Analyse de Fourier
ENS de Cachan 2009-2010

TD Distributions 2

Exercice 1 Valeur principale

1) Soit $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}$ si $|x| \geq \varepsilon$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon.
Vérifier que $\forall \varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et montrer que $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ converge au sens des distributions pour $\varepsilon \to 0^+$.
2) On définit ainsi une distribution, appelée **valeur principale** de $\frac{1}{x}$, notée $vp(\frac{1}{x})$, par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad < vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1 sur **R**. On pourra utiliser la suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ construite de la façon suivante : pour tout n, φ_n est impaire, $supp(\varphi_n) \subset]-1, 1[$, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\varphi_n(x) = 1$ si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $\varphi_n(x) = 0$, si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]$, avec un raccord $\mathcal{C}^\infty$ entre 0 et 1 sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}\right]$ (faire un dessin).
3) Vérifier que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4) Soit $\theta_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta_0(0) = 1$.
Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) = xg(x)$, $\forall x \in$ **R**.
5) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$, montrer que $T = c\delta_0$ où c est une constante.
6) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 1$, montrer que $T = vp(\frac{1}{x}) + c\delta_0$ où c est une constante.

Exercice 2 Laplacien en coordonnées polaires

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Montrer que si $r > 0$,

$$\Delta f(r\cos, r\sin\theta) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f(r\cos, r\sin\theta).$$

Indication : vérifier déjà que

$$r\frac{\partial f}{\partial r} = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Exercice 3 Solution élémentaire du Laplacien en dimension 2

Soit $f(x, y) = \log r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $\Delta f(x,y) = 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
2) Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
3) Montrer que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$< \Delta f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^2} f \Delta\varphi dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{r\geq\varepsilon} f\Delta\varphi dxdy.$$

4) Montrer que

$$\Delta \log r = 2\pi\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

où δ_0 est la masse de Dirac en $(0,0)$.

Exercice 4 Inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Soit L^2_p, l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, et H^1_p, l'espace de Sobolev des fonctions de L^2_p qui admettent une dérivée au sens des distributions dans L^2_p.

Pour $u \in H^1_p$, on pose $m(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} udx$. Montrer que

$$\|u - m(u)\|_{L^2_p} \leq \|u'\|_{L^2_p}.$$

Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si u s'écrit

$$u(x) = a + be^{ix} + ce^{-ix}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes.

Corrigé

Exercice 1
1) $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $supp(\varphi) \subset \overline{B}(0,R)$ alors

$$< f_\varepsilon, \varphi >= \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R\geq|x|\geq\varepsilon} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right) dx,$$

car la fonction $1/x$ est impaire.
Dans le membre de droite, $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leq \|\varphi'\|_\infty$ (accroissements finis) et $\|\varphi'\|_\infty \in L^1(-R,R)$. L'intégrale a donc une limite quand $\varepsilon \to 0$, qui est : $\displaystyle\int_{-R}^{R} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right) dx$.
On peut donc définir $< vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.
2) Si K est un compact de $\mathbb{R}$, $K \subset [-R,R]$, on a

$$\left|\int_{-R}^{R} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right) dx\right| \leq 2R\|\varphi'\|_\infty.$$

Donc, $\left|< vp(\frac{1}{x}), \varphi >\right| \leq 2R\|\varphi'\|_\infty$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $supp(\varphi) \subset K$.
On en déduit que $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}$.
Montrons qu'elle n'est pas d'ordre 0. On utilise φ_n,

$$\begin{aligned} < vp(\frac{1}{x}), \varphi_n > &= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = 2\int_0^1 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx, \\ &\geq 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} \frac{dx}{x} = 2\log(n-1). \end{aligned}$$

Si $K = [-1,1]$, il n'existe donc pas de constante $C > 0$ telle que $\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $supp(\varphi)$, $\left|< vp(\frac{1}{x}), \varphi >\right| \leq C\|\varphi\|_\infty$. Donc $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.
3) $x \mapsto x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc $xvp(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < xvp(\frac{1}{x}), \varphi > &= < vp(\frac{1}{x}), x\varphi >, \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx, \\ &= < 1, \varphi > . \end{aligned}$$

D'où $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4) La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, est nulle en $x = 0$, donc la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) = x\int_0^1 (\varphi'(tx) - \varphi(0)\theta_0'(tx))dt =: xg(x).$$

Par le TDSSS, il est facile de voir que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ($\varphi, \theta_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$).
Si $supp(\varphi) \cup supp(\theta_0) \subset [-R, R]$ alors pour $|x| > R$,

$$g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x)}{x} \equiv 0,$$

d'où $supp(g) \subset [-R, R]$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
5) Si $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors en utilisant 4) on a

$$< xT, g >= 0 =< T, xg >=< T, \varphi > -\varphi(0) < T, \theta_0 >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Donc $T =< T, \theta_0 > \delta_0 = C\delta_0$.
6) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $xT = 1$. On sait que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ donc $x(T - vp(\frac{1}{x})) = 0$.
Par 5) on en déduit que $T = vp(\frac{1}{x}) + C\delta_0$ où C est une constante.

