Mathématiques
ENS de Cachan

Analyse Fonctionnelle
S.Fabre 2008-2009

TD2 Topologie

Bibliographie recommandée : poly analyse, J.Dixmier "topologie générale", G.Choquet "cours de topologie".

Exercice 1
Soit E un espace topologique "grossier" i.e. les ouverts de E sont $\{\emptyset, E\}$. Montrer que si E contient plus d'un élément, il n'est pas séparé.

Exercice 2
1) Soient E un espace topologique compact et F un espace topologique séparé. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(E)$ est compact.
2) Soient E un espace métrique compact et F un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3
Soit E un e.v.n. de dimension finie, montrer que E est séparable.

Exercice 4
Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$. On souhaite montrer ici que E n'est pas séparable.
On note $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites constituées de 0 ou 1.
1) Vérifier que $\forall z = (z_n)_n \in A$, il existe $f_z \in E$ telle que $f_z(n) = z_n$, $\forall n$, $0 \leq f_z(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et telle que $z \neq t \Rightarrow \|f_z - f_t\|_\infty = 1$.
2) Supposer qu'il existe une suite $(g_n)_n$ dense dans E et construire une injection de A dans $\mathbb{N}$. Conclure.

Exercice 5 Théorème de Weierstrass
Soit $Q_n(t) = c_n(1-t^2)^n$ sur $[-1,1]$ où c_n est choisi pour que $\int_{-1}^1 Q_n dt = 1$.
1) Vérifier que (faire un dessin)

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nt^2)dt,$$

et en déduire que $c_n < \sqrt{n}$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et on prolonge f et Q_n par 0 à $\mathbb{R}$ tout entier. On pose $P_n(x) = f * Q_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.
Vérifier que P_n est polynômial et montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Montrer que les polynômes à coefficients réels sont denses dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. C'est le théorème de Weierstrass.

4) En déduire que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est séparable.

Exercice 6
Soit E un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide. Montrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans E.

Exercice 7 Théorème d'Ascoli
Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme. Enfin soit A une partie de E.
On note $A_x = \{f(x), f \in A\}$ pour $x \in K$.
On suppose que la partie A vérifie les deux conditions suivantes,
(i) A est équicontinue sur K c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, $\forall x, y \in K$, $d(x,y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall f \in A$,
(ii) $\forall x \in K$, $\overline{A_x}$ est compact dans $\mathbb{R}$.
On va montrer que $\overline{A}$ est compact dans E en utilisant le critère des suites.
Soit donc $(f_n)_n \subset A$.
1) Vérifier qu'il existe une suite $(x_k)_k \subset K$ dense dans K et en utilisant le procédé d'extraction diagonale, montrer qu'il existe une sous-suite $(g_n)_n$ de $(f_n)_n$ telle que $\forall k$, $(g_n(x_k))_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite notée $g(x_k)$.
2) Montrer que g est uniformément continue sur la suite $(x_k)_k$ et en déduire qu'elle se prolonge de façon unique en une application uniformément continue à K tout entier.
3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit $\eta > 0$ donné par l'hypothèse (i) et l'uniforme continuité de g. Vérifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in K$, $\exists l \leq k$ tel que $d(x, x_l) \leq \eta$.
Utiliser ce résultat pour montrer que $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur K.

Remarque : On peut facilement remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^N$ dans l'énoncé (même démonstration) et aussi remplacer la condition (ii) par $\forall x \in K$, A_x est borné.
Pour un énoncé où $\mathbb{R}$ est remplacé par F espace métrique complet voir Choquet ou Dixmier.

Exercice 8
Soient E et F deux espaces de Banach. On note $B_E = \overline{B_E(0,1)}$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F.
1) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim \mathrm{Im} T < \infty$, montrer que T est compact.
2) Soit E l'espace de Banach $\mathcal{C}[0,1]$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(x)|$.
Soit $K \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Vérifier que $T(f) \in E$ et que $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Puis, montrer que T est compact.

