Analyse fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

TD : TFD (Préparation au TP)

Dans tout ce qui suit, on suppose que $N \geq 2$ est un entier pair.
On note $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$, racine N-ième de l'unité.
On rappelle que la TFD et la TFD inverse sont données par les formules :

$$\text{TFD :} \quad u = (u_l)_{0 \leq l \leq N-1} \longmapsto \quad \tilde{u} = (\tilde{u}_n)_n \text{ où } \tilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u_l \omega_N^{-nl},\ n = -\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1,$$

$$\text{TFD}^{-1} : \quad \tilde{u} = (\tilde{u}_n)_{-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}-1} \longmapsto \quad u = (u_k)_k \text{ où } u_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_n \omega_N^{kn},\ k = 0, ..., N-1.$$

Exercice 1

Soit u une fonction continue et a-périodique. Montrer que si $u_k = u(ka/N)$ pour $k = 0, N-1$, les $\tilde{u}_n$, pour $n = \frac{-N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1$, sont des approximations des coefficients de Fourier de u,

$$c_n(u) = \frac{1}{a} \int_0^a u(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{a}\right),$$

par la formule des trapèzes.

Exercice 2

On suppose que les échantillons $u = (u_k)_k$ sont réels. Soit $\tilde{u} = (\tilde{u}_n)_n = \text{TFD}(u)$, montrer que $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_{-\frac{N}{2}}$ sont réels, et que $\tilde{u}_k = \overline{\tilde{u}_{-k}}$ pour $k = 1 ... \frac{N}{2} - 1$.

Exercice 3

On considère un réel a, une fonction u de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, telle que $u(x+a, y+a) = u(x, y)$. On pose $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$. On définit la TFD des $u_{k,l}$ comme la suite des coefficients, pour $m, n \in \{-\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1\}$,

$$\tilde{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl}.$$

Montrer que la transformation ainsi définie est “séparable”, c'est-à-dire que le passage des $u_{k,l}$ aux $\tilde{u}_{m,n}$ s'effectue par deux TFDs à une dimension successives.

Exercice 4 Quelques propriétés de la TFD

Il est commode pour la manipulation des formules de considérer $u = (u_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ pour ce qu'il est en fait dans la pratique ($u_k = u(ka/N)$) : une suite périodique, de période N, que l'on peut voir comme une suite u_k avec $k \in \mathbb{Z}$. La formule de la TFD donnant les $\tilde{u}_n$ est également périodique de période N. On peut donc aussi écrire $\tilde{u}_n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, dans les formules donnant la TFD et son inverse, la sommation peut être effectuée sur n'importe quel ensemble de N entiers consécutifs.

Avec cette convention, on suppose que $u = (u_k)_k \overset{\text{TFD}}{\longrightarrow} \tilde{u} = (\tilde{u}_n)_n$.

1) Montrer que $(u_{-k})_k \longrightarrow (\tilde{u}_{-n})_n$, $(\overline{u_k})_k \longrightarrow (\overline{\tilde{u}_{-n}})_n$ et que $(\overline{u_{-k}})_k \longrightarrow (\overline{\tilde{u}_n})_n$.

2) On dira que la suite $(u_k)_k$ est paire (resp. impaire) si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $u_{-k} = u_k$ (resp. $u_{-k} = -u_k$).

Montrer que $(u_k)_k$ est paire (resp. impaire) $\Leftrightarrow$ $(\tilde{u}_n)_n$ est paire (resp. impaire).

3) Montrer que $(u_k)_k$ est réelle et paire $\Leftrightarrow$ $(\tilde{u}_n)_n$ est réelle et paire.

4) Montrer que $(u_k)_k$ est réelle et impaire $\Leftrightarrow$ $(\tilde{u}_n)_n$ est imaginaire pure et impaire.

5) Soient $x = (x_k)_k$ et $(y_k)_k$ deux suites périodiques de période N et $(\tilde{x}_n)_n$, $(\tilde{y}_n)_n$ leur TFD.