Exercice 2

Exercice 3
1) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. En $(x, y) \neq (0, 0)$, on a (au sens des fonctions) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r^2}.$$

Puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} + x(-\frac{2}{r^3})\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}.$$

De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2y^2}{r^4}$. D'où $\Delta f(x, y) = 0$ en dehors de 0.
Ou bien avec l'exercice 2, pour tout $r > 0$,

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\log r\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0.$$

2) Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ alors $K \subset \overline{B}(0, R)$.
En appliquant le théorème de changement de variables à $|f| \geq 0$, on a

$$\int_K |\log r| dxdy \leq \int_{\overline{B}(0,R)} |\log r| dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R r|\log r| dr d\theta < \infty.$$

Donc $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
3) On vient de voir que f définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ alors

$$< \Delta f, \varphi >=< f, \Delta\varphi >= \int_{\mathbb{R}^2} f\Delta\varphi dxdy,$$

car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Puis

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\Delta\varphi dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{r \geq \varepsilon} f\Delta\varphi dxdy,$$

grâce au TCD.

4) On note $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{r\geq\varepsilon} f\Delta\varphi dxdy$ et on passe en coordonnées polaires dans cette intégrale.

Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on pose $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Enfin, soit $R > 0$ tel que $supp(\varphi) \subset \overline{B}(0, \frac{R}{2})$. Alors

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^R \left[\log r \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right) + \frac{\log r}{r}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\theta^2}\right] drd\theta.$$

On remarque que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\theta^2}d\theta = 0$ car la fonction $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}$ est 2π périodique.

D'autre part, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^R \log r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right) dr &= -\int_\varepsilon^R \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}dr + \left[r\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\log r\right]_\varepsilon^R, \\ &= \tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta) - \varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(\varepsilon,\theta),\end{aligned}$$

puisque $\tilde{\varphi}(R,\theta) = \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(R,\theta) = 0$. Donc

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi}\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)d\theta - \int_0^{2\pi}\varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(\varepsilon,\theta)d\theta.$$

Soit $M > 0$ tel que $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, $\forall r \leq R$, $\left|\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(r,\theta)\right| \leq M$ alors

$$\left|\int_0^{2\pi}\varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(\varepsilon,\theta)d\theta\right| \leq M\varepsilon|\log\varepsilon| \to 0,$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Enfin, $\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta) \to \varphi(0,0)$ quand $\varepsilon \to 0$ et $|\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)| \leq \|\varphi\|_\infty$, $\forall\varepsilon,\theta$, donc le TCD permet de voir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 2\pi\varphi(0,0).$$

On en déduit que $\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$< \Delta f, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 2\pi\varphi(0,0) =< 2\pi\delta_0, \varphi > .$$

D'où $\Delta f = 2\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4

Soit $u \in H_p^1$, on considère ses coefficients de Fourier $c_k(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} ue^{-ikx}dx$

pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors, d'une part $u - m(u) = \sum_{k\neq 0} c_k(u)e^{ikx}$ et d'autre part $c_k(u) = \frac{c_k(u')}{ik}$ si $k \neq 0$. On a donc

$$\|u - m(u)\|_2^2 = \sum_{k\neq 0} |c_k(u)|^2 = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2}|c_k(u')|^2 \leq \sum_{k\neq 0} |c_k(u')|^2 = \|u'\|_2^2.$$

Si $u(x) = a + be^{ix} + ce^{-ix}$, il est facile de voir que l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.
Maintenant si u satisfait l'égalité $\|u - m(u)\|_{L^2_p} = \|u'\|_{L^2_p}$. Toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités et en particulier, on a

$$\sum_{k\neq 0} |c_k(u')|^2(1 - \frac{1}{k^2}) = 0.$$

Or cette série est à termes positifs donc nécessairement $|c_k(u')|^2(1 - \frac{1}{k^2}) = 0$ pour tout entier k non nul. On en déduit que s'il existe un $k \neq 0$ tel que $c_k(u') \neq 0$ alors $k = \pm 1$. D'où la forme de u.