

TD Distributions

Introduction

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} (non nécessairement borné).

On note $\mathcal{D}(I) = \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Définition : Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I)$, on dit que T est une **distribution** sur I si

$\forall K$ compact $\subset I, \exists p_K \in \mathbf{N}, \exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$ on a

$$|T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

C'est une condition de continuité.

On note $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I .

Définition Convergence dans $\mathcal{D}'(I)$: Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(I)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$. On note alors $T_n \rightharpoonup T$.

Exercice 1 Distribution fonction - Identification $L_{loc}^1(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$, montrer que $T_f : \varphi \mapsto \int f\varphi$ est une distribution sur \mathbf{R} .

Montrer que $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est séquentiellement continue, injective mais non surjective (on pourra vérifier par exemple que $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$ est une distribution et montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$).

Remarque : On a montré que l'application $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est injective et non surjective. On peut donc "identifier" $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$ avec la distribution T_f . On parle alors de "distribution fonction". Cela permet de donner un sens à des inclusions du type $L_{loc}^1(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \mathcal{C}^k(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, et de parler de distributions constantes etc...

Exercice 2 Ordre d'une distribution

Faire l'exercice 4 page 120 du poly.

Exercice 3 Multiplication

1) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On définit le produit fT par $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Montrer que $fT \in \mathcal{D}'(I)$.

2) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(I)$ et soit $g \in L_{loc}^1(I)$, montrer que $fT_g = T_{fg}$.

3) Soit f un fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, vérifier que $f\delta_0 = f(0)\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 4 Convergence d'une suite de distributions

On suppose que $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(I)$, vérifier que $\forall k, T_n^{(k)} \rightharpoonup T^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
 Montrer que $\forall p, 1 \leq p \leq \infty, L^p(I) \subset \mathcal{D}'(I)$. Enfin, si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(I)$,
 montrer que $f_n^{(k)} \rightharpoonup f^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$ pour tout $k \geq 0$ (on identifie f et T_f grâce à
 l'exercice 1).

Exercice 5

Quelles sont les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de $f_n(x) = \cos(nx)\mathbf{I}_{[0,1]}(x)$ et $g_n(x) = \sin^2(nx)\mathbf{I}_{[0,1]}(x)$?

Exercice 6

Montrer que $x\delta'_0 = -\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 7 $T' = 0 \Rightarrow T$ est constante

Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta_0 = 1$.

1) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \exists \lambda \in \mathbf{R}, \exists \psi \in \mathcal{D}(I)$ tels que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.

2) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est une fonction constante.

Remarque : on a montré que si $f \in L^1_{loc}$ vérifie $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \int f\varphi' = 0$ alors $f = C$ constante p.p.

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 8

Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur \mathbf{R} ?

$$\varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n), \quad \varphi \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0).$$

Exercice 9

1) Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Soit $Y = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}$, on pose $E = T_{Y\psi}$. Vérifier que $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et
 montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$E^{(p)} = T_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta'_0 + \dots + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

2) Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$, où $a_j \in \mathbf{R}$ et $a_k \neq 0$,

satisfaisant

$$\psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(k-2)}(0) = 0 \text{ et } \psi^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}.$$

Donner l'expression de $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)}$ où $E = T_{Y\psi}$ et calculer ψ .

En déduire une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de $E'' + E' + E = \delta_0$.

Exercice 10 Valeur principale

1) Soit $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| \geq \varepsilon$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon. Vérifier que $\forall \varepsilon > 0, f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$
 et montrer que $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ converge au sens des distributions pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

2) On définit ainsi une distribution, appelée **valeur principale** de $\frac{1}{x}$, notée $vp(\frac{1}{x})$, par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1 sur \mathbf{R} . On pourra utiliser la suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$ construite de la façon suivante : pour tout n , φ_n est impaire, $supp(\varphi_n) \subset]-1, 1[$, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\varphi_n(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, si $x \in [0, \frac{1}{2n}] \cup [1 - \frac{1}{2n}, 1]$, avec un raccord \mathcal{C}^∞ entre 0 et 1 sur $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}]$ (faire un dessin).

3) Vérifier que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

4) Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\theta_0(0) = 1$.

Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \exists g \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) = xg(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

5) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $xT = 0$, montrer que $T = c\delta_0$ où c est une constante.

6) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $xT = 1$, montrer que $T = vp(\frac{1}{x}) + c\delta_0$ où c est une constante.

Exercice 11

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , on note

$$H^1(I) = \{f \in L^2(I) : f' \in L^2(I)\},$$

où f' désigne la dérivée au sens des distributions de f . H^1 est appelé espace de Sobolev. On peut ainsi définir par récurrence l'espace H^m pour $m \geq 2$ par

$$H^m(I) = \{f \in H^{m-1}(I) : f' \in H^{m-1}(I)\} = \{f \in L^2 : \forall k \leq m, f^{(k)} \in L^2\}.$$

On munit H^1 du produit scalaire

$$(f, g) = \int_I fg + \int_I f'g'.$$

Montrer que H^1 muni de $\|u\| = \sqrt{(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)}$ est complet.

