Analyse de Fourier
ENS de Cachan 2009-2010

TD Distributions

Introduction
Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (non nécessairement borné).
Définition : Soit T une forme linéaire sur $C_c^\infty(I)$, on dit que T est une **distribution** sur I si $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists p_K \in \mathbb{N}$, $\exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in C_c^\infty(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$ on a

$$|T(\varphi) = < T, \varphi > | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)| \quad (*).$$

C'est une condition de continuité.
On note $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I.
Convergence :Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(I)$ si $\forall \varphi \in C_c^\infty(I)$, $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$.

Exercice 1 Distribution fonction
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int f\varphi$ est une distribution sur $\mathbb{R}$. On note $i : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui à f associe la distribution T_f.
Montrer que i est injective, c'est-à-dire : Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on suppose que $\int (f - g)\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer que $f = g$ p.p.
On identifie désormais f et T_f quand f est L^1_{loc}.
Montrer que i est séquentiellement continue : si $T_n \to T$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2
Montrer que la masse de Dirac en x définie par $< \delta_x, \varphi >= \varphi(x)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il en est de même pour $< \delta_x^{(k)}, \varphi >= (-1)^k \varphi^{(k)}(x)$ et pour le peigne de Dirac $u = \sum_n \delta_{2\pi n}$.

Exercice 3 Formule des sauts
Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$. On suppose qu'il existe un nombre fini de points $a_0, a_1, ..., a_N$ tels que $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_N = b$. On suppose que pour tout $i = 0, N - 1$, $f \in \mathcal{C}^1(]a_i, a_{i+1}[)$ et que f, f' sont continues sur $]a_0, a_1]$,$[a_1, a_2]$,...,$[a_{N-1}, a_N[$.
Montrer que

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N-1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i},$$

où f' désigne la dérivée de f au sens des distributions et $\{f'\}$ sa dérivée usuelle qui est ici une fonction continue par morceaux.
On peut généraliser cette formule à une suite de points $(a_i)_i$ discrète.

Exercice 4 Formule de Poisson
1) Soit $f(x) = \pi - x$ si $x \in [0, 2\pi[$, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a

$$f' = -1 + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n}.$$

2) On pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$ (ce sont les coefficients de Fourier de f).
Calculer $c_n(f)$ pour tout n.
Puis montrer que

$$f'(x) = \sum_{n\neq 0} e^{inx} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) En déduire la formule de Poisson :

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{inx} = \sum_n \delta_{2\pi n} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Remarque :
La série à gauche est divergente au sens des fonctions mais convergente au sens des distributions vers le peigne de Dirac (série à droite) dont elle constitue le développement en série de Fourier.

Exercice 5 Ordre d'une distribution
On appelle ordre d'une distribution sur un compact K le plus petit entier positif p_K tel que la relation $(*)$ soit vraie.
1) Montrer que l'ordre d'une fonction de L^1_{loc} est zéro sur tout compact.
2) Soit μ une mesure bornée, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues et bornées muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que μ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre zéro.
3) Montrer que si l'ordre d'une distribution u sur K est p, alors l'ordre de u' est inférieur ou égal à $p + 1$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

Exercice 6 Produit $C^\infty(I)$ par $\mathcal{D}'(I)$
Soit $f \in C^\infty(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$, montrer que $fT \in \mathcal{D}'(I)$.

Exercice 7
Montrer que $x\delta_0' = -\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 8 La masse de Dirac n'est pas une fonction
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,
$< \delta_0, \varphi >= \varphi(0) = \int f\varphi$.

Corrigé

Exercice 1
Soit K compact $\subset I$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ avec $supp(\varphi) \subset K$ alors

$$| < T_f, \varphi >= \int f\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{L^1(K)},$$

donc $p_K = 0$ et $C_K = \|f\|_{L^1(K)}$ conviennent. T_f est linéaire et $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
L'injectivité : supposons que $\int(f-g)\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posons $h(x) = sign(f(x) - g(x))$. Alors, pour tout $R > 0$, $h \in L^1(-R, R)$ et $\exists(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(]R, R[)$ telle que $\varphi_n \to h$ dans $L^1(-R, R)$. La "réciproque" du TCD nous dit qu'alors il existe une sous-suite, encore notée $(\varphi_n)_n$, qui converge p.p. vers h. De plus on peut supposer que $|\varphi_n| \leq 1$ pour tout n (quitte à tronquer, voir (*) plus loin). Par le TCD, on en déduit que

