Analyse de Fourier
ENS de Cachan 2009-2010

TD Exercices supplémentaires Hilbert - Approximation polynômiale

Notation : On note $\mathbf{P}_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ et $\mathbf{P} = \bigcup_n \mathbf{P}_n$.

**Exercice 1** Polynôme de meilleure approximation

Soit $E$ un espave vectoriel normé réel qui contient $\mathbf{P}_n$.
1) Montrer que $\forall f \in E$, il existe au moins un polynôme $p_n \in \mathbf{P}_n$ tel que $\|f - p_n\| = \inf_{q \in \mathbf{P}_n} \|f - q\|$. Donner des exemples d'espaces $E$ dans lesquels on est sûr que $p_n \to f$.
**Définition** : $p_n$ est appelé polynôme de meilleure approximation (p.m.a.) de $f$.
2) Soit $E = L^1(-1, 1)$ et soit $f(x) = sign(x)$, vérifier que $p_0(x) = \alpha \in [-1, 1]$ réalise la meilleure approximation de $f$ dans $\mathbf{P}_0$, donc il n'y a pas toujours unicité de $p_n$.

**Exercice 2** Cas hilbertien - Polynômes orthogonaux

Soit $(a, b)$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $\omega : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction "poids" c'est-à-dire continue, strictement positive, et telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^n \omega(x) \in L^1(a, b)$.
On pose $L^2_\omega = \{f : f\sqrt{\omega} \in L^2(a, b)\}$ que l'on munit de $(f, g) = \int_a^b fg\omega dx$.

1) Vérifier que $\mathbf{P} \subset L^2_\omega$ et que $L^2_\omega$ est un espace de Hilbert.
2) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que $P_0 \equiv 1$, $\forall n \geq 1$, $dP_n = n$, $P_n$ est unitaire et $\forall q \in \mathbf{P}_{n-1}$, $(P_n, q) = 0$.
3) Vérifier que $\forall f \in L^2_\omega$, $\exists!$ $q_n \in \mathbf{P}_n$ tel que $\|f - q_n\| = d(f, \mathbf{P}_n)$. Donner son expression en fonction de $f$ et des $P_n$.
Remarque : $q_n$ est le polynôme de meilleure approximation de $f$ dans $L^2_\omega$.

4) On suppose que l'intervalle $(a, b)$ est borné. Montrer que $\mathbf{P}$ est dense dans $L^2_\omega$ (attention, le poids n'est pas forcément défini au bord de l'intervalle). En déduire que la suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ constitue une famille totale de $L^2_\omega$. Soit $f \in L^2_\omega$ et soit $(q_n)_n$ sa suite de p.m.a. dans $L^2_\omega$, vérifier que $q_n \to f$ dans $L^2_\omega$.
Remarque : Tous les polynômes orthogonaux "connus" forment des familles totales des espaces $L^2_\omega$ correspondant.

5) Un exemple où cela ne "marche" pas.
Soit $\omega(x) = x^{-\log x}$, vérifier que $\omega$ est un poids sur $(0, +\infty)$.
Soit $f(x) = \sin(2\pi \log x)$. Montrer que $f \in L^2_\omega(0, +\infty)$ et que $\forall n \in \mathbf{N}$, $(x^n, f) = 0$. En déduire que la suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ associée à $\omega$ n'est pas totale dans ce $L^2_\omega(0, +\infty)$.

**Corrigé :**

**Exercice 1**

1) Soit $f \in E$ et soit $(P_k)_k \subset \mathbf{P}_n$ une suite minimisante i.e. $\lim_k \|f - P_k\| = d(f, \mathbf{P}_n)$. Alors $(P_k)_k$ est bornée car $\|P_k\| \leq \|f - P_k\| + \|f\|$. Or $(\mathbf{P}_n, \| \ \|)$ est un e.v.n. de dimension finie donc il existe une sous-suite $(P_{kl})_{kl}$ convergente dans $\mathbf{P}_n$ vers un polynôme $P_n$. Alors $\lim_l \|f - P_{kl}\| = \|f - P_n\| = d(f, \mathbf{P}_n)$.
Si les polynômes sont denses dans $E$ alors $\lim_n \|f - P_n\| = 0$. C'est le cas de $E = \mathcal{C}[a, b]$ (Weierstrass), $E = L^p(a, b)$ pour $1 \leq p < \infty$ et $| \ b - a \ | < \infty$.
2) Soit $f(x) = sign(x)$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\|f - \alpha\|_1 = |1 + \alpha| + |1 - \alpha|$.
Si $|\alpha| \leq 1$ alors $\|f - \alpha\|_1 = 2$ et si $|\alpha| > 1$, $\|f - \alpha\|_1 > 2$.