Exercice 9 (longueur d'un arc rectifiable)
On appelle arc rectifiable un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^N$ qui est l'image d'une application Lipschitz $c : s \in [0,1] \to c(s) \in \mathbb{R}^N$. On appelle longueur de l'arc, $l(C)$, l'infimum des constantes de Lipschitz des applications surjectives $c : [0,1] \to C$. Montrer que cet infimum est atteint.
Marche à suivre : considérer une suite c_n dont les constantes de Lipschitz tendent vers $l(C)$. Extraire une sous-suite convergeant uniformément vers un arc c et montrer que c est Lipschitz et que sa constante de Lipschitz est égale à $l(C)$.

Corrigé

Exercice 5

1) Sur $[0,1]$, $(1-t^2)^n \geq 1-nt^2$ et $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nt^2)dt$ (puisqu'on ne considère que la partie positive de l'aire constituée par le graphe de $1-nt^2$ sur $[0,1]$.) Donc,

$$1 = c_n \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = 2c_n \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2c_n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nt^2)dt = \frac{4c_n}{3\sqrt{n}},$$

on en déduit que $c_n \leq \frac{3}{4}\sqrt{n}$.

2) Pour $x \in [0,1]$, on a

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-y)Q_n(y)dy = \int_0^1 Q_n(x-y)f(y)dy.$$

Si $Q_n(x) = \sum_0^{d_n} a_p x^p$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n(x-y)f(y)dy &= \int_0^1 \sum_{p=0}^{d_n} a_p \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^k (-y)^{p-k} f(y)dy,\\ &= \sum_{p=0}^{d_n} a_p \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^k (-1)^{p-k} \underbrace{\int_0^1 y^{p-k} f(y)dy}_{\text{constante}}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que P_n est polynomial.

L'application f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$ et $\forall y$ tel que $|y| \leq \delta$, $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Comme $\int_{-1}^{1} Q_n dt = 1$, on a

$$\begin{aligned}|P_n(x) - f(x)| &= |\int_{-1}^{1}(f(x-y) - f(x))Q_n(y)dy|,\\ &\leq \int_{[|y|\leq\delta]} |f(x-y) - f(x)|Q_n(y)dy + 2\|f\|_\infty \int_{[1\geq|y|\geq\delta]} Q_n(y)dy.\end{aligned}$$

Enfin, comme $(1-t^2)^n \geq (1-\delta^2)^n$ si $1 \geq t \geq \delta$, on a

$$\int_\delta^1 Q_n(y)dy \leq Q_n(\delta) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0,$$

donc $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $\int_\delta^1 Q_n(y)dy \leq \varepsilon$. D'où $|P_n(x) - f(x)| \leq (1+4\|f\|_\infty)\varepsilon$ et ceci $\forall x \in [0,1]$, on en déduit que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $\widehat{f} = f - f(0) - x(f(1) - f(0))$ est continue et vérifie $\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$, donc par 2), $\forall\varepsilon > 0$, $\exists \widehat{P_\varepsilon}$ polynôme tel que $\|\widehat{f} - \widehat{P_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $P_\varepsilon = \widehat{P_\varepsilon} - f(0) - x(f(1) - f(0))$ alors P_ε est polynomial et $f - P_\varepsilon = \widehat{f} - \widehat{P_\varepsilon}$ ce qui montre que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([0,1])$.

4) On en déduit que les polynômes à coefficients rationnels sont denses dans $\mathcal{C}([0,1])$, ils constituent une partie dénombrable de $\mathcal{C}([0,1])$. Donc $\mathcal{C}([0,1])$ est séparable.

Exercice 6

Le sens direct est immédiat. Pour l'autre sens, on se donne $(x_n)_n$ une suite de $\overline{A}$ et on veut montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Comme $x_n \in \overline{A}$ pour tout n, il existe $y_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ par exemple. Par hypothèse, $(y_n)_n$ a une sous-suite $(y_{nk})_{nk}$ convergente dans E. On en déduit facilement que $(x_{nk})_{nk}$ converge vers la même limite.