On considère la suite $z = (z_k)_k$ définie par convolution circulaire :

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}.$$

Calculer sa TFD en fonction des TFD $(\tilde{x}_n)_n$ et $(\tilde{y}_n)_n$.

Exercice 5 FFT

On suppose que $N = 2^n$ avec $n \geq 1$. Appelons "calcul d'ordre N" l'évaluation d'un polynôme de degré $N-1$ aux racines N-ièmes de l'unité. Et notons $M(n)$ le nombre d'opérations (additions et multiplications) demandées par ce calcul.

On se donne un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$. On pose $Q(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} X^k$ et $R(X) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} X^k$. Alors

$$(\star) \qquad P(\omega_N^k) = Q\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right) + \omega_N^k R\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right).$$

Or, si N est pair, les $\left(\omega_N^k\right)^2$ sont exactement les racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité. Il suffit donc d'évaluer les deux polynômes Q et R aux racines d'ordre $\frac{N}{2}$ de l'unité. C'est donc un "calcul d'ordre $\frac{N}{2}$", nécessitant $M(n-1)$ opérations.

Montrer que $M(n) \leq n2^{n+2} = 4N \log_2 N$ additions et multiplications.

Exercice 6 Zoom 2D (voir poly page 109-110)

..."Nous présentons une méthode d'interpolation reposant sur une extension de la TFD d'un signal ou d'une image. Nous détaillons la méthode, dite du "prolongement par des zéros ("zéro-padding"), en une dimension, le principe se généralisant sans mal pour une image. Comme précédemment, considèrons des échantillons u_k, k variant de 0 à $N-1$, et $\tilde{u}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{-kn}$. On suppose que N est pair et que l'on veut zoomer d'un facteur 2, c'est à dire que l'on veut construire un signal de taille deux fois plus grande (avec deux fois plus d'échantillons) que le signal de départ. On définit un nouveau signal v, de taille $2N$ comme étant la TFD inverse de $\tilde{v}$, donné par

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n \text{ si } -\frac{N}{2} \le n \le \frac{N}{2} - 1, \;\; \tilde{v}_n = 0 \text{ si } n \in [-N, -\frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, N-1].$$

Proposition 1D : On peut facilement vérifier que le signal v dont la TFD est donnée par la formule ci-dessus vérifie $v_{2k} = u_k$, pour $k = 0, ..., N-1$.

La méthode se généralise aux cas des images.
Considérons une image numérique $(u_{k,l})_{0 \le k,l \le N-1}$. Nous définissons une image zoomée $(v_{i,j})_{i,j=0,\ ...,\ 2N-1}$ comme étant la transformée de Fourier discrète inverse de $\tilde{v}_{i,j}$ définie pour $i, j = -N,\ ...,\ N-1$ par

$$\tilde{v}_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} \text{ si } -\frac{N}{2} \le m, n \le \frac{N}{2} - 1, \;\; \tilde{v}_{m,n} = 0 \text{ sinon.}$$

Ecrire la proposition 2D correspondante et démontrer-la.

Corrigé :

Exercice 1
Rappel : Formule des trapèzes
Soit $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$ et soit $\Delta = \{\alpha = \alpha_0 < ... < \alpha_k = \beta\}$ une sudivision de $[\alpha,\beta]$ avec $h_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$, $i = 0, k-1$. La formule des trapèzes donne

$$\int_\alpha^\beta f dx \approx T_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h_i}{2}(f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})).$$

Ici, avec $h = \frac{a}{N}$, $\alpha_j = jh$, on obtient donc (u est continue et $u(0) = u(a)$)

$$\begin{aligned} c_n(u) &= \frac{1}{a}\int_0^a u(x)e^{(\frac{-2i\pi nx}{a})}dx, \\ &\approx \frac{1}{N}\left(\frac{u(0)}{2} + u(\frac{a}{N})e^{-\frac{2i\pi n}{N}} + ... + u((N-1)\frac{a}{N})e^{-\frac{2i\pi n(N-1)}{N}} + \frac{u(0)}{2}\right), \\ &\approx \tilde{u}_n, \end{aligned}$$

où $u_k = u(k\frac{a}{N})$ dans la formule de la TFD.