**Exercice 2**

1) Par définition de $\omega$, $\mathbf{P} \subset L^2_\omega$. Ensuite, on a bien un produit scalaire. Vérifions la complétude : Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^2_\omega$ alors $(f_n\sqrt{\omega})_n$ est de Cauchy dans $L^2$ complet donc $\exists g \in L^2$ telle que $f_n\sqrt{\omega} \longrightarrow g$ dans $L^2$. Alors $\frac{g}{\sqrt{\omega}} \in L^2_\omega$ et

$$\|f_n\sqrt{\omega} - g\|_2 = \|f_n - \frac{g}{\sqrt{\omega}}\|_{L^2_\omega} \longrightarrow 0.$$

2) Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à la base canonique $1, x, ..., x^n$ de $\mathbf{P}_n$, on a :

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x^n, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i,$$

d'où l'existence. Enfin, par construction $(P_n, q) = 0$, $\forall q \in \mathbf{P}_{n-1}$. Ce qui assure l'unicité.
3) Par le théorème de projection : $\forall f \in L^2_\omega$, $\exists! q_n \in \mathbf{P}_n$ tel que $\|f - q_n\| = d(f, \mathbf{P}_n)$. De plus, $q_n$ est caractérisé par $q_n \in \mathbf{P}_n$ et $(f - q_n, q) = 0$, $\forall q \in \mathbf{P}_n$.

Si $q_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i$, alors $\alpha_i \|P_i\|^2 = (q_n, P_i) = (f, P_i)$, d'où

$$q_n = \sum_{i=0}^n \frac{(f, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i.$$

4) On suppose que l'intervalle $(a, b)$ est borné. Soit $f \in L^2_\omega$ alors $f\sqrt{\omega} \in L^2(a, b)$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(]a, b[)$ telle que

$$\|f\sqrt{\omega} - g_\varepsilon\|_{L^2} = \|f - \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\|_{L^2_\omega} \leq \varepsilon.$$

Or, $\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}} \in \mathcal{C}_c(]a, b[) \subset \mathcal{C}([a, b])$. Comme $\overline{\mathbf{P}} = \mathcal{C}([a, b])$ (théorème de Weierstrass), $\exists P \in \mathbf{P}$ tel que $\|\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}} - P\|_\infty \leq \varepsilon$.
Alors,

$$\|P - \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\|^2_{L^2_\omega} \leq \|\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}} - P\|^2_\infty \|\omega\|_1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|f-P\|_{L^2_\omega} &\leq \|f-\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\|_{L^2_\omega}+\|\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{\omega}}-P\|_{L^2_\omega},\\ &\leq \varepsilon(1+\sqrt{\|\omega\|_1}).\end{aligned}$$

Donc **P** est dense dans $L^2_\omega(a,b)$. D'où la famille $(P_n)_n$ est totale dans $L^2_\omega(a,b)$ et $\|f-q_n\|_{L^2_\omega} \longrightarrow 0$.
Remarque : la famille $(\dfrac{P_n}{\|P_n\|_{L^2_\omega}})_n$ est une base hilbertienne de $L^2_\omega$ dans ce cas.

5) Il suffit de voir que $\forall n$, $\int_0^\infty x^n w(x)dx < \infty$.
On pose $u = \log x$ alors

$$\int_0^\infty x^n w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)u}e^{-u^2}du < \infty.$$

Avec le même changement de variable, on montre que $f \in L^2_w(0,+\infty)$, et $\forall n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^n f(x)w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)u}e^{-u^2}\sin(2\pi u)du,\\ &= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{R}}\sin(2\pi u)e^{-(u-\frac{n+1}{2})^2}du,\\ &= (-1)^{n+1}e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{R}}\sin(2\pi u)e^{-u^2}du = 0,\end{aligned}$$

car la fonction intégrée est impaire. Donc $(f,p) = 0$, $\forall p \in \mathbf{P}$. Si **P** est dense dans $L^2_w(0,+\infty)$, on en déduit que $f \equiv 0$ ce qui est absurde.