Corrigé :

Exercice 1

Soit K compact $\subset I$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$ alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int f \varphi \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|f\|_{L^1(K)},$$

donc $p_K = 0$ et $C_K = \|f\|_{L^1(K)}$ conviennent. T_f est linéaire et $\in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Montrons la continuité séquentielle : si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\left| \int (f_n - f) \varphi \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\text{supp} \varphi)},$$

donc $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$. D'où, la continuité séquentielle.

L'injectivité : supposons que $\int (f - g) \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Posons $h(x) = \text{sign}(f(x) - g(x))$. Alors, pour tout $R > 0$, $h \in L^1(-R, R)$ et $\exists (\varphi)_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_n \rightarrow h$ dans $L^1(-R, R)$ et p.p. avec $|\varphi_n| \leq 1$ pour tout n . Par le TCD, on en déduit que

$$0 = \int_{-R}^R (f - g) \varphi_n \rightarrow \int_{-R}^R |f - g|,$$

donc $f = g$ p.p.

Surjectivité : $|\langle \delta_0, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{\infty}$, donc δ_0 est bien une distribution.

Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ telle que $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f \varphi$. Alors on peut trouver une suite $(\varphi)_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_n(0) = 1$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ pour tout n et $\text{supp} \varphi_n \subset]-1/n, 1/n[$. Grâce au TCD, on a

$$1 = \varphi_n(0) = \int_{-1}^1 f \varphi_n \rightarrow 0.$$

D'où contradiction.

Exercice 2

1) Toute fonction de L^1_{loc} est une distribution d'ordre 0.

2) Evident.

3) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est d'ordre p alors T' est une distribution d'ordre $\leq p + 1$ car si K est un compact de \mathbf{R} , $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$, on a

$$|\langle T', \varphi \rangle| = |-\langle T, \varphi' \rangle| \leq C_K \max_{i \leq p} \max_{x \in K} |\varphi^{(i+1)}(x)| \leq C_K \max_{i \leq p+1} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Soit $f = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ (après identification), alors f est d'ordre 0. Il est facile de voir que la dérivée de f au sens des distributions est la masse de Dirac en 0 donc est d'ordre 0

Exercice 3

1) Comme f est \mathcal{C}^{∞} et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $f \varphi \in \mathcal{D}(I)$ donc la définition a bien un sens. On

écrit que $T \in \mathcal{D}'(I) : \forall K \text{ compact } \subset I, \exists p_K \in \mathbf{N}, \exists C_K > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$ on a

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Donc

$$\langle T, f\varphi \rangle \leq C_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |(f\varphi)^{(i)}(x)|.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on peut facilement voir qu'il existe une constante $D_K > 0$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$,

$$\langle fT, \varphi \rangle \leq D_K \max_{i \leq p_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(i)}(x)|,$$

d'où $fT \in \mathcal{D}'(I)$.

2) Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in L^1_{loc}(I)$, $fg \in L^1_{loc}(I)$ donc T_{fg} a un sens et $\in \mathcal{D}'(I)$. Enfin, si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\langle fTg, \varphi \rangle = \langle Tg, f\varphi \rangle = \int fg\varphi = \langle T_{fg}, \varphi \rangle$. D'où, $fTg = T_{fg}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, alors $\langle f\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, f\varphi \rangle = f(0)\varphi(0) = \langle f(0)\delta_0, \varphi \rangle$. Donc $f\delta_0 = f(0)\delta_0$.

Exercice 4

On a $\langle T_n^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T_n, \varphi^{(k)} \rangle \longrightarrow (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \varphi \rangle$.

On a $L^p \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(I)$ en identifiant $f = T_f$. On utilise Hölder :

$$\left| \int (f_n - f)\varphi \right| \leq \|\varphi\|_{p'} \|f_n - f\|_p,$$

d'où la convergence dans $\mathcal{D}'(I)$. On en déduit que $\forall k \geq 0, f_n^{(k)} \rightharpoonup f^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

Exercice 5

D'abord, $f_n, g_n \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. En calquant la démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$\int f_n \varphi = \int_0^1 \cos(nx) \varphi = \frac{1}{n} \int_0^1 \sin(nx) \varphi' + \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \varphi \right]_0^1 \rightarrow 0,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, donc $f_n \rightharpoonup 0$.

Enfin, $g_n = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{[0,1]} - \frac{1}{2} f_{2n} \rightharpoonup \frac{1}{2} \mathbf{I}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 6

La fonction $x \mapsto x$ est \mathcal{C}^∞ donc le produit $x\delta'_0$ a bien un sens et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\langle x\delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = - \langle \delta_0, (x\varphi)' \rangle = - \langle \delta_0, x\varphi' + \varphi \rangle = - \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Exercice 7

a) Si $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$, où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\int_I \varphi = \lambda \int_I \theta_0 + \int_I \psi'$ donc nécessairement $\lambda = \int_I \varphi$. Avec ce choix de λ , trouvons ψ .

