Examen d'analyse fonctionnelle, E.N.S. Cachan, Magistère de Mathématiques, 2004-2005

24 janvier 2005

Les exercices sont largement indépendants. Lisez-les tous avant de commencer et choisissez l'ordre qui vous convient le mieux. On recommande très vivement la précision, mais aussi la brièveté dans la rédaction. Ne redémontrez pas des faits contenus dans le polycopié. Contentez-vous de citer précisément en donnant des références explicites pour les résultats utilisés dans les démonstrations.

Exercice 1 1) Si V est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H, montrer que pour $v \in H$,

$$d(v,V) = \mathrm{Max}(Re(u,v),\ u \in V^{\perp},\ ||u|| = 1).$$

2) En déduire Max $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ où $g:\ [-1,+1] \to I\!R$ est soumis aux contraintes

$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^2 = 1,\ \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0,\ \int_{-1}^{1} xg(x)dx = 0.$$

On donnera la fonction f pour laquelle cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 2 Soit g une fonction croissante de $I\!R^+$ dans $I\!R^+$ telle que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} = +\infty.$$

Soit une suite de fonctions f_n mesurables telles que $\int_0^1 g(f_n) < C$ pour une constante indépendante de n. On suppose que f_n converge presque partout vers une fonction f. Démontrer que f_n converge vers f dans $L^1(0,1)$.

Exercice 3 Calculer si elles existent les limites faibles des suites suivantes :

1) Dans $L^2(0,\pi)$: $u_n(x) = \cos^2 n^2 x$.

2) Dans $L^2(I\!R)$: $u_n(x) = \frac{x^2+n^2-2n+2}{((x-n)^2+1)(x^2+1)}$. (Commencer par vérifier que ces fonctions sont bien dans $L^2(I\!R)$).

Exercice 4 Y-a-t-il des fonctions f_n et f telles que :
(si "oui", donner un exemple ; si "non", dire pourquoi).

(a) $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(0,1)$, $(1 \le p < \infty)$, mais pas fortement ;

(b) $f_n \in L^3(0,1)$, $f_n \to 0$ fortement dans $L^2(0,1)$ et $f_n \to 1$ faiblement dans $L^3(0,1)$.

(c) f_n tend faiblement vers f dans $L^2(0,1)$ mais $f_n(x)$ ne tend vers $f(x)$ en aucun point.

(d) $f_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$ uniformément mais pas dans $L^2(I\!R)$.

(e) On suppose que $f_n \in L^2(I\!R) \cap L^3(I\!R)$ converge faiblement dans $L^2(I\!R)$ vers une fonction f et aussi faiblement vers une fonction g dans $L^3(I\!R)$. A-t-on $f = g$?

Exercice 5 On note $C_b(I\!R)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $I\!R$, muni de la norme $||u|| = \sup_{I\!R} |u(x)|$.

1) Vérifier que $C_b(I\!R)$ est un espace de Banach.

Soit pour $a = (..., a_{-n}, ..., a_0, ..., a_p, ...) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$, la fonction $\varphi_a \in C_b(I\!R)$ définie par $\varphi_a(n) = a_n$ et par le fait que φ_a est continue et affine sur $[n, n+1]$.

1) Montrer que l'ensemble de toutes les fonctions fonctions φ_a n'est pas dénombrable.

2) En déduire que $C_b(I\!R)$ n'est pas séparable.

3) En déduire que $C_0^\infty(I\!R)$ n'est pas dense dans $C_b(I\!R)$.

Exercice 6 Donner un exemple de fonction $f(x)$ sur $I\!R$ qui n'est pas une distribution (montrer que ce n'est effectivement pas une distribution).

Exercice 7 Approximation des dérivées de la masse de Dirac par des fonctions.

(a) On pose $f_n(x) = -n$ si $-\frac{1}{n} \le x \le 0$, $f_n(x) = n$ si $0 < x \le \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$ ailleurs. Calculer la limite de f_n au sens des distributions dans $I\!R$.

(b) Trouver une suite de fonctions f_n qui tend au sens des distributions vers δ_0''.

Exercice 8 Si $u \in \mathcal{D}'(I\!R)$ est une distribution sur $I\!R$, on définit sa translatée de $h \in I\!R$ par

$$< \tau_h u, \varphi > = < u, \tau_{-h} \varphi >,$$

où on note $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x-h)$.

1) Vérifier que $\tau_h u$ est une distribution.

2) Vérifier la compatibilité des deux définitions, à savoir que si $u \in L^1_{loc}$ et $\tilde{u}$ la distribution qui lui est associée canoniquement, $\tau_h \tilde{u} = \tau_h u$ au sens des distributions.

3) Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(I\!R)$,

$$\frac{\tau_h u - u}{h} \to u'$$

au sens des distributions.

4) Donner une formule de discrétisation du même type pour approcher u''.

Exercice 9 Cet exercice utilise les notations des exercices 8 et 5. On considère l'espace $C_b(I\!R)$ de l'exercice 5 et son dual $C_b(I\!R)'$.

1) Exprimer la norme d'un élément de $C_b(I\!R)$.

2) Montrer que $\delta_0 \in C_b(I\!R)'$. Montrer que $C_b(I\!R)' \subset \mathcal{D}'(I\!R)$.

3) Soit F une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(+\infty) = \lim_{r\to+\infty} F(r) < \infty \text{ et } F(-\infty) = \lim_{r\to-\infty} > -\infty.$$

On pose pour toute fonction $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mu_F^h(\varphi) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} (F(nh) - F((n-1)h))\varphi(nh).$$

$$\mu_F(\varphi) = \lim_{h\to 0} \mu_F^h.$$

Montrer que $\mu_F \in C_b(\mathbb{R})'$ et calculer sa norme.

4) Montrer que μ_F^n est une distribution et l'exprimer comme la somme d'une série de distributions très simples. Montrer que μ_F^n converge au sens des distributions vers μ_F.

5) Montrer que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6) Montrer que F' et μ_F sont égales au sens des distributions.

Exercice 10 Soit $c \in [a,b]$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $u \in H^1([a,b]) \to u(c)$ appartient au dual de $H^1([a,b])$.

2) Calculer sa norme, ou si vous n'y arrivez pas, donnez du moins un majorant le plus petit possible de cette norme.

Exercice 11 Soit $u \in H^1([0,1])$ et $v \in H^1([1,2])$. Montrer que la fonction $w(x) = u(x)$ pour $x \in [0,1]$ et $w(x) = v(x)$ si $x \in]1,2]$ est dans $H^1([0,2])$ si et seulement si $u(1) = v(1)$.

Exercice 12 On recherche une distribution u sur $[0,2\pi]$ telle que

$$-u'' + u = \delta_\pi + f, \quad u(0) = u(2\pi) = 0,$$

où $f(x) = 2\pi - x$.

1) Donner les développements de f et δ_π en série de Fourier sur $[0,2\pi]$.

2) Résoudre l'équation en donnant le développement en série de Fourier de la solution u.

3) Quelles indications y-a-t-il dans le cours que cette solution est unique (deux arguments possibles, donner les deux si vous pouvez).

3) Vérifier que la solution u est dans $H^1(0,2\pi)$.

Exercice 13 On se donne une fonction f sommable sur $\mathbb{R}$ et on pose

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} f(y)dy.$$

1) Montrer que l'on a

$$(x+y)^2 \le 2(x-y)^2 + 8x^2$$

quels que soient x et y.

2) Démontrer que la fonction g est définie et continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

3) Démontrer que la fonction $x \to \frac{g(x)}{(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

4) Démontrer que la fonction g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.