Exercice 7

1) On sait qu'un espace métrique compact est séparable (vu en TD1) donc il existe une suite de points $(x_k)_k$ qui est dense dans K.
On va alors extraire pour tout k de la suite f_n une sous-suite $f_{\varphi_k(n)}$ telle que $f_{\varphi_k(n)}(x_l)$ converge pour $l \leq k$ et telle que $f_{\varphi_k(n)}$ soit une sous-suite de $f_{\varphi_{k-1}(n)}$. On procède par extractions successives.
Comme la suite $(f_n(x_1))_n \subset \overline{A_{x_1}}$ est bornée, la suite $(f_n)_n$ admet une sous-suite convergente en x_1 que nous notons $f_{\varphi_1(n)}$ et donc $f_{\varphi_1(n)}(x_1) \longrightarrow y_1$ dans $\mathbb{R}$. Maintenant, la suite $(f_{\varphi_1(n)}(x_2))_n \subset \overline{A_{x_2}}$ est bornée, elle admet une sous-suite $f_{\varphi_2(n)}$ qui converge aussi en x_2, et on recommence ainsi de suite, au rang k par exemple, il existe $(f_{\varphi_k(n)})_n$ extraite de $(f_n)_n$ telle que $(f_{\varphi_k(n)})_n$ est extraite de $(f_{\varphi_{k-1}(n)})_n$ et $f_{\varphi_k(n)}(x_k) \longrightarrow y_k \in \mathbb{R}$.
On applique alors le procédé dit d'extraction diagonale : on pose $g_n = f_{\varphi_n(n)}$ "suite diagonale" alors g_n vérifie :
dès que $n \geq k$, $(g_n)_n$ est extraite de $(f_{\varphi_k(n)})_n$ (elle-même extraite de $(f_n)_n$) et converge en tout point de la suite x_k vers $y_k \in \mathbb{R}$. On pose alors $g(x_k) = y_k$ pour tout k.
2) Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $\forall l, k,\ d(x_l, x_k) \leq \eta \Longrightarrow |g(x_l) - g(x_k)| \leq \varepsilon$.
"On coupe en 3" : $|g(x_l) - g(x_k)| \leq |g(x_l) - g_n(x_l)| + |g_n(x_l) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g(x_k)|$, et on utilise l'équicontinuité des g_n : $\varepsilon > 0$ étant fixé,
$\exists \eta > 0$ tel que $\forall l, k,\ d(x_l, x_k) \leq \eta \Longrightarrow |g_n(x_l) - g_n(x_k)| \leq \varepsilon,\ \forall n$. Les 2 autres termes tendent vers 0 quand n tend vers l'infini donc, on obtient par exemple
$\exists \eta > 0$ tel que $\forall l, k,\ d(x_l, x_k) \leq \eta \Longrightarrow |g(x_l) - g(x_k)| \leq 3\varepsilon$.
On utilise ensuite le théorème de prolongement vu en TD1, g se prolonge de façon unique à K tout entier en une fonction uniformément continue encore notée g.
3) Par équicontinuité des g_n et uniforme continuité de g sur K, on peut écrire :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x, y \in K,\ d(x, y) \leq \eta \Longrightarrow |g_n(x) - g_n(y)| \leq \varepsilon,\ \forall n$ et $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.
Soient $\varepsilon > 0$ fixé et $\eta > 0$ donné par ci-dessus. Comme K est compact, il existe k tel que

$$K \subset \bigcup_{1 \leq l \leq k} B(x_l, \eta). \quad (*)$$

Montrons maintenant que $\forall x \in K$, $|g_n(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$ pour n assez grand (ce qui prouvera bien la convergence uniforme).
On écrit :
$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_l)| + |g_n(x_l) - g(x_l)| + |g(x_l) - g(x)|$.
Avec $(*)$ et l'équicontinuité des g_n, $|g_n(x) - g_n(x_l)| \leq \varepsilon,\ \forall n$.
On fixe finalement n_0 assez grand pour que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall l \leq k,\ |g_n(x_l) - g(x_l)| \leq \varepsilon,$$

(ce qui est possible car c'est un nombre fini de suites qui tendent vers 0).
Enfin, par uniforme continuité de g et $(*)$, $|g(x_l) - g(x)| \leq \varepsilon$.
Donc, on a bien montré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in K,\ |g_n(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$.

