Analyse fonctionnelle
ENS de Cachan 2008-2009

Partiel du 27/02/2009, durée 2H

NB : Seuls les notes de cours/TD et le polycopié sont autorisés.

Exercice 1 Fonction intégrable et limite en l'infini

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ une fonction définie partout sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.
1) On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
2) On suppose que $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. A-t'on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
3) On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
a) Montrer que pour $\eta > 0$ quelconque et $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ telle que $\lim_{n\to} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)|dx = 0.$$

b) A-t'on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
4) On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ avec $f' \in L^1(\mathbf{R})$. A-t'on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Exercice 2 Espace $L^\infty(\mathbf{R})$

On appelle $L^\infty(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions définies presque partout et telles qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \le C$ pour presque tout x. On note

$$\|f\|_\infty = \inf \{C > 0 : |f(x)| \le C \text{ p.p.}\}.$$

Enfin, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$ si $f \notin L^\infty(\mathbf{R})$.
1) Montrer qu'on a toujours $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ p.p.
2) Montrer que $\|f\|_\infty$ est bien une norme sur $L^\infty(\mathbf{R})$.
3) Montrer que l'espace $L^\infty(\mathbf{R})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Exercice 3

Soit $f \in L^p(\mathbf{R})$ avec $1 \le p \le \infty$. On définit, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

1) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}$ et que

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) = 0.$$

2) Si $p = \infty$, que peut-on dire de cette fonction g ?

Exercice 4

On dira qu'une suite $(f_n)_n \subset L^1(0, \pi)$ converge faiblement vers $f \in L^1(0, \pi)$ si $\int_0^\pi f_n g \to \int_0^\pi fg, \forall g \in L^\infty(0, \pi)$.

1) Soit $f_n(x) = \sin(nx)$.
   a) Calculer $\|f_n\|_{L^1(0,\pi)}$.
   b) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0, \pi[)$, $\int_0^\pi f_n \varphi \to 0$. En déduire que $\forall g \in L^\infty(0, \pi)$, $\int_0^\pi f_n g \to 0$.

2) Comparer la convergence et la convergence faible dans $L^1(0, \pi)$.

Exercice 5

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue. On dira que T est compacte si l'image par T de la boule unité fermée de E est d'adhérence compacte dans F.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}^1([0, 1])$ que l'on munit de $\|u\| = \|u\|_p + \|u'\|_p$.
1) Vérifier que $L^p(0, 1) \subset L^1(0, 1)$.
2) On note i_p l'application identité id : $(\mathcal{C}^1([0, 1]), \| \ \|) \to (\mathcal{C}([0, 1]), \| \ \|_\infty)$. Montrer qu'elle est continue.
3) Montrer que si $p > 1$, l'application i_p est compacte.
4) Pour $p = 1$, l'application i_1 est-elle compacte ? (raisonner avec des suites).

Exercice 6

On considère l'espace

$$\mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) : \ u, u' \in L^1(\mathbf{R}) \right\},$$

que l'on munit de $\|u\| = \|u\|_1 + \|u'\|_1$.

Soit $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R})$ et soit $(\varrho_n)_n$ une suite régularisante, c'est-à-dire, $\varrho_n(s) = n\varrho(ns)$ où $\varrho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, $\varrho \geq 0$, $supp(\varrho) \subset]-1, 1[$ et $\int \varrho dt = 1$.
1) Montrer que $\varrho_n * u \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R})$ et que $(\varrho_n * u)' = \varrho_n * u'$ pour tout n.
2) Soit $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $\zeta(x) = 1$.

Enfin, on suppose que $\zeta(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.
Pour tout entier $n > 0$, on pose $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$ et $u_n(x) = \zeta_n(x)(\varrho_n * u(x))$.
Vérifier que $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et montrer que $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R})$.

Exercice 7

Soit $(f_n)_n$ une suite équiintégrable de fonctions de $L^1(B)$ où B désigne une partie bornée de $\mathbf{R}$.
On suppose de plus que la suite $(f_n)_n$ converge en mesure vers une certaine fonction f, c'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mu([|f - f_n| \geq \eta]) = 0,$$

où $[|f - f_n| \geq \eta]$ désigne l'ensemble $\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \eta\}$ et μ est la mesure de Lebesgue.
1) Montrer que $\forall \delta > 0, \forall \eta > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$,

$$\mu([|f_p - f_q| \geq \eta]) \leq \delta.$$

2) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^1(B)$.
3) Montrer que $f \in L^1(B)$ et que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(B)$.

Exercice 8

Soient $1 \leq p < q < \infty$ et F l'ensemble

$$F = \{f \in L^p \cap L^q : \|f\|_q \leq 1\}.$$

Montrer que F est femé dans L^p.
Soit $(f_n)_n \subset L^p \cap L^q$ et soit $f \in L^p$. On suppose que $f_n \longrightarrow f$ dans L^p et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n, $\|f_n\|_q \leq C$.
Montrer que pour tout $r \in [p, q[$, $f \in L^r$ et que $f_n \longrightarrow f$ dans L^r.