$$0 = \int_{-R}^{R} (f-g)\varphi_n \longrightarrow \int_{-R}^{R} |f-g|,$$

donc $f = g$ p.p.
(*) : Si on note $f^M = \max(-M, \min(f, M))$ $(M > 0)$ pour une fonction f quelconque à valeurs réelles. Il est facile de voir que pour toutes f, g, $|f^M - g^M| \leq |f - g|$ (en effet la fonction $x \mapsto \max(-M, \min(x, M))$ est 1-lipschitzienne, le faire si on n'est pas convaincu...).
Donc ici avec $M = 1$, on peut remplacer φ_n par φ_n^1. Comme $-1 \leq h \leq 1$, $h^1 = h$ et $|\varphi_n^1 - h| \leq |\varphi_n - h|$, donc la convergence p.p. ou la convergence L^1 de φ_n vers h implique celle de φ_n^1 vers $h^1 = h$.

Exercice 2
D'abord, δ_x et $\delta_x^{(k)}$ sont bien des formes linéaires sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $| < \delta_x, \varphi >= \varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty$. Donc $C_K = 1$ et $p_K = 0$ conviennent dans $(*)$. La masse de Dirac est une distribution.
Ensuite, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $| < \delta_x^{(k)}, \varphi > | = |\varphi^{(k)}(x)| \leq \|\varphi^{(k)}\|_\infty$. Donc ici, $C_K = 1$ et $p_K = k$ conviennent et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_x^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Chaque $\delta_{2\pi n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et T_N est une somme finie de $\delta_{2\pi n}$ donc $T_N \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Avec le théorème admis, si on montre que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, la suite $(< T_N, \varphi >)_N$ converge, on saura que la limite $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $supp(\varphi) \subset [-2\pi N_0, 2\pi N_0]$ et $< T_N, \varphi >= \sum_{-N}^{N} \varphi(2\pi n) = \sum_{-N_0}^{N_0} \varphi(2\pi n)$, $\forall N \geq N_0$. Donc la suite $(< T_N, \varphi >)_N$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Elle converge donc vers une limite notée $< T, \varphi >$. Et on sait que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3
f est une fonction continue partout sauf aux points a_i en lesquels elle a une limite à droite et à gauche finie donc c'est une fonction localement intégrable sur I et une

distribution.
Soit φ une fonction test, par définition

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= - \int_I f\varphi' = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\varphi'.$$

Sur chaque sous-intervalle (a_i, a_{i+1}), on effectue une intégration par parties : $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f\varphi' = - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'\varphi + [f\varphi]_{a_i}^{a_{i+1}}$. Puis on regroupe les termes :

$$\int_I f\varphi' = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'\varphi + \sum_{i=0}^{N-1} [f\varphi]_{a_i}^{a_{i+1}}.$$

En tenant compte du fait que $\varphi(a_0) = \varphi(a_N) = 0$, on obtient

$$\int_I f\varphi' = - \int_I f'_{usuel}\varphi + \sum_{i=1}^{N-1} (f(a_i^-) - f(a_i^+))\varphi(a_i).$$

D'où $< f', \varphi >= \int_I f'_{usuel}\varphi + \sum_{i=1}^{N-1}(f(a_i^+) - f(a_i^-))\varphi(a_i)$, que l'on peut écrire

$$< f', \varphi >=< \{f'\}, \varphi > + < \sum_{i=1}^{N-1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}, \varphi > .$$

C'est exactement la formule demandée. NB : $\{f'\}$ est localement intégrable par hypothèse donc définit bien une distribution "fonction".