Exercice 8
1) $T(B_E)$ est inclus dans le compact $\overline{B(0, \|T\|)} \cap ImT$ de $\mathrm{Im}(T)$ qui est de dimension finie. Donc T est compact.
2) $T(f) \in E$ par convergence dominée par exemple. T est linéaire et $\forall x$,

$$|T(f)(x)| \leq \|K\|_\infty \, \|f\|_\infty.$$

Donc T est continue sur E.
Pour montrer que T est un opérateur compact, on applique le théorème d'Ascoli à $A = T(B_E)$ dans $\mathcal{C}[0,1]$.
L'uniforme continuité de K permet de prouver l'équicontinuité de $T(B_E)$.
En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, z \in [0,1]$ et $\forall y \in [0,1]$, on a $|x - z| \leq \eta \Longrightarrow |K(x,y) - K(z,y)| \leq \varepsilon$. D'où, $\forall x, z \in [0,1]$ tels que $|x - z| \leq \eta$, on a, $\forall f \in B_E$,

$$|T(f)(x) - T(f)(z)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x,y) - K(z,y)| dy \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\forall x \in [0,1]$, $\{T(f)(x), f \in B_E\} \subset [-\|K\|_\infty, \|K\|_\infty]$ donc le point (ii) est vérifié.
On déduit du théorème d'Ascoli que $\overline{T(B_E)}$ est compact.

Exercice 9
On note S l'ensemble des applications surjectives c de $[0,1]$ sur C l'arc rectifiable et de constante de Lipschitz k_c, on a $l(C) = \inf\limits_{c \in S} k_c$.
Soit $(c_n)_n \subset S$ telle que $(k_{c_n})_n$ soit une suite minimisante (par exemple : $l(C) \leq k_{c_n} \leq l(C) + \frac{1}{n}$).
On note $A = \{c_n, \, n \geq 1\} \subset \mathcal{C}[0,1]$. On va appliquer le théorème d'Ascoli à l'ensemble A.

1) A est équicontinue :

On remarque que $\|c_n(t) - c_n(s)\| \leq k_{c_n}|t - s| \leq (l(C) + 1)|t - s|$ et ceci pour tous t et s dans $[0,1]$. Donc A est équicontinue.

2) Montrons que la suite $(c_n(s))_n$ est bornée, $\forall s \in [0,1]$.

C compact de $\mathbb{R}^N$ est borné donc il existe $R > 0$ tel que $C \subset B(0,R)$. Alors $\forall s \in [0,1]$, $\forall c \in S$, $\|c(s)\| \leq R$.
Le théorème d'Ascoli donne l'existence d'une sous-suite $(c_{n_p})_p$ convergeant uniformément dans $\mathcal{C}[0,1]$. On note c_0 la limite. On a

$$\forall p, \;\; \|c_{n_p}(s) - c_{n_p}(t)\| \leq k_{n_p}|s - t|, \;\; \forall s, \, t \in [0,1],$$

donc quand p tend vers l'infini, $\|c_0(s) - c_0(t)\| \leq l(C)|s - t|$, $\forall s, \, t \in [0,1]$. Il reste à vérifier que c_0 est surjective : $c_0([0,1]) = C$. On sait que pour tout $y \in C$ et pour tout p, il existe un s_{np} dans $[0,1]$ tel que $y = c_{n_p}(s_{np})$. La suite $(s_{np})_p$ est dans $[0,1]$ compact donc il existe une sous-suite encore notée $(s_{np})_p$ qui converge vers un $s \in [0,1]$. Comme $s_{np} \longrightarrow s$ et $c_{n_p} \longrightarrow c_0$ uniformément, on peut passer à la limite et on obtient $y = c_0(s)$, donc c_0 est surjective et $l(C) = k_{c_0}$.