 0$ donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), < T, \varphi >=< T, \theta_0 > \ \int_I \varphi$ donc $C =< T, \theta_0 >$ convient.
c) Par hypothèse $T' = v \in \mathcal{C}^\infty(I)$, c'est à dire $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), < T', \varphi >= \int_I v\varphi$. La fonction v admet une primitive au sens usuel V et $v = V'$ alors $(T - V)' = 0$ donc $T - V = c$ constante par b) et $T = V + c \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 8
Les deux applications proposées sont bien linéaires par rapport à φ.
On pose $< T, \varphi >= \displaystyle\sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(n)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.
Soit K un compact de $\mathbf{R}$ alors $|K \cap \mathbf{N}| < \infty$ et $\exists N_K$ tel que $K \cap \mathbf{N} \subset \overline{B}(0, N_K)$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est à support dans K, alors $| < T, \varphi > | \leq \displaystyle\sum_0^{N_K} \|\varphi^{(n)}\|_\infty$ donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
Soit $< T, \varphi >= \sum_{n\geq 0} \varphi^{(n)}(0)$. Il existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi(x) = e^x\theta(x)$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\forall n$, $\varphi^{(n)}(0) = 1$ donc $T \notin \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 9
1) $Y\psi \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ donc $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Calculons les dérivées au sens des distributions de E et montrons par récurrence que

$$E^{(p)} = T_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta_0' + ... + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

On calcule d'abord E',

$$\begin{aligned} < E', \varphi > &= - < E, \varphi' >= -\int_0^\infty \psi\varphi', \\ &= \int_0^\infty \psi'\varphi + \psi(0)\varphi(0), \\ &= < T_{Y\psi'}, \varphi > + < \psi(0)\delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Donc le propriété est vraie pour $p = 1$, on la suppose vraie jusqu'au rang p et démontrons la pour $p+1$. On a

$$\begin{aligned} < E^{(p+1)}, \varphi > &= -< E^{(p)}, \varphi' >= -\int_0^\infty \psi^{(p)}\varphi' - < \psi^{(p-1)}(0)\delta_0, \varphi' > - ... - < \psi(0)\delta_0^{(p-1)}, \varphi' >, \\ &= \int_0^\infty \psi^{(p+1)}\varphi + < \psi^{(p)}(0)\delta_0, \varphi > + < \psi^{(p-1)}(0)\delta_0' + ... + \psi(0)\delta_0^{(p)}, \varphi > . \end{aligned}$$

D'où le résultat.
2) Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$, où $a_j \in \mathbf{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant
$\psi(0) = \psi'(0) = ... = \psi^{k-2}(0) = 0$ et $\psi^{k-1}(0) = \frac{1}{a_k}$ alors $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.
Ici $E^{(j)} = T_{Y\psi^{(j)}}, \forall j \leq k-1$ car $\psi^{(p)}(0) = 0, \forall p \leq k-2$, et

$$E^{(k)} = T_{Y\psi^{(k)}} + \psi^{(k-1)}(0)\delta_0 = T_{Y\psi^{(k)}} + \frac{1}{a_k}\delta_0.$$

Donc $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)} + a_k E^{(k)} = \delta_0$ par hypothèse sur ψ.
On cherche ψ telle que

$$(\star) \quad \begin{cases} \psi'' + \psi' + \psi = 0 \\ \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

Les solutions générales du système $(\star)$ sont données par

$$\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}(ae^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + be^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}), \quad a, b \in \mathbf{C}.$$

Ici les données initiales impliquent que $a = -b = \frac{1}{i\sqrt{3}}$, donc $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et $E = T_{Y\psi}$ convient.