$\exists a, b$ tels que $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\theta_0) \subset [a, b] \subset I$ (I connexe). Soit $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) - (\int_I \varphi)\theta_0(t))dt$ alors $\psi' = \varphi - (\int_I \varphi)\theta_0$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Vérifions que ψ est à support compact. Si $x \in]-\infty, a[\cap I$ alors $\forall t \in [a, x] \varphi(t) = \theta_0(t) = 0$ et $\psi(x) = 0$. Si $x \in]b, \infty[\cap I$ alors $\psi(x) = 0$ donc $\text{supp}(\psi) \subset [a, b]$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$. (On peut remarquer que le couple (λ, ψ) est unique.)

b) Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = 0$, on veut montrer que $\exists C \in \mathbf{R}$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle T, \varphi \rangle = C \int_I \varphi$, ce qui veut bien dire que $T = C$ au sens des distributions

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\exists \psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi = (\int_I \varphi)\theta_0 + \psi'$ et $\langle T, \varphi \rangle = (\int_I \varphi) \langle T, \theta_0 \rangle + \langle T, \psi' \rangle$. Or par hypothèse $\langle T, \psi' \rangle = \langle T', \psi \rangle = 0$ donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta_0 \rangle \int_I \varphi$ donc $C = \langle T, \theta_0 \rangle$ convient.

c) Par hypothèse $T' = v \in \mathcal{C}^\infty(I)$, c'est à dire $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle T', \varphi \rangle = \int_I v\varphi$. La fonction v admet une primitive au sens usuel V et $v = V'$ alors $(T - V)' = 0$ donc $T - V = c$ constante par b) et $T = V + c \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exercice 8

Les deux applications proposées sont bien linéaires par rapport à φ .

On pose $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(n)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Soit K un compact de \mathbf{R} alors $|K \cap \mathbf{N}| < \infty$ et $\exists N_K$ tel que $K \cap \mathbf{N} \subset \overline{B}(0, N_K)$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est à support dans K , alors $|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_0^{N_K} \|\varphi^{(n)}\|_\infty$ donc

$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Soit $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(0)$. Il existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi(x) = e^{x\theta(x)}$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\forall n, \varphi^{(n)}(0) = 1$ donc $T \notin \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Exercice 9

1) $Y\psi \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$ donc $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Calculons les dérivées au sens des distributions de E et montrons par récurrence que

$$E^{(p)} = T_{Y\psi^{(p)}} + \psi^{(p-1)}(0)\delta_0 + \psi^{(p-2)}(0)\delta_0' + \dots + \psi(0)\delta_0^{(p-1)}.$$

On calcule d'abord E' ,

$$\begin{aligned} \langle E', \varphi \rangle &= - \langle E, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \psi \varphi', \\ &= \int_0^\infty \psi' \varphi + \psi(0)\varphi(0), \\ &= \langle T_{Y\psi'}, \varphi \rangle + \langle \psi(0)\delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $p = 1$, on la suppose vraie jusqu'au rang p et démontrons la pour $p + 1$. On a

$$\begin{aligned} \langle E^{(p+1)}, \varphi \rangle &= - \langle E^{(p)}, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \psi^{(p)} \varphi' - \langle \psi^{(p-1)}(0) \delta_0, \varphi' \rangle - \dots - \langle \psi(0) \delta_0^{(p-1)}, \varphi' \rangle, \\ &= \int_0^\infty \psi^{(p+1)} \varphi + \langle \psi^{(p)}(0) \delta_0, \varphi \rangle + \langle \psi^{(p-1)}(0) \delta_0' + \dots + \psi(0) \delta_0^{(p)}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) Soit ψ solution de $\sum_{j=0}^k a_j \psi^{(j)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$, où $a_j \in \mathbf{R}$ et $a_k \neq 0$, satisfaisant

$$\psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(k-2)}(0) = 0 \text{ et } \psi^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k} \text{ alors } \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}).$$

Ici $E^{(j)} = T_{Y\psi^{(j)}}$, $\forall j \leq k-1$ car $\psi^{(p)}(0) = 0$, $\forall p \leq k-2$, et

$$E^{(k)} = T_{Y\psi^{(k)}} + \psi^{(k-1)}(0) \delta_0 = T_{Y\psi^{(k)}} + \frac{1}{a_k} \delta_0.$$

Donc $\sum_{j=0}^k a_j E^{(j)} + a_k E^{(k)} = \delta_0$ par hypothèse sur ψ .

On cherche ψ telle que

$$(\star) \quad \begin{cases} \psi'' + \psi' + \psi = 0 \\ \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

Les solutions générales du système (\star) sont données par

$$\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}} (a e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + b e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}), \quad a, b \in \mathbf{C}.$$

Ici les données initiales impliquent que $a = -b = \frac{1}{i\sqrt{3}}$, donc $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et $E = T_{Y\psi}$ convient.