Exercice 2
Comme $u_k \in \mathbf{R}$, par définition de la TFD, on a

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \in \mathbf{R},$$

$$\tilde{u}_{-\frac{N}{2}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \omega_N^{k\frac{N}{2}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k(-1)^k \in \mathbf{R}.$$

Enfin, pour $n = 1 ... \frac{N}{2} - 1$, on a

$$\tilde{u}_{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{\overline{u_k}\omega_N^{-nk}} = \overline{\tilde{u}_n}.$$

Exercice 3
On a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,n} &= \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l}\omega_N^{-mk}\omega_N^{-nl}, \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega_N^{-mk}\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l}\omega_N^{-nl}\right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est une "TFD 1D d'une colonne", il reste ensuite une "TFD 1D d'une ligne". Finalement, ce cacul se fait avec N TFD en colonne et N TFD en ligne.

Exercice 4

1) Notons $u^1 = (u^1_n)_n$ la TFD de $(u_{-n})_n$. Alors

$$u^1_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_{-k}\omega_N^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N+1}^{0} u_k\omega_N^{nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k\omega_N^{nk} = \tilde{u}_{-n},$$

car $u_{k+N} = u_k$ pour tout k. Si $u^* = (u^*_n)_n$ est la TFD de $(\overline{u_k})_k$, alors

$$u^*_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{u_k}\omega_N^{-nk} = \overline{\tilde{u}_{-n}}.$$

Donc, $(\overline{u_{-k}})_k \to (\overline{\tilde{u}_{+n}})_n$.

2) C'est une conséquence directe de 1).

3) Si $(u_k)_k$ est réelle et paire, alors $(\tilde{u}_n)_n$ est paire par 2). De plus pour tout k, $u_k - \overline{u_k} = 0 \Rightarrow \tilde{u}_n - \overline{\tilde{u}_{-n}} = 0 = \tilde{u}_n - \overline{\tilde{u}_n}$. Donc $(\tilde{u}_n)_n$ est réelle. Et réciproquement.

4) Si $(u_k)_k$ est réelle et impaire, alors $(\tilde{u}_n)_n$ est impaire par 2). De plus pour tout k, $u_k - \overline{u_k} = 0 \Rightarrow \tilde{u}_n - \overline{\tilde{u}_{-n}} = 0 = \tilde{u}_n + \overline{\tilde{u}_n}$. D'où, $(\tilde{u}_n)_n$ est imaginaire pure. Et réciproquement.

5) On a par définition

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_n &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k\omega_N^{-nk}, \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}\omega_N^{-nk}, \\
&= \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} x_q\omega_N^{-nq}\sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q}\omega_N^{-n(k-q)}, \\
&= \tilde{x}_n \times N\tilde{y}_n.
\end{aligned}$$

Exercice 5

On démontre que $M(n) \leq n2^{n+2} = 4N\log_2 N$ par récurrence sur n. Si $n = 1$, il s'agit d'évaluer $P(1)$ et $P(\omega_2)$ avec P de degré ≤ 1. On a evidemment $M(1) = 3 \leq 1 \times 2^{1+2}$. Supposons l'inégalité vraie en $n-1$ et démontrons-la pour n. Les calculs à l'ordre $\frac{N}{2}$ étant faits pour Q et R (ce qui demande $2M(n-1)$ opérations), la formule $(\star)$ permet de calculer chaque $P(\omega_N^k)$ avec 2 opérations. On en déduit que $M(n) = 2M(n-1) + 2N$.

Donc $M(n) \leq 2(n-1)2^{n+1} + 2.2^n = 2^{n+1}(2n-1) \leq n2^{n+2}$.

Exercice 6

Montrons que $v_{2k,2l} = u_{k,l}$ pour $k, l = 0, ..., N-1$. En effet,

$$v_{2k,2l} = \sum_{m=-N}^{N-1}\sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{v}_{m,n}\omega_{2N}^{2mk}\omega_{2N}^{2nl} = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{u}_{m,n}\omega_N^{mk}\omega_N^{nl} = u_{k,l}.$$