Exercice 4
1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc elle est localement intégrable et définit donc une distribution sur $\mathbb{R}$. C'est aussi une fonction C^∞ par morceaux, de dérivée usuelle $= -1$ sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Le saut de f en $2\pi n$ vaut $f(2\pi n^+) - f(2\pi n^-) = 2\pi$. Donc la formule des sauts donne ici

$$f' = -1 + \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta_{2\pi n}.$$

2) D'abord $c_0(f) = 0$ et si $|n| \geq 1$, on trouve $c_n(f) = \frac{1}{in}$ en intégrant par parties.
On pose $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$. Alors S_N est une fonction 2π-périodique et $S_N \in L^2(0, 2\pi)$. Donc $S_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
On sait que $S_N \to f$ dans $L^2(0, 2\pi)$. En utilisant la périodicité, il est facile de voir que S_N converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. D'aprés l'exercice 1, on en déduit que $S_N \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enfin, $S'_N \to f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ puisqu'on peut dériver tout passage à la limite dans $\mathcal{D}'$.
Or,

$$S'_N = \sum_{n\neq 0, n=-N}^{N} e^{inx},$$

donc

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} e^{inx} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) En utilisant 1) et 2), on a

$$-1 + \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta_{2\pi n} = f' = \sum_{n\neq 0} e^{inx}.$$

D'où,

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} = 1 + \sum_{n\neq 0} e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx},$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1) On a vu dans l'exercice 1 que $p_K = 0$ convient. Comme l'ordre est toujours positif, c'est nécessairement zéro.
2) Par hypothèse, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $| < \mu, \varphi > | \leq C\|\varphi\|_\infty$ puisque la mesure est continue. Donc ici encore μ définit une distribution d'ordre zéro.
3) Soit $u \in \mathcal{D}'(I)$ d'ordre p, alors $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in C_c^\infty(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$ on a

$$|u(\varphi) =< u, \varphi > | \leq C_K \max_{i\leq p} \max_{x\in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Alors par définition de u',

$$| < u', \varphi > | = | < u, \varphi' > | \leq C_K \max_{i\leq p+1} \max_{x\in K} |\varphi^{(i)}(x)|,$$

donc l'ordre de u' est inférieur ou égal à $p+1$ sur K.
N'importe quelle fonction régulière répond à la question posée ou bien aussi $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ d'ordre zéro de dérivée δ_0 qui est aussi d'ordre zéro.

Exercice 6

Si $f \in C^\infty(I)$, par définition de fT : $< fT, \varphi >=< T, f\varphi >$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$.
Et on a, puisque T est une distribution, $\forall K$ compact$\subset I$, $\exists C_K > 0$, $\exists p_K \in \mathbb{N}$ tels que $\forall \varphi \in C_c^\infty(I)$ avec $supp(\varphi) \subset K$,

$$| < fT, \varphi > | \leq C_K \max_{0\leq n\leq p_K} \|(f\varphi)^{(n)}\|_{L^\infty(K)}.$$

Rappel : formule de Leibniz : $(f\varphi)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)}\varphi^{(i)}$. D'où

$$|(f\varphi)^{(n)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} C_n^i \|f^{(n-i)}\|_{L^\infty(K)} \|\varphi^{(i)}\|_{L^\infty(K)}.$$

On pose, par exemple,

$$a_K = \max_{n=0,p_K} \max_{i=0,n} C_n^i \|f^{(n-i)}\|_{L^\infty(K)}.$$

Alors

$$\|(f\varphi)^{(n)}\|_{L^\infty(K)} \leq n a_K \max_{i=0,n} \|\varphi^{(i)}\|_{L^\infty(K)}.$$

On en déduit que

$$| < fT, \varphi > | \leq C_K a_K p_K \max_{i=0,p_k} \|\varphi^{(i)}\|_{L^\infty(K)},$$

si $supp(\varphi) \subset K$. Donc $fT \in \mathcal{D}'(I)$.

Exercice 7
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors $< x\delta_0', \varphi >=< \delta_0', x\varphi >= - < \delta_0, (x\varphi)' >$. Donc $< x\delta_0', \varphi >= - < \delta_0, x\varphi' + \varphi >= - < \delta_0, \varphi >$.

Exercice 8
On sait déjà que δ_0 est bien une distribution.
Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $< \delta_0, \varphi >= \varphi(0) = \int f\varphi$. Alors on peut trouver une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n(0) = 1$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ pour tout n et $supp\varphi_n \subset]-1/n, 1/n[$ (faire un dessin). Grâce au TCD, on a

$$1 = \varphi_n(0) = \int_{-1}^{1} f\varphi_n \to 0.$$

D'où contradiction.